ARMA modely
časť 3: zmiešané modely (ARMA)

Beáta Stehlíková
Časové rady, FMFI UK

ARMA modely - motivácia

- Chceli by sme v modeli skombinovať AR aj MA členy
- Odhadneme ACF a PACF pre dáta a nepodobajú sa ani na AR, ani na MA proces
- Žiadny z AR a MA modelov nepripúšťa možnosť, že sa ani ACF, ani PACF nevynuluje po konečnom počte členov

ARMA modely

Majme stacionárny a invertovateľný proces:

	AR(p)	MA(q)
ACF(τ)	nenulová	0 pre $\tau > q$
PACF(τ)	0 pre $\tau > p$	nenulová
AR(∞) reprezentácia	konečný súčet	nekonečný súčet
MA(∞) repr. (Wold)	nekonečný súčet	konečný súčet

- Žiadny z týchto modelov nepripúšťa možnosť, že sa ani ACF, ani PACF nevynuluje po konečnom počte členov
- Na to by sme potrebovali proces s nekonečnou AR aj MA reprezentáciou
- Túto vlastnosť majú zmiešané ARMA modely (zmiešané = AR aj MA členy)

VII.

Model ARMA(1,1)

ARMA(1,1) - definícia

- Nech u_t je biely šum, definujeme

$$x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1},$$

pričom $\alpha \neq \beta$. Proces x_t sa potom nazýva ARMA(1,1) proces.

- Zápis pomocou operátora posunu L:

$$\begin{aligned} (x_t - \alpha x_{t-1}) &= \delta + (u_t - \beta u_{t-1}) \\ (1 - \alpha L) x_t &= \delta + (1 - \beta L) u_t \end{aligned} \tag{1}$$

ARMA(1,1) - Woldova repr. a stacionarita

- Vyjadríme z (1) proces x_t:

(2) $$x_t = (1-\alpha L)^{-1}\delta + (1-\alpha L)^{-1}(1-\beta L)u_t$$

- Vieme, že $(1-\alpha L)^{-1}$ existuje, ak $|\alpha| < 1$ a v tomto prípade platí:

$$(1-\alpha L)^{-1} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots$$

- Dosadíme do (2):

$$\begin{aligned} x_t &= \delta/(1-\alpha) + (1+\alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots)(1-\beta L)u_t \\ &= \delta/(1-\alpha) + u_t + (\alpha-\beta)u_{t-1} + \alpha(\alpha-\beta)u_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

teda vo Woldovej reprezentácii

$$\psi_0 = 1, \psi_1 = \alpha(\alpha-\beta), \psi_2 = \alpha^2(\alpha-\beta), \dots, \psi_k = \alpha^k(\alpha-\beta), \dots$$

- Podmienka stacionarity $|\alpha| < 1$ sa dá zapísať aj tak, že koreň polynómu $1-\alpha L$ musí byť mimo jednotkového kruhu

ARMA(1,1) - k podmienke $\alpha \neq \beta$

- Máme Woldovu reprezentáciu):

$$\begin{aligned} x_t &= \delta/(1-\alpha) + (1+\alpha L + \alpha^2 L^2 + \ldots)(1-\beta L)u_t \\ &= \delta/(1-\alpha) + u_t + (\alpha-\beta)u_{t-1} + \alpha(\alpha-\beta)u_{t-2} + \ldots \end{aligned}$$

- Ak by bolo $\alpha = \beta$, tak

$$x_t = \delta/(1-\alpha) + u_t,$$

teda náš proces je iba konštanta + biely šum

ARMA(1,1) - invertovateľnosť

- Vyjadríme z (1) proces bieleho šumu u_t, aby sme dostali proces x_t vyjadrený pomocou jeho starších hodnôt + aktuálnej hodnoty bieleho šumu:

$$
\begin{aligned}
-\delta + (1 - \alpha L)x_t &= (1 - \beta L)u_t \\
-(1 - \beta L)^{-1}\delta + (1 - \beta L)^{-1}(1 - \alpha L)x_t &= u_t
\end{aligned}
$$

