ARMA modely
časť 1: autoregresné modely (AR)

Beáta Stehlíková
Časové rady, FMFI UK

AR modely

- Najskôr: autoregresný proces prvého rádu - AR(1)
  - výpočty sa budú dať spraviť priamo
- Potom:
  - autoregresné procesy vyšších rádov - použijeme aj operátor posunu a Woldovu reprezentáciu
  - ako určiť vhodný rád procesu pre dané dáta

I.

Autoregresný proces prvého rádu - AR(1)

AR(1) - definícia

- AR(1) proces:

$$x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t,$$

kde δ a α sú konštanty a $\{u_t\}$ je biely šum

- Nech pre $t = t_0$ je daná hodnota x_{t_0} :

$$\begin{aligned} x_{t_0+1} &= \delta + \alpha x_{t_0} + u_{t_0+1}, \\ x_{t_0+2} &= \delta + \alpha x_{t_0+1} + u_{t_0+2} = \\ &\quad \delta(1+\alpha) + \alpha^2 x_{t_0} + (\alpha u_{t_0+1} + u_{t_0+2}), \\ x_{t_0+3} &= \ldots \end{aligned}$$

vo všeobecnosti:

(1) $$x_{t_0+\tau} = \alpha^\tau x_{t_0} + \frac{1-\alpha^\tau}{1-\alpha}\delta + \sum_{j=0}^{\tau-1} \alpha^j u_{t_0+\tau-j}$$

AR(1) - stacionarita

- Zo vzťahu (1):

$$x_t = \alpha^{t-t_0} x_{t_0} + \frac{1-\alpha^{t-t_0}}{1-\alpha}\delta + \sum_{j=0}^{t-t_0-1} \alpha^j u_{t-j}$$

- Deterministické začiatočné podmienky: hodnota procesu v čase t_0 je $x_0 \rightarrow$ proces nie je stacionárny
- Náhodné začiatočné podmienky:
  - ◇ Proces je generovaný pre $t \in \mathbb{R} \rightarrow$ hodnota x_{t_0} je náhodná.
  - ◇ Ak $-1 < \alpha < 1$, tak pre $t_0 \rightarrow -\infty$ dostaneme

(2) $$x_t = \frac{1}{1-\alpha}\delta + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j u_{t-j}$$

  - ◇ Woldova reprezentácia: $\psi_j = \alpha^j$ pre $|\alpha| < 1 \rightarrow$ proces je slabo stacionárny.

AR(1) - momenty

- Pripomeňme si explicitné vyjadrenie procesu (2):

$$x_t = \frac{\delta}{1-\alpha} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j u_{t-j}$$

- Stredná hodnota:

$$\begin{aligned} E[x_t] &= E\left[\frac{\delta}{1-\alpha} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j u_{t-j}\right] \\ &= \frac{\delta}{1-\alpha} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j E[u_{t-j}] = \frac{\delta}{1-\alpha} \end{aligned}$$

  - ◇ $E[x_t] = 0$ práve vtedy, keď $\delta = 0$
  - ◇ vo všeobecnosti $E[x_t] \neq \delta$, ale majú rovnaké znamienko (lebo $|\alpha| < 1$)

AR(1) - momenty

- Variancia:

$$\begin{aligned} Var[x_t] &= Var\left[\frac{\delta}{1-\alpha} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j u_{t-j}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} Var[\alpha^j u_{t-j}] = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2j} Var[u_{t-j}] \\ &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2j} = \sigma^2 \frac{1}{1-\alpha^2} \end{aligned}$$

kde

- ◇ sme využili, že disperzia súčtu nekorelovaných premenných je súčet disperzií
- ◇ σ^2 je variancia bieleho šumu $\{u_j\}$

AR(1) - momenty

- Autokovariancie (využijeme, že $Cov[u_k, u_l] = \sigma^2$ pre $k = l$ a $Cov[u_k, u_l] = 0$ pre $k \neq l$):

$$\begin{aligned} Cov[x_t, x_{t-s}] &= E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i u_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j u_{t-s-j}\right)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{i+j} E[u_{t-i} u_{t-s-j}] \\ &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{s+2j} = \alpha^s \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} \end{aligned}$$

- Autokorelácie :

$$Cor[x_t, x_{t-s}] = \frac{Cor[x_t, x_{t-s}]}{Var[x_t] Var[x_{t-s}]} = \alpha^s$$

Príklad - simulované dáta

- AR(1) proces

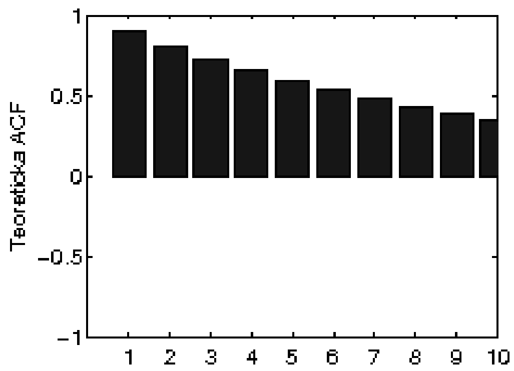
$$x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t,$$

  kde biely šum u_t má normálne rozdelenie, $\delta = 0$, $\sigma^2 = 1$

- Postupne zoberieme $\alpha = \{0.9, 0.6, -0.9\}$
- Zobrazíme:
  - ◇ teoretickú autokorelačnú funkciu
  - ◇ realizáciu procesu
  - ◇ výberovú autokorelačnú funkciu odhadnutú z dát

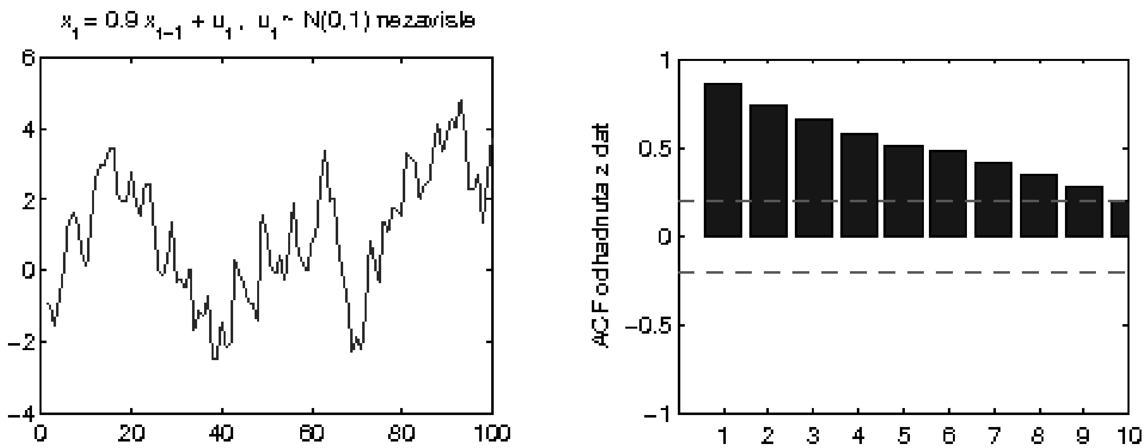
Príklad - simulované dáta, $\alpha = 0.9$

- Teoretická autokorelačná funkcia:



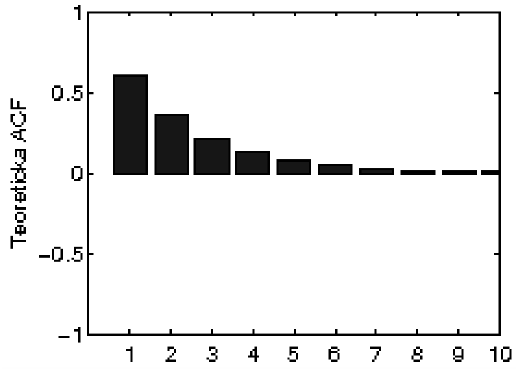
Kontrolná otázka: Čomu sa rovnajú jej hodnoty?

- Vygenerovaný proces a jeho výberová ACF:



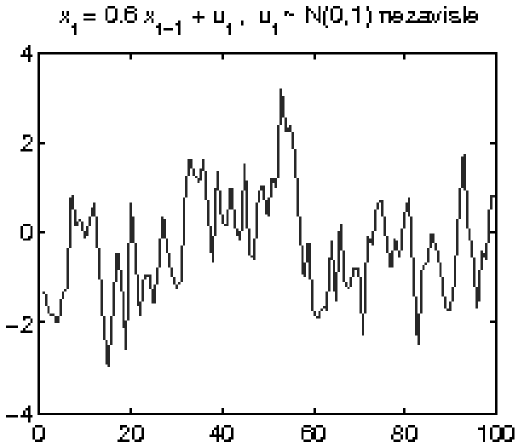
Príklad - simulované dáta, $\alpha = 0.6$

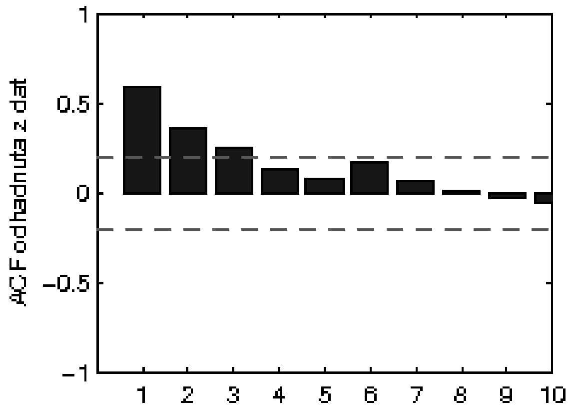
- Teoretická autokorelačná funkcia:



Kontrolná otázka: Čomu sa rovnajú jej hodnoty?

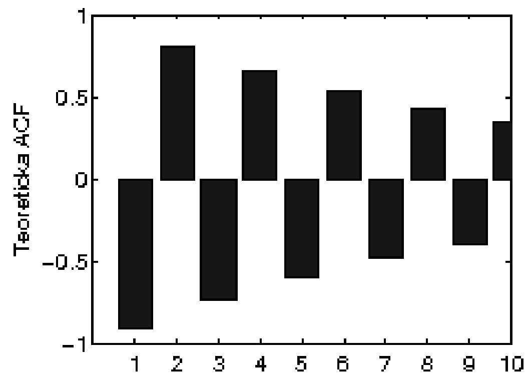
- Vygenerovaný proces a jeho výberová ACF:





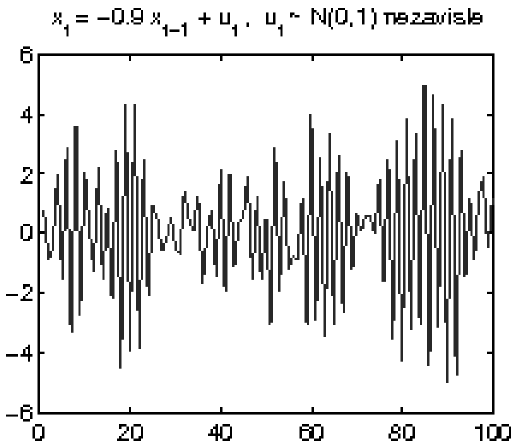
Príklad - simulované dáta, $\alpha = -0.9$

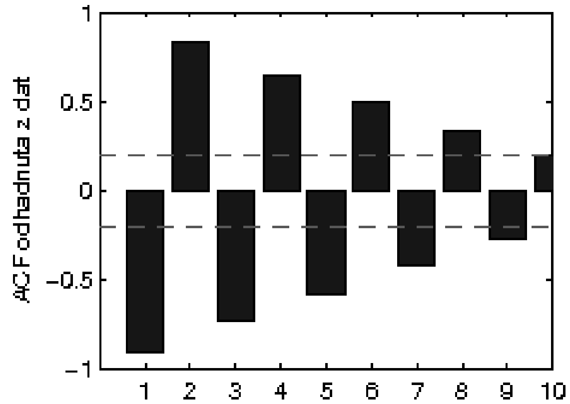
- Teoretická autokorelačná funkcia:



Kontrolná otázka: Čomu sa rovnajú jej hodnoty?

