ARMA modely
časť 2: moving average modely (MA)

Beáta Stehlíková

Časové rady, FMFI UK

V.

Moving average proces prvého rádu - MA(1)

Príklad z prvej prednášky

- Nech u_t je biely šum, definujeme

$$x_t = u_t + u_{t-1}$$

- Vypočítali sme:

$$E[x_t] = 0, \quad Var[x_t] = 2\sigma^2$$

$$Cov[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$Cor[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} 1/2 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- ACF je nulová pre $\tau = 2, 3, \ldots$ -

Zovšeobecnenie - MA(1) proces

- Nech u_t je biely šum, potom

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

  sa nazýva moving average proces prvého rádu - MA(1)

- Woldova reprezentácia: $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$
  MA(1) proces: $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\beta, \psi_j = 0$ pre $j = 2, 3, \ldots$

- Momenty a ACF:

$$E[x_t] = \mu, \;\; Var[x_t] = (1 + \beta^2)\sigma^2$$

$$Cov[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} -\beta\sigma^2 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$Cor[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

MA(1) proces - príklady

1. Nech u_t je biely šum s rozdelením $N(0,4)$, definujme

$$x_t = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1}$$

Potom: $E[x_t] = 0, \quad Var[x_t] = (1 + (1/2)^2) \times 4 = 5$

$$Cor[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} \frac{1/2}{1+1/4} = 2/5 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

2. Nech u_t je biely šum s rozdelením $N(0,1)$, definujme

$$y_t = u_t + 2u_{t-1}$$

Potom: $E[y_t] = 0, \quad Var[y_t] = (1 + 4) \times 1 = 5$

$$Cor[y_t, y_{t+\tau}] = \begin{cases} \frac{2}{1+4} = 2/5 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Procesy x_t a y_t majú rovnakú ACF $\rightarrow$ nedajú sa rozlíšiť

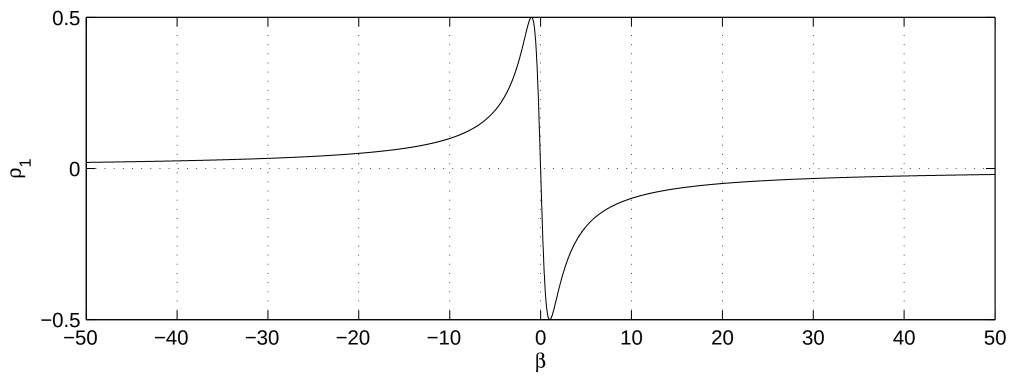
MA(1) proces

- Majme MA(1) proces, t.j. ACF tvaru

$$Cor[x_t, x_{t+\tau}] = \begin{cases} -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

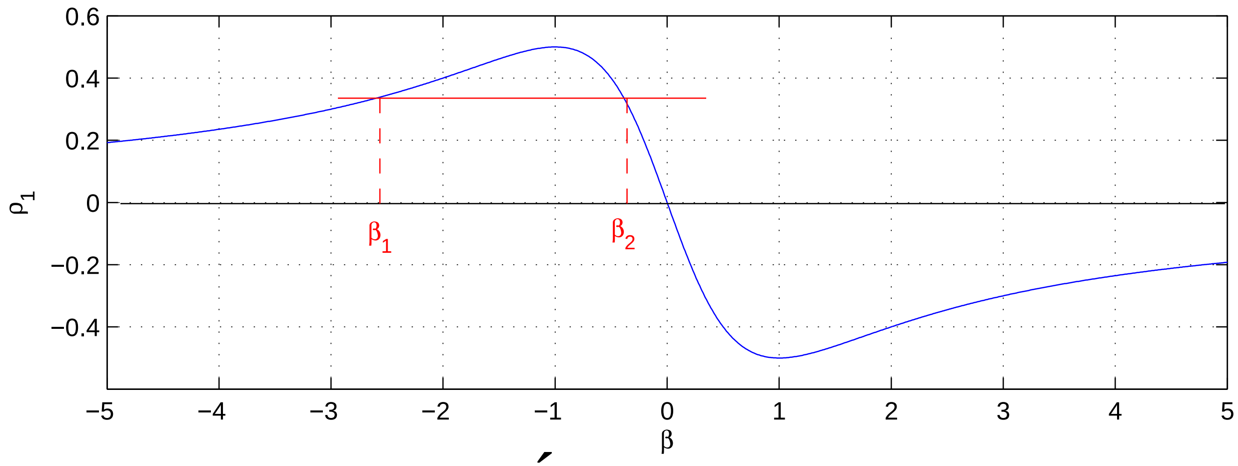
- Predpokladajme teraz, že máme danú hodnotu $\rho_1 = \rho(1)$ a chceme z nej spätne určiť koeficient β, t.j.

$$\rho_1 = -\frac{\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \beta = ?$$



MA(1) proces

- Máme teda rovnicu: $\rho_1 = -\frac{\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \beta^2 + \frac{1}{\rho_1}\beta + 1 = 0$



$\rightarrow$ dve riešenia β_1, β_2, spĺňajú $\beta_1\beta_2 = 1$.

