

1. Nech x_t je stacionárny proces so spektrom $s_x(\omega)$. Definujeme nový proces

$$y_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s x_{t-s}$$

Dokažte, že jeho spektrom je

$$s_y(\omega) = A(e^{i\omega})A(e^{-i\omega})s_x(\omega) = |A(e^{i\omega})|^2 s_x(\omega),$$

kde

$$A(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s z^s$$

NAVOD: stačí dokažať, že $\text{cov}(y_t, y_{t+k}) = \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{-i\omega})A(e^{i\omega})s_x(\omega)e^{i\omega k} d\omega$
 Dokažte túto vlastnosť! potom toto musí byť $s_y(\omega)$

2. Tvrdenie z príkladu 1 často zjednoduší výpočet spektra. Použite ho na výpočet spektra AR(1) procesu.

NAVOD: Ak $x_t = dx_{t-1} + u_t$, tak $u_t = x_t - dx_{t-1}$. Použite pr. 1 na výpočet spektra u_t a porovnajte výsledok s tým, čo viete povedať o spektre u_t priamo.

3. Nech x_t je stacionárny proces. Definujeme

$$y_t = \frac{1}{3}(x_{t-1} + x_t + x_{t+1}).$$

Pre ktoré hodnoty ω je spektrom procesu y_t nulové? Akú to má interpretáciu?

4. To isté ako v pr. 3, ak je proces y_t def. ako

$$y_t = \frac{1}{4}(x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-3}).$$