- Vygenerovaný proces a jeho výberová ACF:

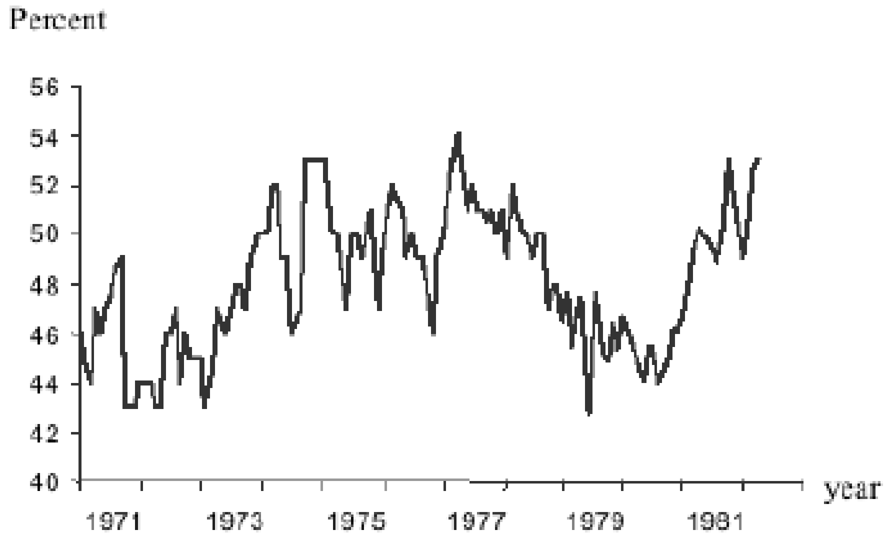




Príklad - reálne dáta

- G. Kirchgässner: **Causality Testing of the Popularity Function: An Empirical Investigation for the Federal Republic of Germany, 1971-1982**, Public Choice 45 (1985), p. 155-173.
- [Kirchgässner, Wolters], example 2.2

- Nemecko, január 1971 - apríl 1982
- CDU_t = volebné preferencie CDU/CSU



a) Popularity of the CDU/CSU, 1971 – 1982

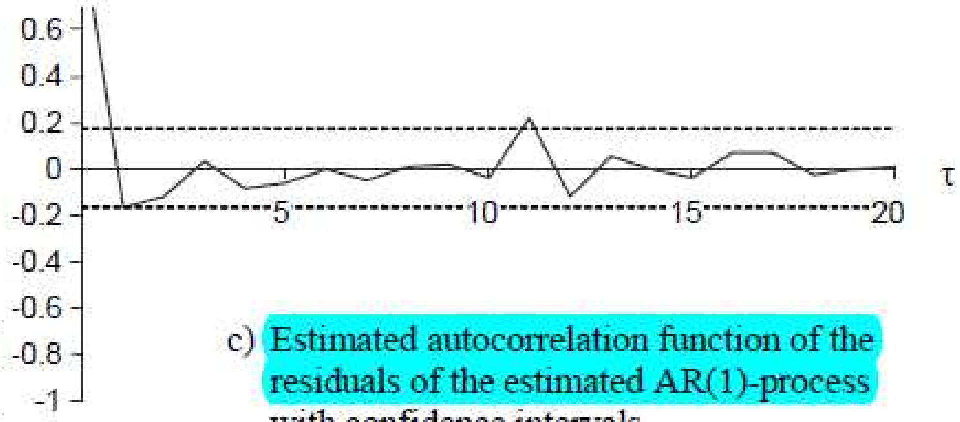
Príklad - reálne dáta

- Odhadnutý AR(1) model:

$$CDU_t = \underset{(3.43)}{8.053} + \underset{(17.10)}{0.834}\, CDU_{t-1} + \hat{u}_t.$$

$$\bar{R}^2 = 0.683, \quad SE = 1.586, \quad Q(11) = 12.516 \; (p = 0.326).$$

The estimated t values are given in parentheses, SE denotes the standard error of the residuals. The autocorrelogram, which is also given in *Figure 2.4*, does not indicate any higher-order process. Moreover, given the high p-value, the Ljung-Box Q statistic with 12 correlation coefficients (i.e. with 11 degrees of freedom) gives no reason to reject this model.



c) Estimated autocorrelation function of the residuals of the estimated AR(1)-process with confidence intervals

Príklad - reálne dáta

- Je odhadnutý model stacionárny? Z čoho to vyplýva?
- Rezíduá modelu by mali byť bielym šumom:
  - ◇ Na grafe sú pri autokoreláciách zostrojené intervaly. Na čo slúžia? Vypočítajte pomocou známych údajov ich hranice.
  - ◇ V texte sa spomínajú autokorelácie rezíduí a Ljung-Boxova Q štatistika - aké hypotézy sa testujú (a prečo), akým spôsobom a s akými závermi?
- Čomu sa rovná stredná hodnota premennej CDU_t?

Predikcie

- Proces je stacionárny $\rightarrow$ má konštantnú strednú hodnotu
- Má však zmysel počítať aj podmienenú strednú hodnotu
- V predchádzajúcom príklade:
  - Máme stacionárny proces ako model pre volebné preferencie
  - Našli sme nepodmienenú strednú hodnotu procesu - je konštantná
  - Podmienená stredná hodnota - napr.: *Aká je očakávaná hodnota preferencií nasledujúcom mesiaci, ak dnešné preferencie sú 40 percent? Čo ak sú dnešné preferencie 55 percent?* - odpovede budú rôzne

Predikcie v AR(1) modeli

- Intuitívne (presnejšie pri zložitejších modeloch, kde postup nebude zrejmý)
- Pre $x_t := CDU_t$ máme model

$$x_t = 8.053 + 0.834 x_{t-1} + u_t$$

- Biely šum u_t nahradíme jeho strednou hodnotou - nulou
- Za x_{t-1} dosadíme
  - skutočnú hodnotu x_{t-1}, ak ju máme k dispozícii
  - predikciu hodnoty x_{t-1}, ak sa ešte nerealizovala

Predikcie v AR(1) modeli

- Praktický výpočet:

	A	B
1	delta	8.053
2	alfa	0.834
3		
4	40	
5	=$B$1+$B$2*A4	
6		

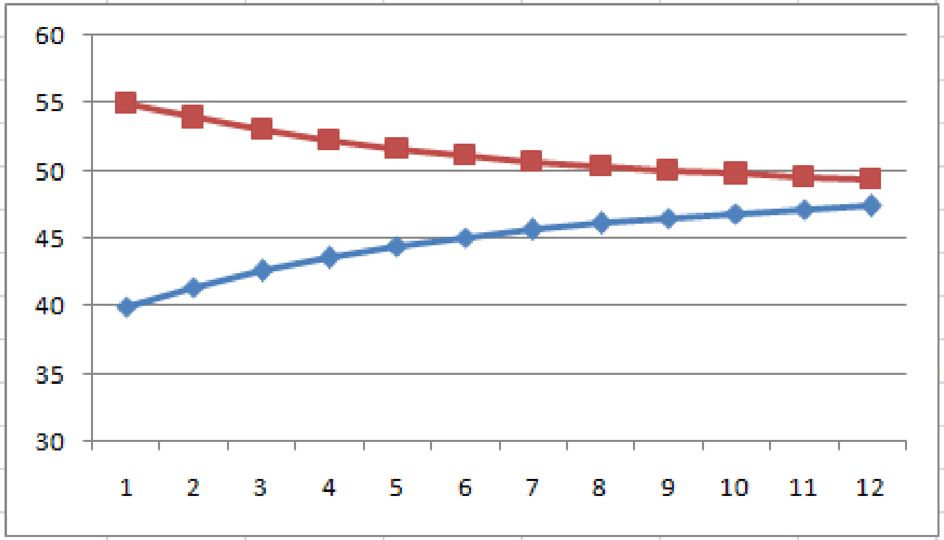
	A	B
1	delta	8.053
2	alfa	0.834
3		
4	40	
5	41.413	
6	=$B$1+$B$2*A5	
7		

	A	B
1	delta	8.053
2	alfa	0.834
3		
4	40	
5	41.413	
6	42.59144	
7	43.57426	
8	44.39394	
9	45.07754	
10	45.64767	
11	46.12316	
12	46.51971	
13	46.85044	
14	47.12627	
15	=$B$1+$B$2*A14	
16		

Predikcie v AR(1) modeli

- Predikcie pre dve rôzne začiatočné hodnoty:

	A	B
1	delta	8.053
2	alfa	0.834
3		
4	40	55
5	41.413	53.923
6	42.59144	53.02478
7	43.57426	52.27567
8	44.39394	51.65091
9	45.07754	51.12986
10	45.64767	50.6953
11	46.12316	50.33288
12	46.51971	50.03062
13	46.85044	49.77854
14	47.12627	49.5683



- K akej spoločnej hodnote tieto predikcie konvergujú?

II.