- Vieme, že inverzný operátor $(1 - \beta L)^{-1}$ existuje, ak $|\beta| < 1$
- Táto podmienka invertovateľnosti sa dá zapísať aj tak, že koreň polynómu $1 - \beta L$ musí byť mimo jednotkového kruhu

ARMA(1,1) - zhrnutie

- Pripomeňme si proces (1):

$$(1 - \alpha L)x_t = \delta + (1 - \beta L)u_t$$

- Podmienka stacionarity:
  - ◇ koreň polynómu $1 - \alpha L$ je mimo jednotkového kruhu
  - ◇ závisí teda iba od AR časti procesu
- Podmienka invertovateľnosti:
  - ◇ koreň polynómu $1 - \beta L$ je mimo jednotkového kruhu
  - ◇ závisí teda iba od MA časti procesu

VIII.

Model ARMA(p,q)

ARMA(p,q) - definícia

- Nech u_t je biely šum, definujeme

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \ldots - \beta_q u_{t-q},$$

tento proces sa potom nazýva ARMA(p,q) proces.

- Zápis pomocou operátora posunu L:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_1 L - \ldots \alpha_p L^p) x_t &= \delta + (1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q) u_t \\ \alpha(L) x_t &= \delta + \beta(L) u_t \qquad (3) \end{aligned}$$

pričom požadujeme, aby polynómy $\alpha(L)$, $\beta(L)$ nemali spoločný koreň (podrobnejšie o tejto podmienke neskôr)

ARMA(p,q) - Woldova repr., stacionarita

- Z rovnice (3) vyjadríme x_t:

$$\begin{aligned} \alpha(L)x_t &= \delta + \beta(L)u_t \\ x_t &= \alpha(L)^{-1}\delta + \alpha(L)^{-1}\beta(L)u_t \end{aligned}$$

- Potrebujeme $\alpha(L)^{-1}\beta(L)$:

$$\begin{aligned} \alpha(L)^{-1}\beta(L) &= \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots \\ \beta(L) &= \alpha(L)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots) \\ (1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q) &= (1 - \alpha_1 L - \ldots \alpha_p L^p) \times \\ &\quad \times(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots) \end{aligned}$$

Roznásobíme a porovnáme koeficinety pri L^j

ARMA(p,q) - Woldova repr., stacionarita

- Pre koeficinety ψ_j Woldovej reprezentácie dostaneme:
  - diferenčnú rovnicu
$$\psi_k - \alpha_1 \psi_{k-1} - \ldots - \alpha_p \psi_{k-p} = 0$$
  - začiatočné podmienky
- Kvôli konvergencii radu $\sum \phi_j^2$ musia byť korene charakteristického polynómu $\lambda^p - \alpha_1 \lambda^{p-1} - \ldots \alpha_p = 0$ vnútri, t.j. korene $\alpha(L) = 0$ mimo jednotkového kruhu

ARMA(p,q) - invertovateľnosť

- Z rovnice (3) vyjadríme u_t:

$$\begin{aligned} \alpha(L)x_t &= \delta + \beta(L)u_t \\ \beta(L)u_t &= -\delta + \alpha(L)x_t \\ u_t &= -\beta(L)^{-1}\delta + \beta(L)^{-1}\alpha(L)x_t \end{aligned}$$

- Toto sa dá spraviť, ak existuje inverzný operátor $\beta(L)^{-1}$, čo je vtedy, keď korene $\beta(L) = 0$ sú mimo jednotkového kruhu

ARMA(p,q) - momenty

- Stredná hodnota: μ:

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \ldots - \beta_q u_{t-q}$$

$$\mu = \delta + \alpha_1 \mu + \ldots + \alpha_p \mu \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_p}$$

- Variancia, autokovariancie - nech $\delta = 0$:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \ldots - \beta_q u_{t-q}$$

$$\Big/ \quad \times x_{t-s}, \; E[.]$$

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \alpha_1 \gamma(s-1) + \ldots + \alpha_p \gamma(s-p) \\ &\quad + E[u_t x_{t-s}] - \beta_1 E[u_{t-1} x_{t-s}] - \ldots - \beta_q E[u_{t-q} x_{t-s}] \end{aligned}$$