- Procesy

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}, \quad x_t = \mu + u_t - \frac{1}{\beta}u_{t-1}$$

majú rovnakú ACF

- Ak chceme jednoznačnú parametrizáciu, potrebujeme dodať ďalšiu podmienku.

Invertovateľnosť procesu

- Budeme sa snažiť zapísať proces v tvare AR(∞):

$$x_t = \hat{\mu} + u_t + \psi_1 x_{t-1} + \psi_2 x_{t-2} + \psi_3 x_{t-3} + \ldots$$

  \- ak sa to dá spraviť, proces sa nazýva invertovateľný
- Pre MA(1) proces:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + (1 - \beta L) u_t \\ (1 - \beta L)^{-1} x_t &= (1 - \beta L)^{-1} \mu + u_t \end{aligned}$$

$(1 - \beta L)^{-1}$ existuje pre $|\beta| < 1$, vtedy

$$(1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \ldots) x_t = \mu / (1 - \beta) + u_t$$

$$x_t + \beta x_{t-1} + \beta^2 x_{t-2} + \ldots = \mu / (1 - \beta) + u_t$$

MA(1) - invertovatel'nost' procesu

- Dostali sme teda podmienku invertovatel'nosti MA(1) procesu: $|\beta| < 1$
- Iný zápis tejto podmienky:
  - máme proces $x_t = \mu + (1 - \beta L)u_t$
  - koreň polynómu $1 - \beta L$ je $1/\beta$
  - podmienka invertovatel'nosti teda hovorí, že koreň $1 - \beta L = 0$ musí byt' v absolútnej hodnote väčší ako 1, teda mimo jednotkového kruhu

MA(1) - výpočet PACF

- Pripomeňme si všeobecný vzorec;

$$\Phi_{kk} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ & \dots & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & \dots & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}} \tag{1}$$

- Pre MA(1) proces je $\rho(k) = 0$ pre $k = 2, 3, \dots$

MA(1) - výpočet PACF

- PACF sa (na rozdiel od AR procesu) nevynuluje:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{11} &= \rho(1) \\
\Phi_{22} &= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-\rho(1)^2}{1-\rho(1)^2} \\
\Phi_{33} &= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & 0 \\ 0 & \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & 0 \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ 0 & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\rho(1)^3}{1-2\rho(1)^2} \\
\Phi_4 &= \frac{-\rho(1)^4}{(1-\rho(1)^2)^2-\rho(1)^2} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

VI.

Moving average proces q-teho rádu - MA(q)

MA(q) proces - definícia a vlastnosti

- Nech u_t je biely šum, potom

$$x_t = \mu + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} - \ldots - \beta_q u_{t-q}$$

sa nazýva moving average proces q-teho rádu - MA(q)

- Woldova reprezentácia: $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$
MA(q) proces: $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\beta_1, \ldots \psi_q = -\beta_q, \psi_j = 0$ pre $j > q$ $\rightarrow$ MA(q) proces je vždy stacionárny

- Momenty, ACF, PACF:

$$E[x_t] = \mu, \quad Var[x_t] = (1 + \beta_1^2 + \ldots \beta_q^2)\sigma^2$$

$$Cov[x_t, x_{t+\tau}] = 0 \text{ pre } \tau = q+1, q+2, \ldots$$

$$\Rightarrow Cor[x_t, x_{t+\tau}] = 0 \text{ pre } \tau = q+1, q+2, \ldots$$

MA(q) proces - definícia a vlastnosti

- Výpočet prvých q autokorelácií (môžeme uvažovať $\mu = 0$):

$$
\begin{aligned}
Cov[x_t, x_{t+\tau}] &= E[(u_t - \beta_1 u_{t-1} - \ldots - \beta_q u_{t-q}) \times \\
&\quad (u_{t+\tau} - \beta_1 u_{t+\tau-1} - \ldots - \beta_q u_{t+\tau-q})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & E[u_t(u_{t+\tau} - \beta_1 u_{t+\tau-1} - \ldots - \beta_q u_{t+\tau-q})] \\
& -\beta_1 E[u_{t-1}(u_{t+\tau} - \beta_1 u_{t+\tau-1} - \ldots - \beta_q u_{t+\tau-q})] \\
& \ldots \\
& -\beta_q E[u_{t-q}(u_{t+\tau} - \beta_1 u_{t+\tau-1} - \ldots - \beta_q u_{t+\tau-q})]
\end{aligned}
$$

MA(q) proces - definícia a vlastnosti

- Výpočet prvých q autokorelácií - pokračovanie:

$$\begin{aligned}
\tau = 1 \quad &\Rightarrow \quad \gamma(1) = (-\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \ldots + \beta_{q-1}\beta_q)\sigma^2 \\
\tau = 2 \quad &\Rightarrow \quad \gamma(2) = (-\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \ldots + \beta_{q-2}\beta_q)\sigma^2 \\
& \quad\quad \ldots \\
\tau = q \quad &\Rightarrow \quad \gamma(q) = (-\beta_q)\sigma^2
\end{aligned}$$

- PACF - dosadením vypočítaných autokorelácií do všeobecného vzorca (1)

MA(q) proces - definícia a vlastnosti

- Invertovatel'nosť:

$$
\begin{aligned}
x_t &= \mu + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} - \ldots - \beta_q u_{t-q} \\
x_t &= \mu + (1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q) u_t
\end{aligned}
$$

- Existencia inverzného operátora $(1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q)^{-1}$ - korene polynómu $1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q = 0$ musia byť mimo jednotkového kruhu