Autoregresný proces druhého rádu - AR(2)

Príklad modelovanie spreadu

Mills, Markellos: **The Econometric Modelling of Financial Time Series**. Cambridge University Press, 2008

- Štvrťročné dáta, 1952Q1 - 2005Q4
- Premenné:
  - krátkodobá úroková miera (3 mesiace)
  - dlhodobá úroková miera (20 rokov)
- Modelujeme spread - teda rozdiel dlhodobej a krátkodobej úrokovej miery
- AR(2) model vyšiel ako dobrý

AR(2) - definícia

- AR(2) proces:

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + u_t$$

- Aj bez u_t komplikovanejšie ako AR(1) - korene charakteristického polynómu
- Skúsime iný postup ako dosadzovanie
- Pomocou operátora posunu:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2) x_t &= \delta + u_t \\ \alpha(L) x_t &= \delta + u_t \end{aligned}$$

- Woldova reprezentácia a stacionarita:

$$x_t = \alpha^{-1}(L)\delta + \alpha^{-1}(L) u_t$$

$\rightarrow$ potrebujeme inverzný operátor $\alpha^{-1}(L)$

AR(2) - definícia

- Inverzný operátor $\alpha^{-1}(L)$; nájdeme metódou neurčitých koeficientov:

  $$\alpha^{-1}(L) = \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots$$

  pričom

  $$(3) \quad 1 = (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots)$$

- Porovnáme koeficienty pri L^j na oboch stranách (3):

  $$\psi_j - \alpha_1 \psi_{j-1} - \alpha_2 \psi_{j-2} = 0,$$

  $$\psi_0 = 1, \ \psi_1 = \alpha_1$$

AR(2) - stacionarita

- Podmienka stacionarity: Kvôli splneniu podmienky $\sum \psi_j^2 < \infty$ musia byť korene charakteristickej rovnice
$$\lambda^2 - \alpha_1 \lambda - \alpha_2 = 0$$
v absolútnej hodnote menšie ako 1
- Inak povedané: korene rovnice
$$\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 = 0$$
musia byť v absolútnej hodnote väčšie ako 1, t. j. mimo jednotkového kruhu
- To isté vyšlo predtým pre AR(1): koreň $\alpha(L) = 0$ mimo jednotkového kruhu

AR(2) - momenty

- Slabo stacionárny AR(2) proces:

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + u_t$$

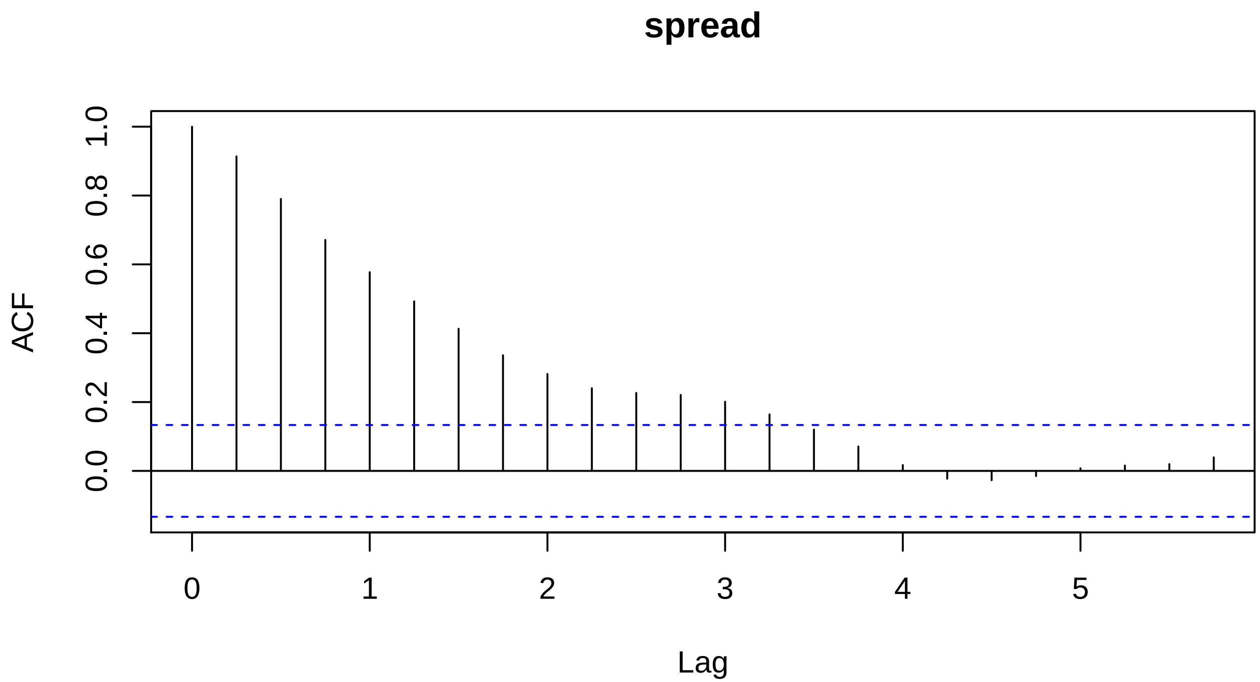
- Stredná hodnota:
  - označme $\mu = E[x_i]$; potom

$$\begin{aligned} \mu &= \delta + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu, \\ \mu &= \frac{\delta}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} \end{aligned}$$

  - Podobne ako pre AR(1): stredná hodnota sa nerovná parametru δ (okrem prípadu $\delta = 0$), ale majú rovnaké znamienko

AR(2) - momenty

- Autokovariancie AR(2) procesu - motivácia :
  - pre pripomeniutie - výberová ACF pre spread:



AR(2) - momenty

- Autokovariancie AR(2) procesu - motivácia :
  - výberová ACF pre spread sa podobala na AR(1) proces
  - napriek tomu AR(1) proces nebol dobrým modelom, ale AR(2) áno
  - aký priebeh má ACF pre AR(2) proces?
  - môže mať podobný priebeh ako AR(1)? (zdá sa že áno)
  - môže mať aj "úplne iný" priebeh? (t.j. "toto určite nie je AR(1), ale AR(2) to môže byť")

AR(2) - momenty

- Autokovariancie - výpočet : znovu môžeme predpokladať nulovú strednú hodnotu, t. j.

$$\begin{aligned} x_t &= \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + u_t \quad \Big/ \quad \times x_{t-s},\ E[.] \\ E[x_{t-s}x_t] &= \alpha_1 E[x_{t-s}x_{t-1}] + \alpha_2 E[x_{t-s}x_{t-2}] + E[x_{t-s}u_t] \end{aligned}$$

- Pre $s = 0, 1, 2$ dostaneme:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \alpha_1\gamma(1) + \alpha_2\gamma(2) + \sigma^2 \\ \gamma(1) &= \alpha_1\gamma(0) + \alpha_2\gamma(1) \\ \gamma(2) &= \alpha_1\gamma(1) + \alpha_2\gamma(0) \end{aligned}$$

  - sústava rovníc $\rightarrow \gamma(0) = Var[x_t]$, $\gamma(1)$, $\gamma(2)$

- Pre $s \geq 2$ - diferenčná rovnica:

  (4) $$\gamma(s) - \alpha_1\gamma(s-1) - \alpha_2\gamma(s-2) = 0,$$

  začiatočné podmienky z predchádzajúceho bodu

AR(2) - momenty

- Autokorelácie: diferenčnú rovnicu (4) a jej začiatočné podmienky vydelíme $\gamma(0)$:

$$\rho(s) - \alpha_1 \rho(s-1) - \alpha_2 \rho(s-2) = 0$$

$$\rho(0) = 1, \rho(1) = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}$$

AR(2) - ACF - príklad 1

- Spread modelovaný AR(2) procesom:

```
Coefficients:
         ar1      ar2   xmean
      1.1809  -0.2886  1.0449
s.e.  0.0650   0.0651  0.4212
```

- Diferenčná rovnica pre autokorelácie:

$$\rho(s) - 1.1809\rho(s-1) + 0.2886\rho(s-2) = 0$$

začiatočné podmienky: $\rho(0) = 1,\ \rho(1) = \frac{1.1809}{1+0.2886}$

AR(2) - priebeh ACF

- ACF je riešením diferenčnej rovnice

$$\rho(s) - \alpha_1 \rho(s-1) - \alpha_2 \rho(s-2) = 0$$

$\Rightarrow$ priebeh závisí od koreňov charakteristickej rovnice

$$\lambda^2 - \alpha_1 \lambda - \alpha_2 = 0$$

- λ_1, λ_2 - reálne (a rôzne): ACF má tvar

$$\rho(s) = c_1 \lambda_1^s + c_2 \lambda_2^s$$

Zo stacionarity: $|\lambda_{1,2}| < 1$

- λ_1, λ_2 - komplexné: ACF je tlmená kombinácia sínusu a kosínusu

$$\rho(s) = r^s (c_1 \cos(ks) + c_2 \sin(ks))$$

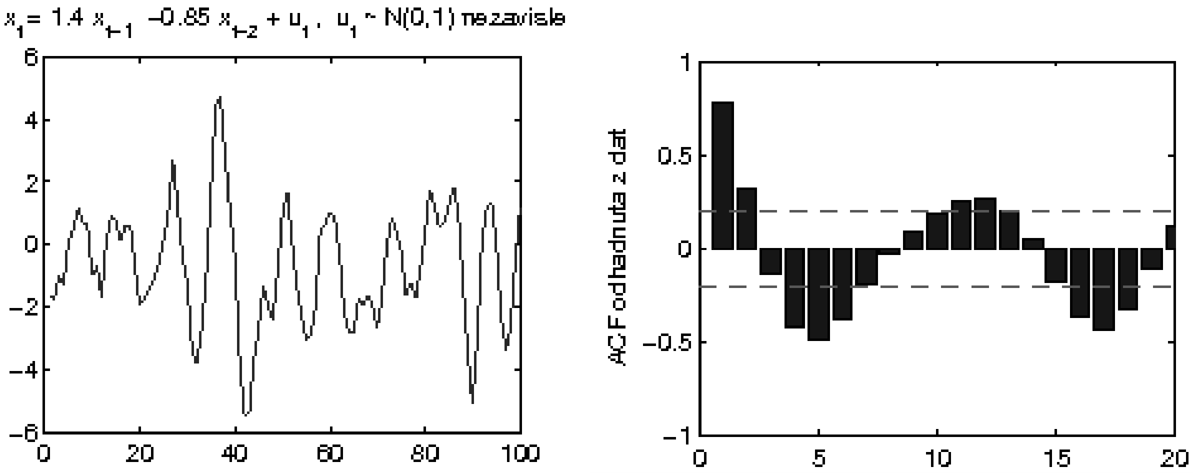
Zo stacionarity: $r < 1$

AR(2) - ACF - príklad

- Proces: $x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$
  - korelácie spĺňajú diferenčnú rovnicu
    $$\rho(t) - 1.4\rho(t-1) + 0.85\rho(t-2) = 0$$
  - jej všeobecné riešenie
    $$\rho(t) = 0.922^t(c_1 \cos(0.709t) + c_2 \sin(0.709t))$$
  - c_1, c_2 zo začiatočných podmienok $\rho(0), \rho(1)$
  - $\cos(kt), \sin(kt)$ $\rightarrow$ perióda $\frac{2\pi}{k}$
    v našom prípade $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.709} = 8.862 \approx 9$
    $\Rightarrow$ v dátach generovaných týmto procesom sa dá očakávať takáto perióda