ARMA(p,q) - momenty

- Pre $s > q$ sú všetky stredné hodnoty

$$E[u_t x_{t-s}], E[u_{t-1} x_{t-s}], \ldots, E[u_{t-p} x_{t-s}]$$

  nulové $\Rightarrow$ pre $s > q \wedge s > p$ (lebo na použitie nasledujúcej diferenčnej rovnice potrebujeme aspoň p začiatočných hodnôt) máme diferenčnú rovnicu pre autokovariancie:

$$\gamma(s) = \alpha_1 \gamma(s-1) + \ldots + \alpha_p \gamma(s-p) \tag{4}$$

- ACF - vydelením (4) varianciou $\gamma(0)$ dostaneme diferenčnú rovnicu pre autokorelácie $\rho(s)$, $s > \max(p, q)$:

$$\rho(s) = \alpha_1 \rho(s-1) + \ldots + \alpha_p \rho(s-p) \tag{5}$$

  - rovnaká diferenčná rovnica ako pre proces bez MA časti, začiatočné pomienky však MA koeficienty obsahujú

Príklad: ARMA(1,1)

- Podrobnejší výpočet pre ARMA(1,1)
- Stredná hodnota μ:

$$\begin{aligned} x_t &= \delta + \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1} \qquad \Big/ \quad E[.] \\ \mu &= \delta + \alpha\mu + 0 \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1-\alpha} \end{aligned}$$

- Variancia, autokovariancie - pre $\delta = 0$:

$$\begin{aligned} x_t &= \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1} \qquad \Big/ \quad \times x_{t-s},\ E[.] \\ E[x_t x_{t-s}] &= \alpha E[x_{t-1}x_{t-s}] + E[u_t x_{t-s}] - \beta E[u_{t-1}x_{t-s}] \\ (6) \quad \gamma(s) &= \alpha\gamma(s-1) + E[u_t x_{t-s}] - \beta E[u_{t-1}x_{t-s}] \end{aligned}$$

Stredná hodnota $E[u_t x_{t-s}]$ je nenulová len pre $s = 0$, $E[u_{t-1}x_{t-s}]$ je nenulová len pre $s = 0$ a pre $s = 1$

Príklad: ARMA(1,1)

- Konkrétne hodnoty $E[u_t x_{t-s}]$ a $E[u_{t-1} x_{t-s}]$ vypočítame z Woldovej reprezentácie

$$x_{t-s} = u_{t-s} + (\alpha - \beta) u_{t-s-a} + \alpha(\alpha - \beta) u_{t-s-2} + \dots$$

Dostaneme:

$$E[u_t x_{t-s}] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } \tau = 0 \\ 0 & \text{pre } \tau = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$E[u_{t-1} x_{t-s}] = \begin{cases} (\alpha - \beta)\sigma^2 & \text{pre } \tau = 0 \\ \sigma^2 & \text{pre } \tau = 1 \\ 0 & \text{pre } \tau = 2, 3, \dots \end{cases}$$

a dosadíme do (6).

Príklad: ARMA(1,1)

- Nakoniec z (6) dostaneme pre $s = 0$, $s = 1$:

$$s = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma(0) = \alpha\gamma(1) + \sigma^2 - \beta(\alpha - \beta)\sigma^2$$
$$s = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma(1) = \alpha\gamma(0) - \beta\sigma^2$$

$\rightarrow$ sústava 2 rovníc s 2 neznámymi, jej riešením je

$$\gamma(0) = \frac{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{1 - \alpha^2}\sigma^2, \gamma(1) = \frac{(\alpha - \beta)(1 - \alpha\beta)}{1 - \alpha^2}\sigma^2 \tag{7}$$

- Pre $s = 2, 3, \ldots$ dostaneme rekurentný predpis pre ďalšie $\gamma(s)$:

$$\gamma(s) = \alpha\gamma(s - 1)$$

Príklad: ARMA(1,1)