AR(2) - ACF - príklad

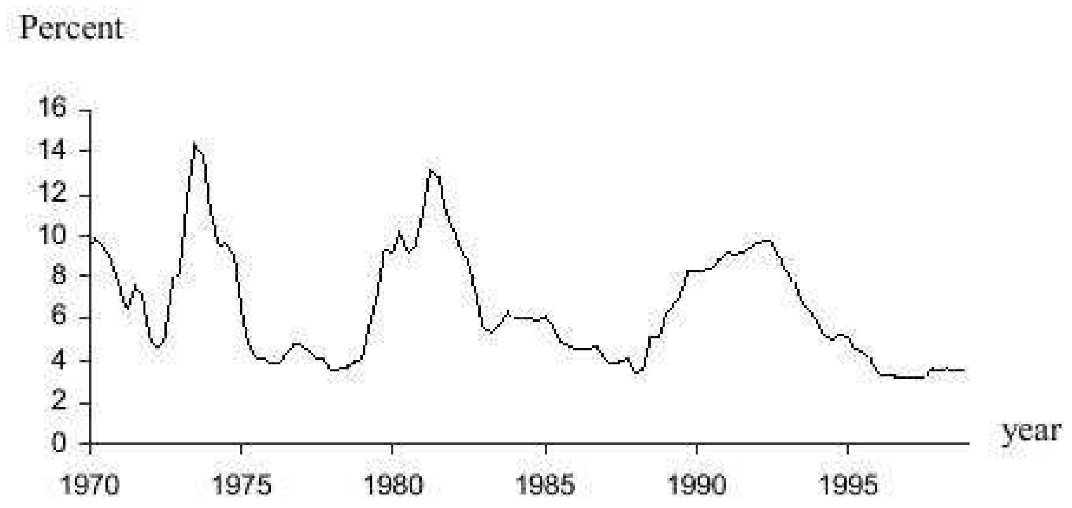
- Na obrázku:
  - realizácia procesu $x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$
  - výberová ACF



AR(2) - reálne dáta

[Kirchgässner, Wolters], example 2.6

- 3-mesačná úroková miera, Nemecko, 1970q1-1998q4

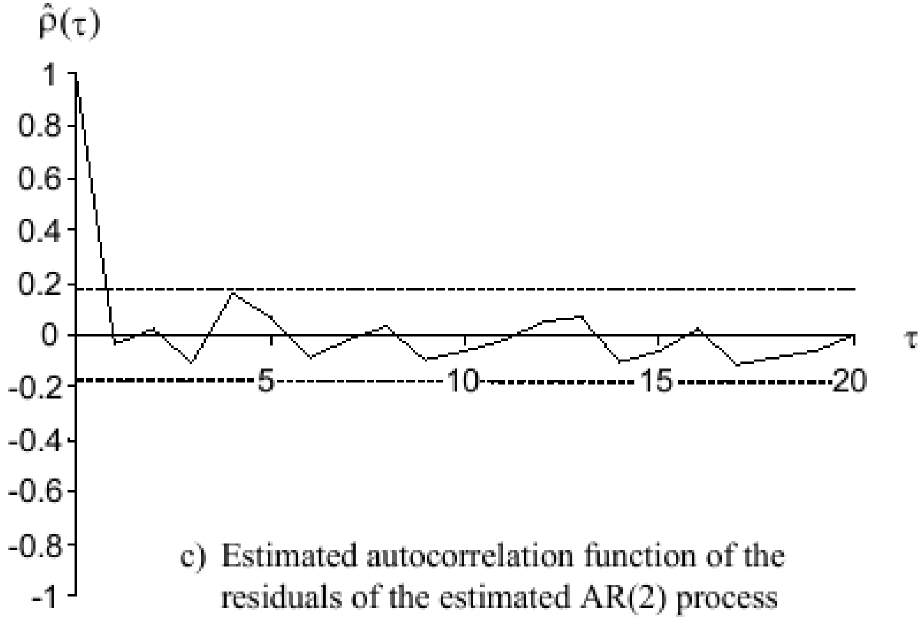


AR(2) - reálne dáta

- Odhadnutý AR(2) model:

$$
\begin{array}{cccccccc}
GSR_t & = & 0.577 & + & 1.407\, GSR_{t-1} & - & 0.498\, GSR_{t-2} & + \ \hat{u}_t, \\
 & & (2.82) & & (17.49) & & (-6.16) &
\end{array}
$$

$$
\bar{R}^2 = 0.910, \quad SE = 0.812, \quad Q(6) = 6.431 \ (p = 0.377)
$$



c) Estimated autocorrelation function of the residuals of the estimated AR(2) process with confidence intervals

AR(2) - reálne dáta

- Otázky k odhadnutému modelu:
  - ◇ Je stacionárny?
  - ◇ Analyzujte rezíduá - autokorelogram, Q-štatistika (aký je počet stupňov vol'nosti?).
  - ◇ Aká je stredná hodnota odhadnutého procesu?
  - ◇ Aký je priebeh jeho autokorelačnej funkcie?
  - ◇ Vysvetlite nasledovné tvrdenie z knihy (str.49) a vypočítajte uvedené hodnoty: *"The two roots of the process are 0.70 +/- 0.06i, i.e. they indicate cycles ... the frequency* $f = 0.079$ *corresponds to a period of 79.7 quarters and therefore of nearly 20 years."*

III.

Autoregresný proces p-teho rádu - AR(p)

AR(p) - úvod

- Videli sme AR(1) a AR(2) proces, ich ACF môže byť podobná - ako ich rozlíšiť?
- Analogicky sa dá definovať AR(p) proces - ako vyzerá jeho ACF?
- Ako určiť správny rád?

- AR(p) proces - ukážeme:
  - stacionarita: korene mimo jednotkového kruhu
  - ACF: daná diferenčnou rovnicou p-teho rádu
  - prvých p autokorelácií (začiatočné podm. diferenčnej rovnice): zo sústavy lineárnych rovníc; užitočný postup, ešte ho budeme potrebovať

AR(p) proces - stacionarita

- AR(p) proces:

  (5) $x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + u_t,$

  t. j. $\alpha(L) x_t = \delta + u_t$, kde $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \ldots - \alpha_p L^p$

- Woldova reprezentácia a stacionarita:

  $$x_t = \alpha(L)^{-1}(\delta + u_t),$$

  inverzný operátor $\alpha(L)^{-1}$ hľadáme v tvare

  $$\alpha(L)^{-1} = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots$$

- Pre koeficienty ψ_j dostaneme diferenčnú rovnicu

  $$\psi_k - \alpha_1 \psi_{k-1} - \ldots - \alpha_p \psi_{k-p} = 0$$

  $\Rightarrow$ kvôli konv. $\sum \psi_j^2$ musia byť korene charakt. rovnice $\lambda^k - \alpha_1 \lambda^{k-1} - \ldots - \alpha_p = 0$ vnútri jednotkového kruhu, t. j. korene $\alpha(L) = 0$ musia byť mimo jednotkového kruhu

AR(p) proces - momenty

- Stredná hodnota:
  označíme $\mu = E[x_t]$ a spravíme strednú hodnotu z ľavej aj pravej strany (5):

$$\mu = \delta + \alpha_1 \mu + \ldots + \alpha_p \mu \ \Rightarrow \ \mu = \frac{\delta}{1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_p}$$

  aj teraz: stredná hodnota má rovnaké znamienko ako parameter δ

- Variancia, autokovariancie - nech $\delta = 0$

$$\begin{aligned} x_t &= \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + u_t \Big/ \quad \times x_{t-s}, \ E[.] \\ \gamma(s) &= \alpha_1 \gamma(s-1) + \ldots \alpha_p \gamma(s-p) + E[u_t x_{t-s}] \end{aligned}$$

AR(p) proces - momenty

- Variancia, autokovariancie - pokračovanie:
  - ◇ $s = 0, 1, \ldots, p \to$ sústava $p + 1$ rovníc s neznámymi $\gamma(0), \gamma(1), \ldots, \gamma(p)$:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \alpha_1\gamma(1) + \alpha_2\gamma(2) + \ldots + \alpha_p\gamma(p) + \sigma^2 \\
\gamma(1) &= \alpha_1\gamma(0) + \alpha_2\gamma(1) + \ldots + \alpha_p\gamma(p-1) \\
&\ldots \\
\gamma(p) &= \alpha_1\gamma(p-1) + \alpha_2\gamma(p-2) + \ldots + \alpha_p\gamma(0)
\end{aligned} \tag{6}$$

  - ◇ ostatné autokovariancie z diferenčnej rovnice

$$\gamma(t) - \alpha_1\gamma(t-1) - \ldots - \alpha_p\gamma(t-p) = 0 \tag{7}$$

AR(p) proces - momenty

- ACF :
  - diferenčná rovnica pre autokorelácie - rovnicu (7) vydelíme disperziou $\gamma(0)$:

$$\rho(t) - \alpha_1\rho(t-1) - \ldots - \alpha_p\rho(t-p) = 0$$

  - začiatočné podmienky - posledných p rovníc zo sústavy (6) vydelíme $\gamma(0)$:

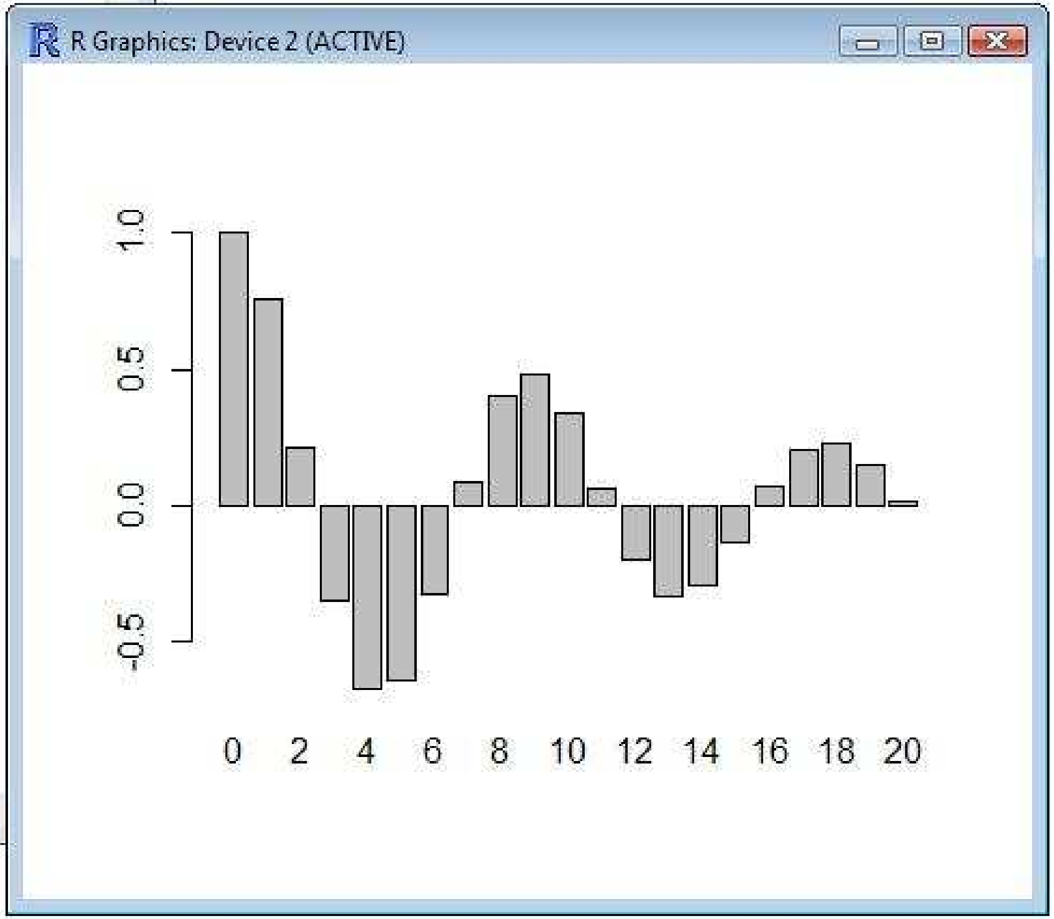
$$\begin{aligned} \rho(1) &= \alpha_1 + \alpha_2\rho(1) + \ldots + \alpha_p\rho(p-1) \\ \rho(2) &= \alpha_1\rho(1) + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p\rho(p-2) \\ &\ldots \\ \rho(p) &= \alpha_1\rho(p-1) + \alpha_2\rho(p-2) + \ldots + \alpha_p \end{aligned} \quad (8)$$

  - nazývajú sa Yule-Wolkerove rovnice

AR(p) proces - ACF - príklad 1

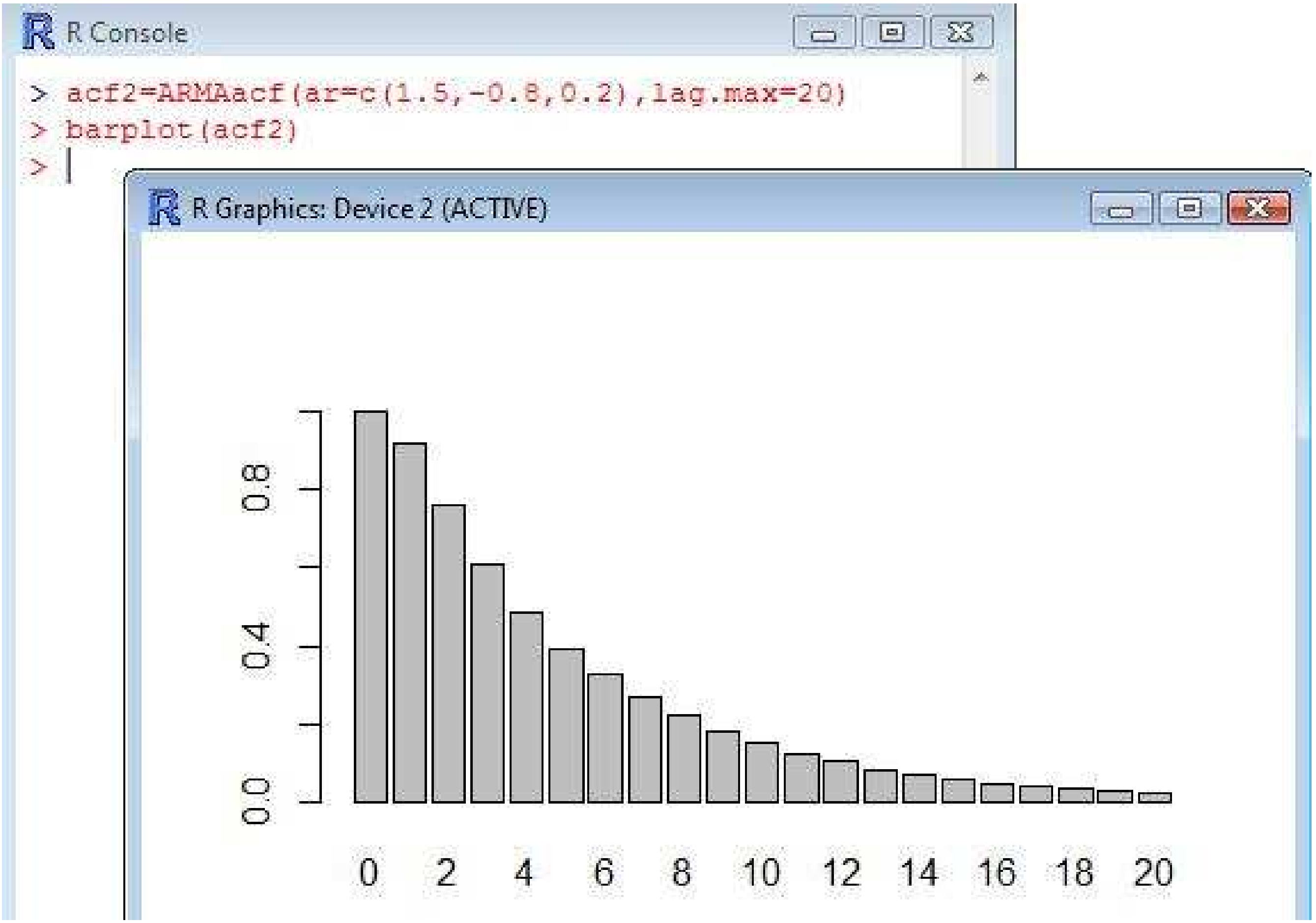
R Console

```
> acf1=ARMAacf(ar=c(1.4,-0.85),lag.max=20)
> acf1
          0           1           2
 1.00000000  0.75675676  0.20945946
          3           4           5
-0.35000000 -0.66804054 -0.63775676
          6           7           8
-0.32502500  0.08705824  0.39815279
          9          10          11
 0.48341440  0.33835029  0.06278816
         12          13          14
-0.19969432 -0.33294198 -0.29637861
         15          16          17
-0.13192936  0.06722071  0.20624895
         18          19          20
 0.23161093  0.14894369  0.01165188
> barplot(acf1)
> |
```