- Pre $s = 2, 3, \ldots$ máme

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \alpha\gamma(s-1) \quad \Big/ \; \frac{1}{\gamma(0)} \\ \rho(s) &= \alpha\rho(s-1) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ tá istá diferenčná rovnica pre ACF, ako by bola pre proces bez MA časti

- ale s inou začiatočnou podmienkou - zo vzťahu (7) máme

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{(1+\beta^2-2\alpha\beta)}$$

- závisí aj od MA časti

PACF

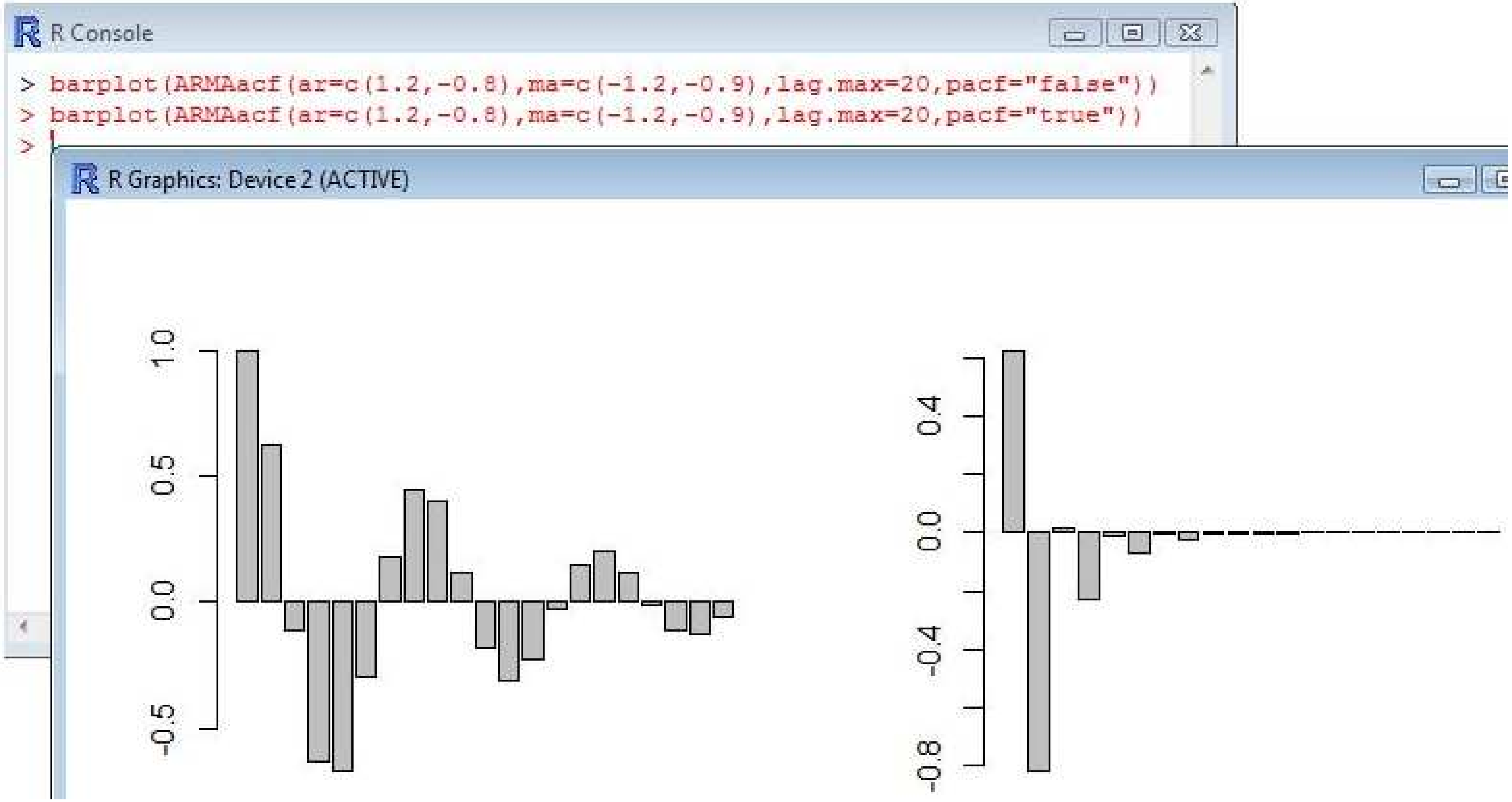
- PACF počítame rovnako ako predtým pomocou determinantov:

$$\Phi_{kk} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ & \dots & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & \dots & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}} \tag{8}$$

- Príklad: pre ARMA(1,1) proces dosadzujeme $\rho(k) = \alpha^{k-1}\rho(1)$, $\rho(1) = \frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{(1+\beta^2-2\alpha\beta)}$

Príklad - vypočítaná ACF a PACF

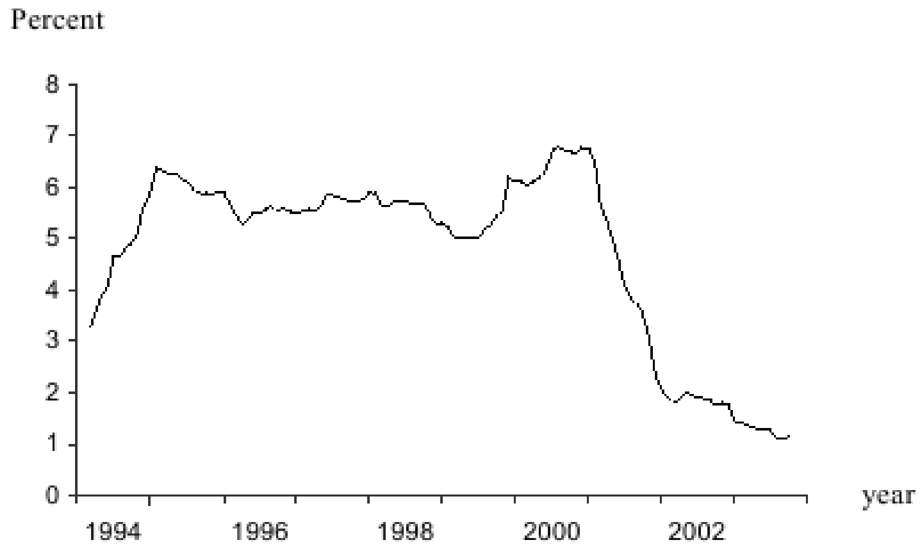
NEPLATÍ, že $ACF(k) = 0$ pre $k > q$ a $PACF(k) = 0$ pre $k > p$ (minulé roky častá chyba pri komentovaní ACF, PACF), príklad ARMA procesu:



Príklad - reálne dáta

[Kirchgässner, Wolters], example 2.15

- USA, marec 1994 - august 2003
- USR_t = 3-mesačná úroková miera



a) New York three months money market rate, 1994 – 2003

Príklad - reálne dáta

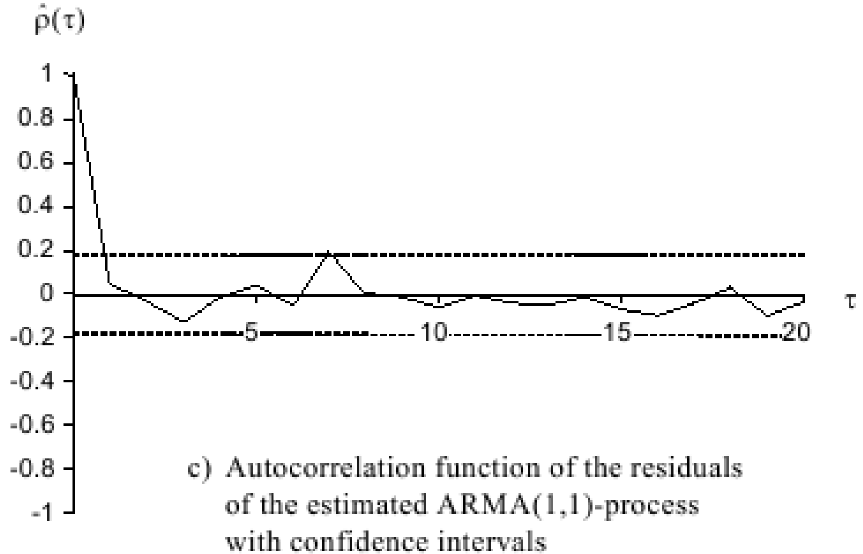
Odhadnutý model pre diferencie premennej USR:

The following ARMA(1,1) model has been estimated for this time series:

$$\Delta USR_t = \underset{(-0.73)}{-0.006} + \underset{(10.91)}{0.831}\, \Delta USR_{t-1} + \hat{u}_t - \underset{(-3.57)}{0.457}\, \hat{u}_{t-1},.$$

$$\overline{R}^2 = 0.351, \quad SE = 0.166, \quad Q(10) = 7.897 \ (p = 0.639).$$

The AR(1) as well as the MA(1) terms are different from zero at the 0.1 percent significance level. The autocorrelogram of the estimated residuals, which is also given in *Figure 2.10*, as well as the Box-Ljung Q statistic, which is calculated for this model with 12 autocorrelation coefficients (i.e. with 10 degrees of freedom), do not provide any evidence of a higher order process.



c) Autocorrelation function of the residuals of the estimated ARMA(1,1)-process with confidence intervals

Príklad - reálne dáta

Otázky k výstupu:

- Je odhadnutý model stacionárny? Je invertovatel’ný?
- *"The autocorrelogram of the estimated residuals... not provide any evidence of a higher order process"* - vysvetlite
- *"...the Box-Ljung Q statistic, which is calculated for this model with 12 autocorrelation coefficients (i.e. with 10 degrees of freedom)..."*
  - sformulujte nulovú hypotézu, ktorá sa tu testuje
  - zdôvodnite počet stupňov vol’nosti
  - aký je záver testu?

ARMA(p,q) - spoločné AR a MA korene

- Pripomeňe si definíciu ARMA(p,q) procesu:

$$\begin{aligned}(1-\alpha_1 L - \ldots - \alpha_p L^p)x_t &= \delta + (1-\beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q)u_t \\ \alpha(L)x_t &= \delta + \beta(L)u_t\end{aligned}$$

  pričom požadujeme, aby polynómy $\alpha(L)$, $\beta(L)$ nemali spoločné korene

- Prečo nemôžu mať polynómy $\alpha(L)$, $\beta(L)$ spoločné korene?

- Zovšeobecnenie toho, že pre ARMA(1,1) musí byť $\alpha \neq \beta$, inak máme triviálny proces "konštanta + biely šum"

ARMA(p,q) - spoločné AR a MA korene

- Uvažujme "ARMA(2,2)" proces

$$(1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2)x_t=\delta+(1-\beta_1 L-\beta_2 L^2)u_t,$$

kde
$$\begin{aligned} 1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2 &= (1-\gamma L)(1-\gamma_1 L) \\ 1-\beta_1 L-\beta_2 L^2 &= (1-\gamma L)(1-\gamma_2 L) \end{aligned}$$

t.j. AR a MA polynómy majú spoločný koreň γ

- Potom sa proces dá zapísať nasledovne:

$$\begin{aligned} (1-\gamma L)(1-\gamma_1 L)x_t &= \delta+(1-\gamma L)(1-\gamma_2 L)u_t \\ (1-\gamma_1 L)x_t &= (1-\gamma L)^{-1}\delta+(1-\gamma_2 L)u_t \end{aligned}$$

teda je to ARMA(1,1), a nie ARMA(2,2) model

- Prakticky - ak dostaneme veľmi blízky AR a MA koreň, treba namiesto ARMA(p,q) skúsiť ARMA(p-1,q-1) model