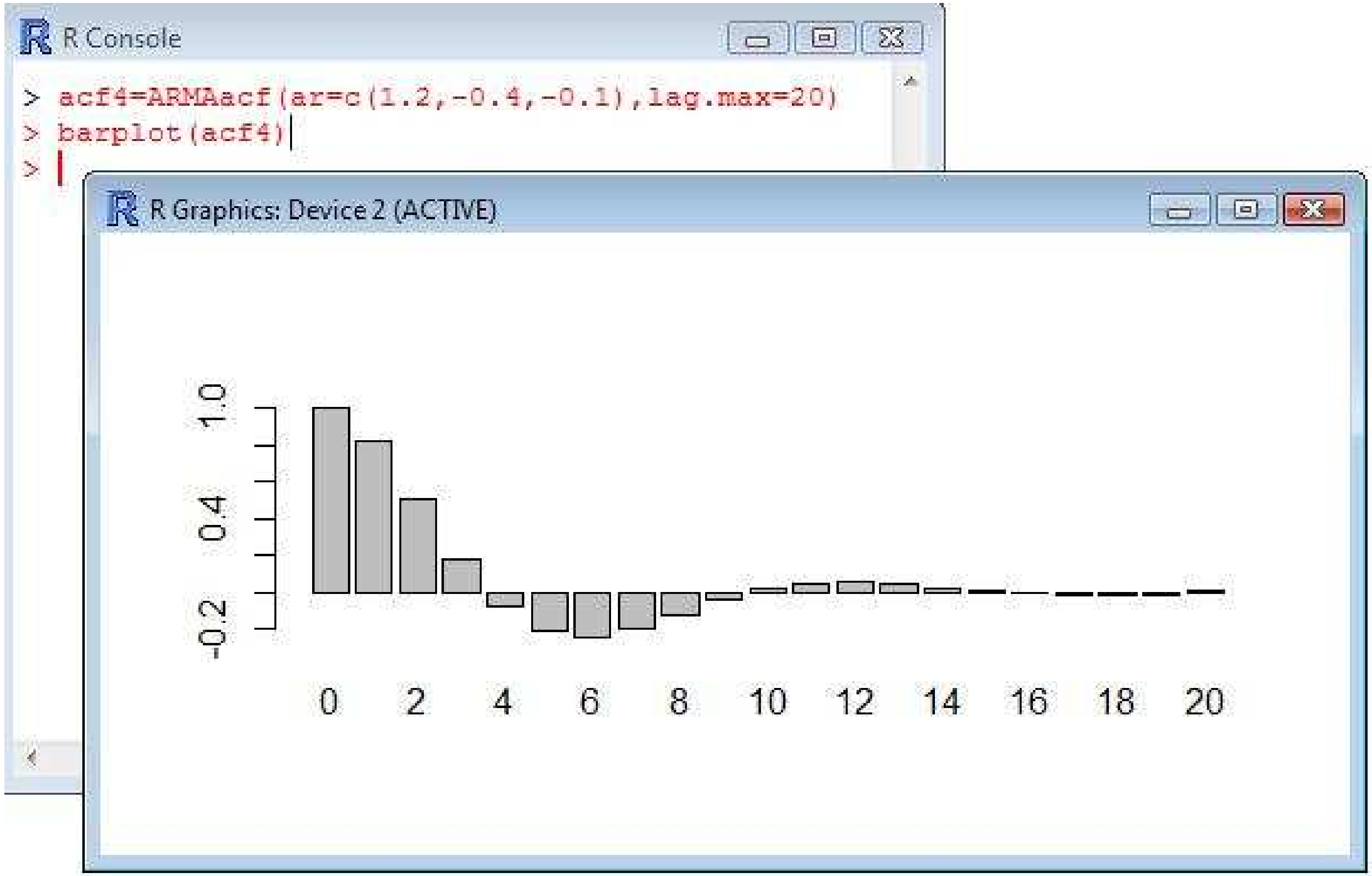
AR(p) proces - ACF - príklad 2

- AR(3) proces $x_t = 1.5\, x_{t-1} - 0.8\, x_{t-2} + 0.2\, x_{t-3} + u_t$

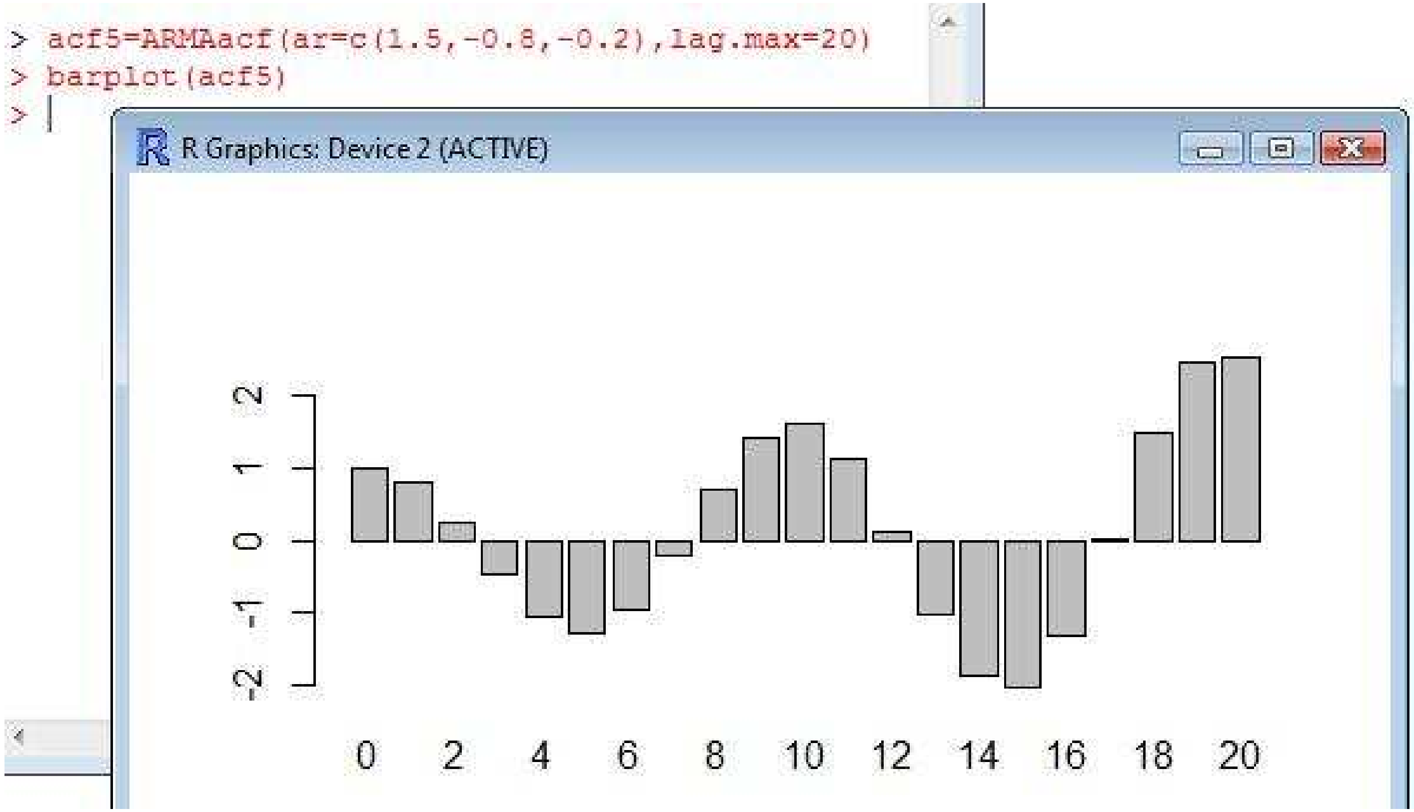


AR(p) proces - ACF - príklad 3

- AR(3) proces $x_t = 1.2\, x_{t-1} - 0.4\, x_{t-2} - 0.1\, x_{t-3} + u_t$
- Periodický charakter - dajú sa očakávat' komplexné korene.

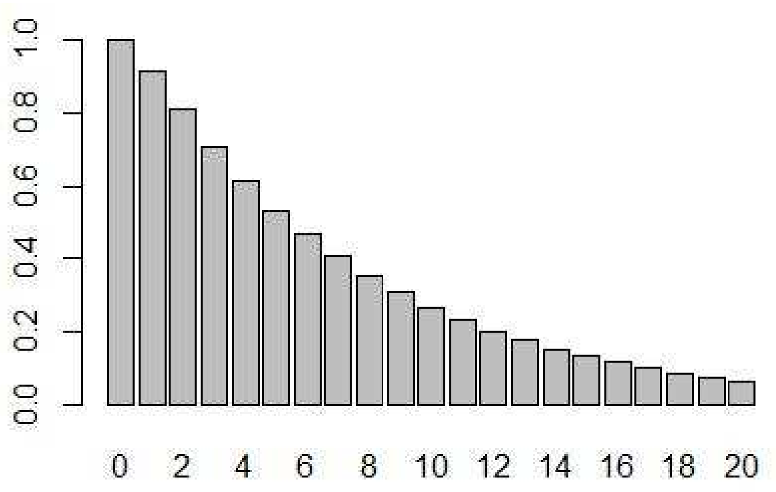


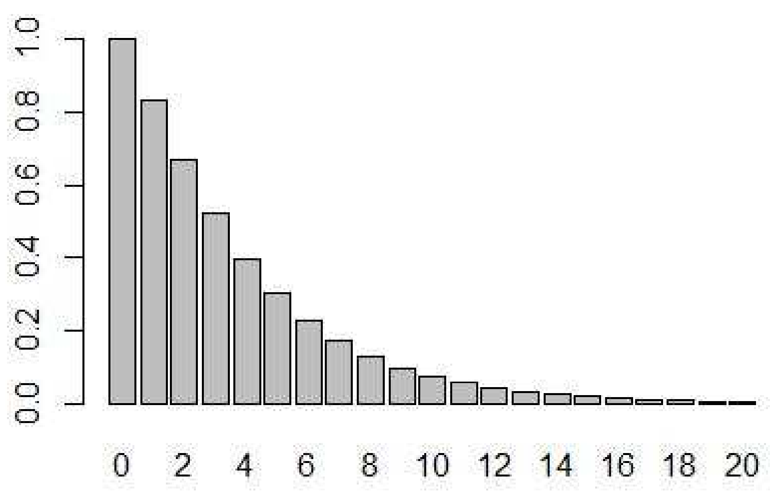
AR(p) proces - ACF - príklad 4



- Ako je to možné?
  - absolútna hodnota ACF väčšia ako 1
  - maximálna absolútna hodnota sa ešte zväčšuje

AR(p) proces - ACF - príklad 5





- ACF pre dva procesy: jeden je AR(2) a druhý AR(3)
- Nevieme ich takto na prvý pohl'ad rozlíšit'
- Pri práci s reálnymi dátami sa navyše pridáva náhodnost', nemáme presnú ACF, ale odhadujeme ju

IV.

Parciálna autokorelačná funkcia - určovanie rádu AR procesu

PACF - motivácia

- Uvažujme nejaký náhodný proces x_t s nulovou strednou hodnotou a modelujme jeho hodnotu pomocou prechádzajúcich k hodnôt:

$$x_t = \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots + \beta_k x_{t-k} + u_t$$

- Označme koeficienty Φ_{ki}, kde k je počet použitých starších hodnôt procesu x a i je koeficient pri x_{t-i}
- Teda:

$$\begin{aligned}
x_t &= \Phi_{11} x_{t-1} + u_t \\
x_t &= \Phi_{21} x_{t-1} + \Phi_{22} x_{t-2} + u_t \\
x_t &= \Phi_{31} x_{t-1} + \Phi_{32} x_{t-2} + \Phi_{33} x_{t-3} + u_t \\
& \ldots \\
x_t &= \Phi_{k1} x_{t-1} + \Phi_{k2} x_{t-2} + \Phi_{k3} x_{t-3} + \ldots + \Phi_{kk} x_{t-k} + u_t
\end{aligned}$$

- Ak x je AR(p) proces, tak $\Phi_{kk} = 0$ pre $k > p$.

PACF - definícia a výpočet

- Koeficient Φ_{kk} sa nazýva parciálna autokorelácia rádu k
- Postupnosť týchto koeficientov vytvára parciálnu autokorelačnú funkciu (PACF)
- Výpočet: vyjdeme zo vzťahu

  $$x_t = \Phi_{k1} x_{t-1} + \Phi_{k2} x_{t-2} + \Phi_{k3} x_{t-3} + \ldots + \Phi_{kk} x_{t-k} + u_t$$

  a rovnako ako pri odvodení Yule-Wolkerovych rovníc dostaneme

$$\begin{aligned}
\rho(1) &= \Phi_{k1} + \Phi_{k2}\,\rho(1) + \ldots + \Phi_{kk}\,\rho(k-1) \\
\rho(2) &= \Phi_{k1}\,\rho(1) + \Phi_{k2} + \ldots + \Phi_{kk}\,\rho(k-2) \\
&\ldots \\
\rho(k) &= \Phi_{k1}\,\rho(k-1) + \Phi_{k2}\,\rho(k-2) + \ldots + \Phi_{kk}
\end{aligned}$$

PACF - definícia a výpočet

- Maticový zápis:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{k1} \\ \Phi k2 \\ \dots \\ \Phi kk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \dots \\ \rho(k) \end{bmatrix}$$

- Zaujíma nás iba Φ_{kk}, použijeme Cramerovo pravidlo:

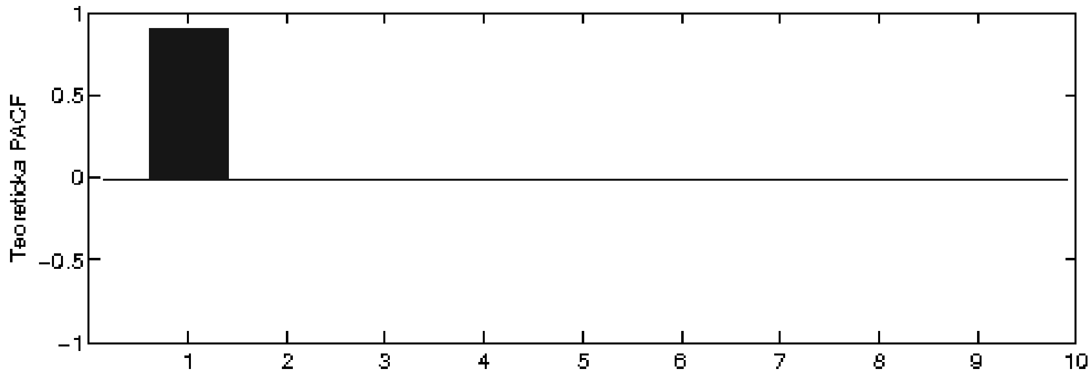
$$\Phi_{kk} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ & \dots & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & \dots & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}} \tag{9}$$

PACF - príklad: AR(1) proces

- Postupne počítame:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{11} &= \rho(1) \\
\Phi_{22} &= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2} = 0 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

- Z def. PACF vyplýva, že aj nasledujúce $\Phi_{kk} = 0$
- Pre $\alpha = 0.9$:

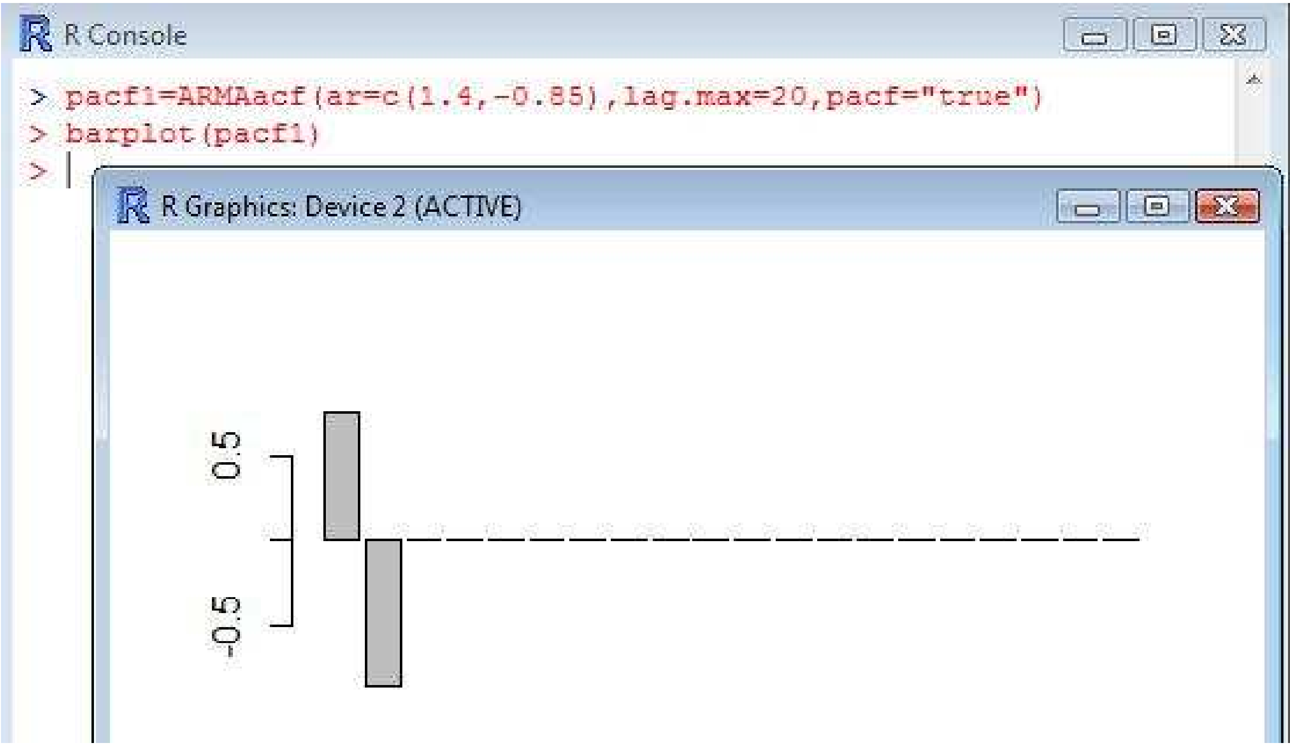


PACF - príklad 1

- Výpočet PACF v softvéri R - znovu funkcia **ARMAacf**
- Pre proces $x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$ sme počítali ACF, teraz PACF:

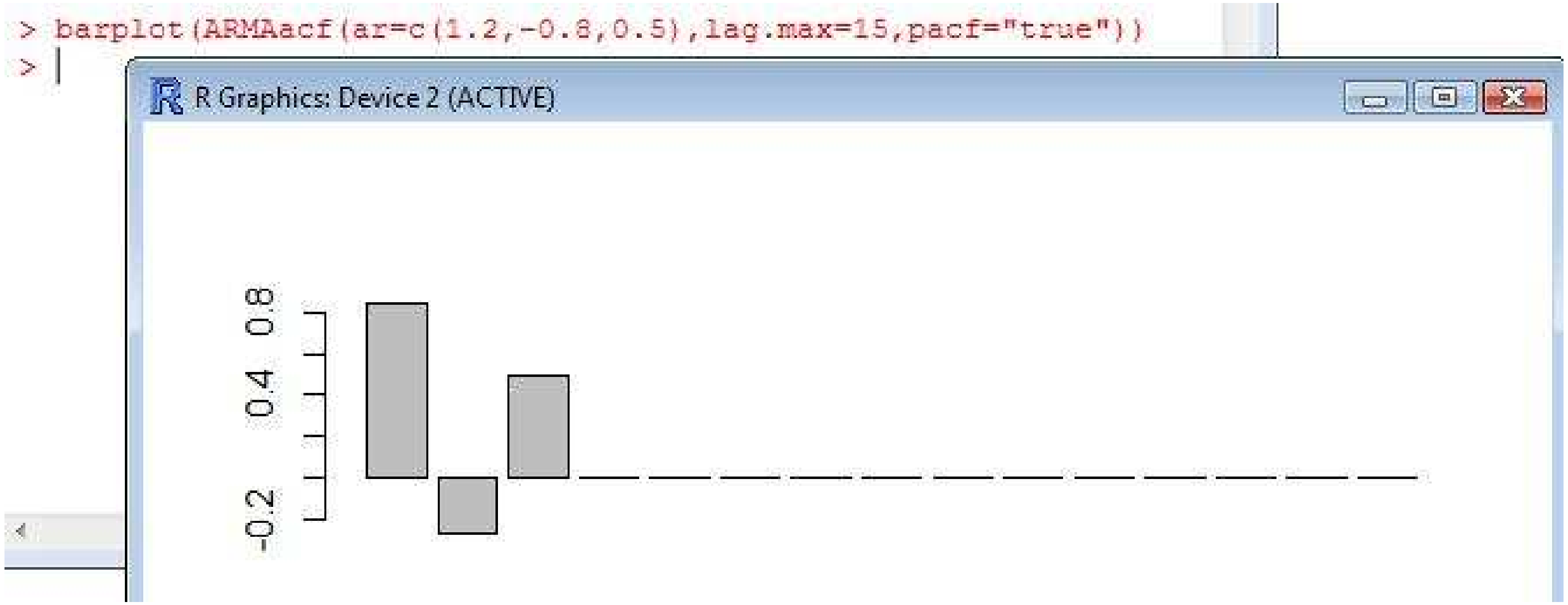
ARMAacf(ar=c(1.4,-0.85), lag.max=20, pacf="true")

PACF - príklad 1



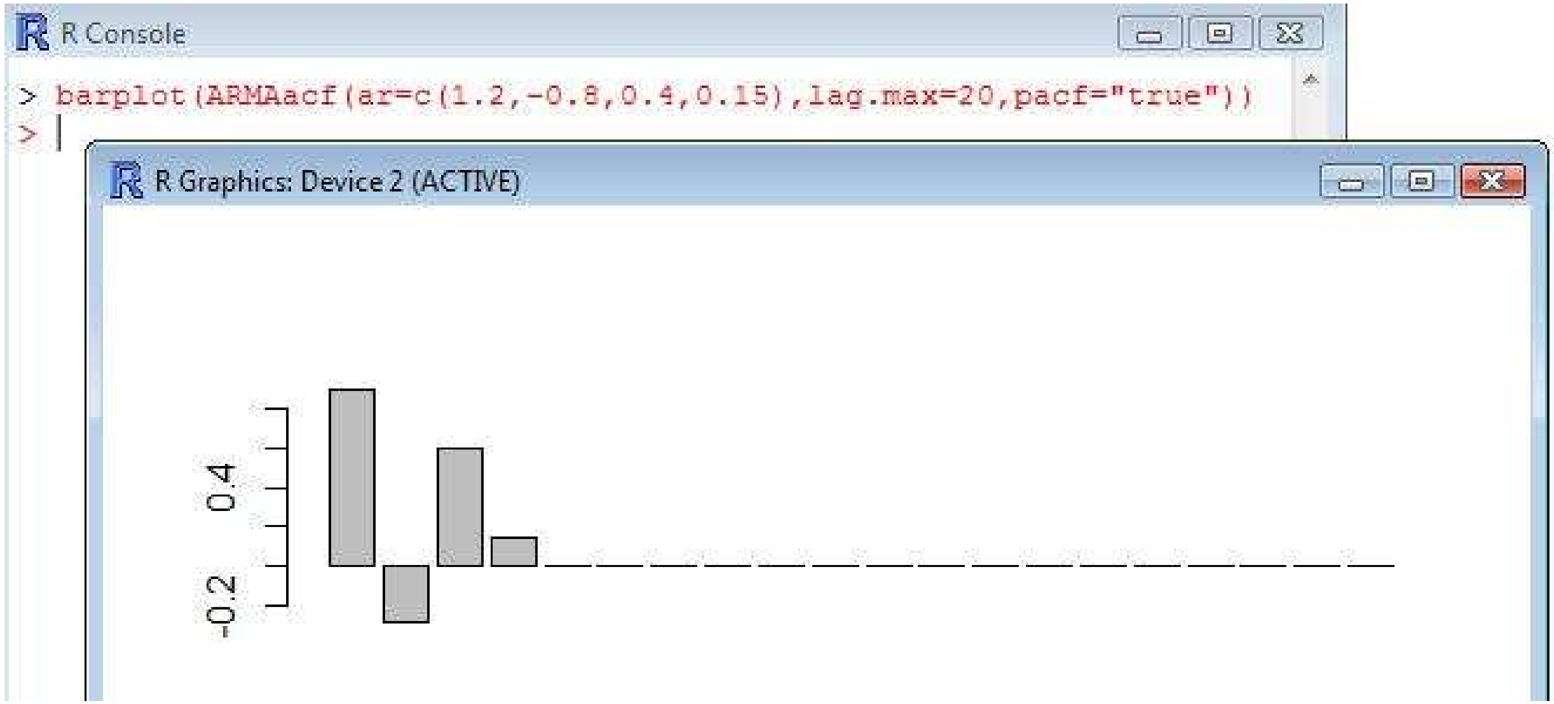
PACF - príklad 2

- AR(3) proces $x_t = 1.2\,x_{t-1} - 0.8\,x_{t-2} + 0.5\,x_{t-3} + u_t$



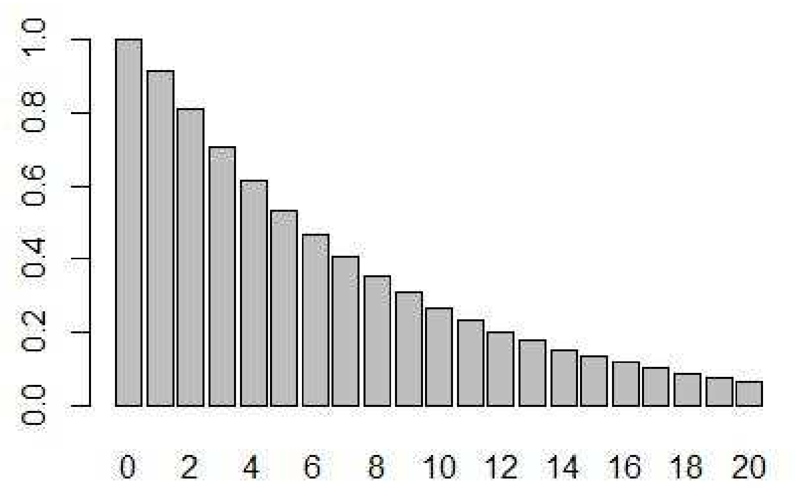
PACF - príklad 3

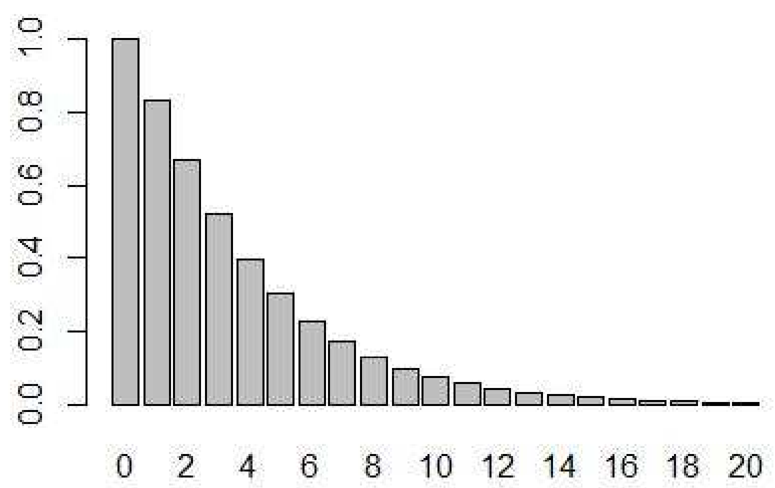
- AR(4) proces
  $x_t = 1.2\, x_{t-1} - 0.8\, x_{t-2} + 0.4\, x_{t-3} + 0.15\, x_{t-4} + u_t$



PACF - príklad 4

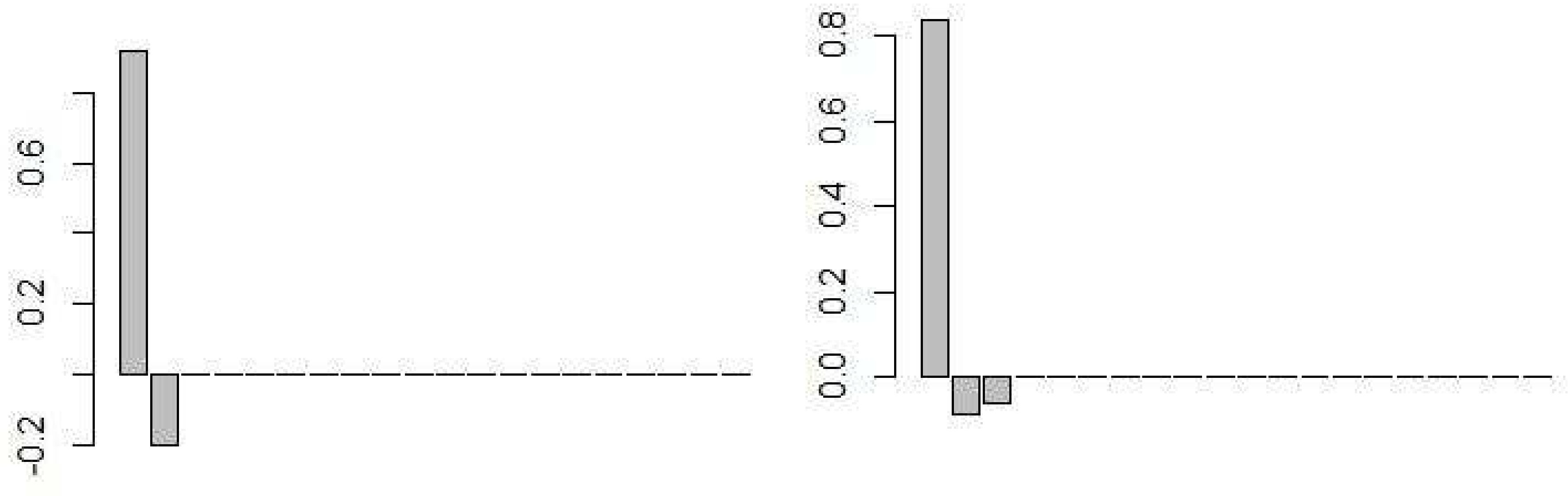
- Pripomeňme si:
  ACF pre dva procesy, jeden je AR(2) a druhý AR(3) , nevieme ich takto rozlíšiť





PACF - príklad 4

- PACF týchto procesov:



- Tu je jasné, že vľavo je AR(2) a vpravo je AR(3) proces

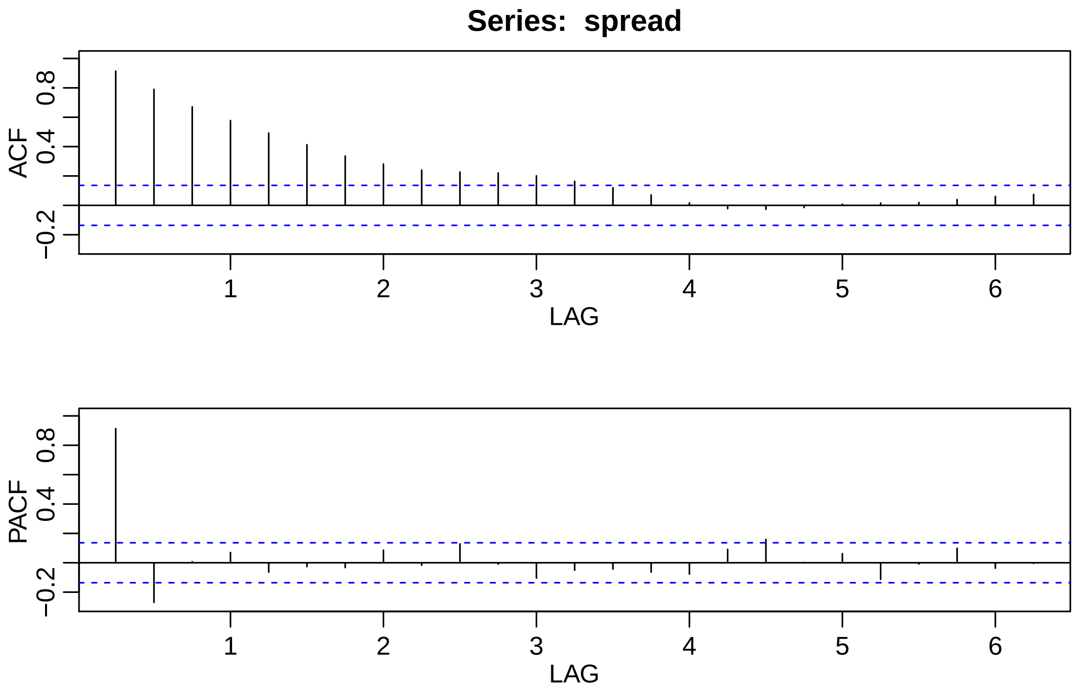
PACF - odhadovanie z dát

- Za teoretické autokorelácie vo vzťahu (15) dosadíme ich konzistentné odhady $\rightarrow$ dostaneme konzistentný odhad $\hat{\Phi}_{kk}$
- Pre AR(p) proces je $\Phi_{kk} = 0$ pre $k > p$, pre tieto k asymptoticky platí

$$Var[\hat{\Phi}_{kk}] \approx \frac{1}{T}$$

Odhadovanie PACF - príklad 1

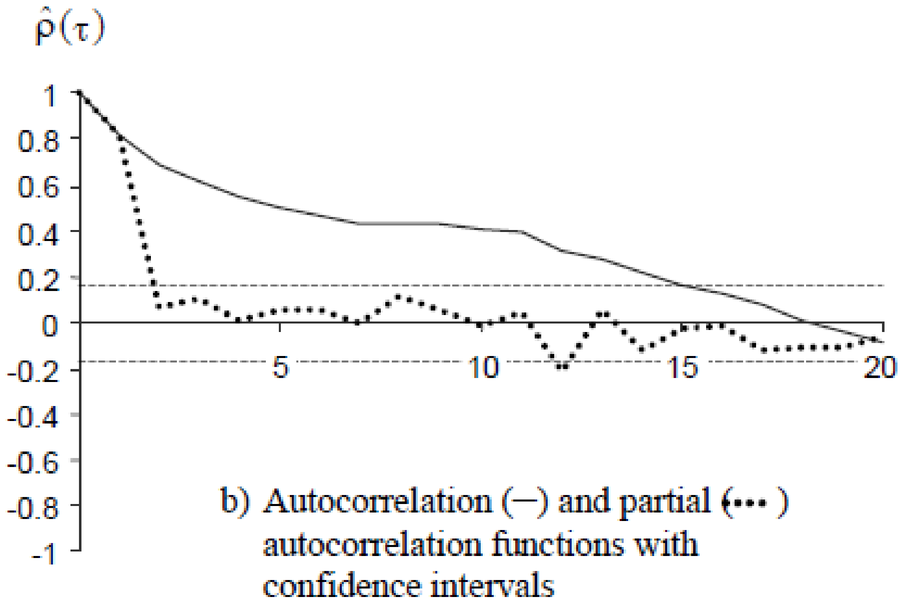
- Modelovali sme spread; príkazom acf2(spread) dostaneme ACF aj PACF:



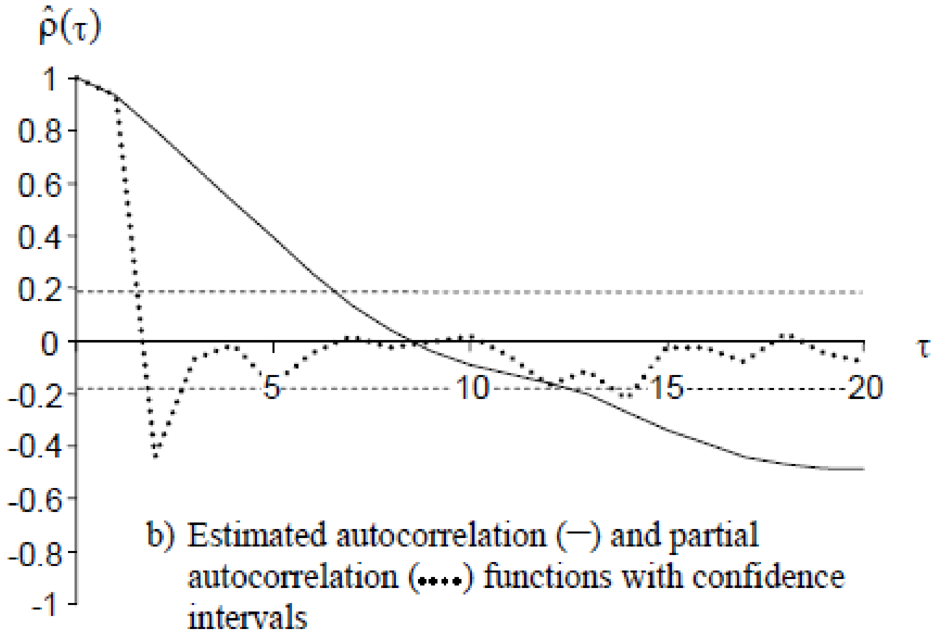
- Vidíme, že treba odhadovať AR(2) proces (to sme aj spravili)

Odhadovanie PACF - príklad 2

- Z predchádzajúcich príkladov s reálnymi dátami:
  - ◇ volebné preferencie (vľavo) - AR(1)
  - ◇ úrokové miery (vpravo) - AR(2)



b) Autocorrelation (—) and partial (•••) autocorrelation functions with confidence intervals



b) Estimated autocorrelation (—) and partial autocorrelation (••••) functions with confidence intervals