ARMA modely II. - moving average modely (kĺzavé priemery, MA)

Beáta Stehlíková

2-EFM-102 Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Motivácia

Príklad: Ceny kakaa

Dáta

Ben Vogelvang: *Econometrics. Theory and Applications with EViews.*, Pearson Education Limited, 2005.

Chapter 14.7. - The Box-Jenkins Approach in Practice

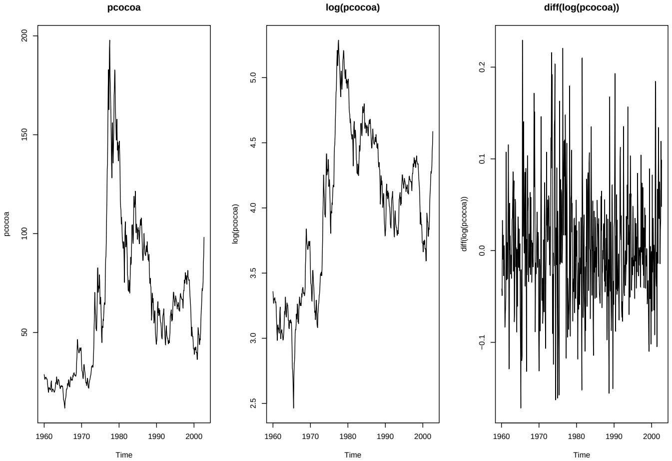
- Mesačné dáta, január 1960 - september 2002
- pcocoa - cena kakka, zlogaritmujeme a kvôli stacionarite budeme pracovať s diferenciami
- Modelujeme teda percentuálnu zmenu ceny

$$\begin{aligned} \Delta\ln(p_t) &= \ln(p_t) - \ln(p_{t-1}) = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}\right) \approx \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} \end{aligned}$$

(lebo $\ln(1+x) \approx x$ pre x malé)

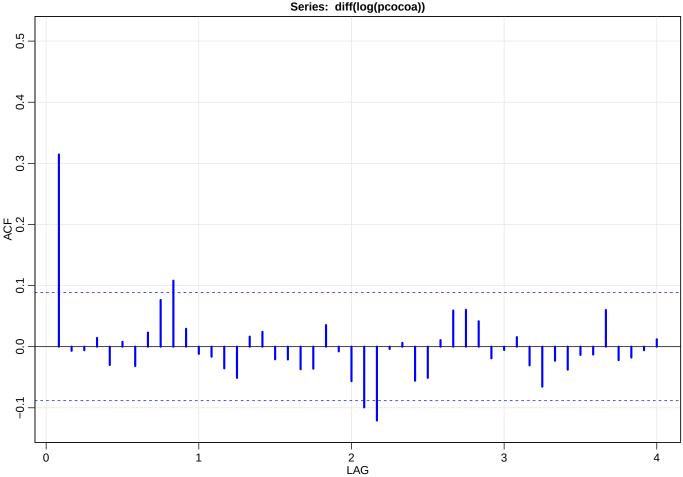
Dáta

Priebeh dát - pôvodné, zlogaritmované, diferencie logaritmov:



Odhadnutá ACF

- Odhadnutá ACF diferencií logaritmov:



Odhadnutá ACF

- Prvá výrazne nenulová, ostatné skoro nulové
- Nevyzerá to ako typický priebeh pre AR proces:
  - tam klesala ACF postupne
  - priebeh tohto typu mala PACF

Príklad z prvej prednášky

- Nech u_t je biely šum, definujme

$$x_t = u_t + u_{t-1}$$

- Vypočítali sme:

$$\mathbb{E}(x_t) = 0, \mathbb{D}(x_t) = 2\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} 1/2 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- ACF je nulová pre $k = 2, 3, \ldots$ - presne tá vlastnosť, ktorú potrebujeme

Zovšeobecnenie príkladu a plán prednášky

- Príklad zovšeobecníme tak, aby
  - sa zachovala nulovosť korelácií okrem prvej
  - prvá korelácia mohla nadobädať aj iné hodnoty ako $1/2$ $\Rightarrow$ MA(1) procesy
- Procesy, ktoré majú prvých q nenulových a ostatné nulové $\Rightarrow$ MA(q) procesy

MA(1) procesy

Definícia, stacionarita, momenty, ACF, PACF

- Nech u_t je biely šum, potom

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

sa nazýva moving average proces prvého rádu - MA(1)

- Woldova reprezentácia: $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$, pre MA(1) proces: $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\beta, \psi_j = 0$ pre $j = 2, 3, \dots$ $\rightarrow$ **vždy stacionárny**
- Momenty a ACF:

$$\mathbb{E}(x_t) = \mu, \mathbb{D}(x_t) = (1+\beta^2)\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} -\beta\sigma^2 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Pripomeňme si PACF:

$$\Phi_{kk} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}}$$

- Pre MA(1) proces dosadzujeme $\rho(k) = 0$ pre $k = 2, 3, \dots$

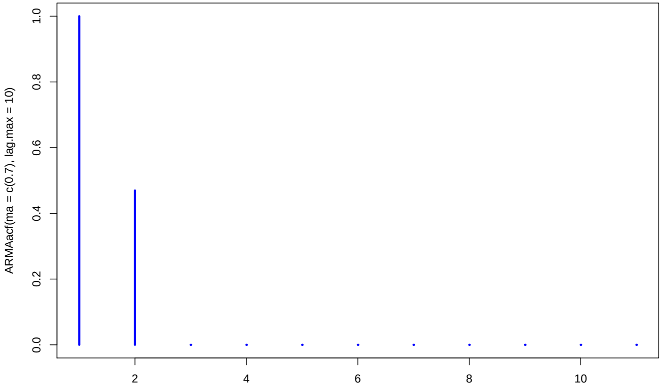
$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &= \rho(1) \\
\Phi_{22} &= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-\rho(1)^2}{1-\rho(1)^2} \\
\Phi_{33} &= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & 0 \\ 0 & \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & 0 \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ 0 & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} \\
&= \frac{\rho(1)^3}{1-2\rho(1)^2}
\end{aligned}$$

Cvičenie: Odvoďte ďalší člen PACF:

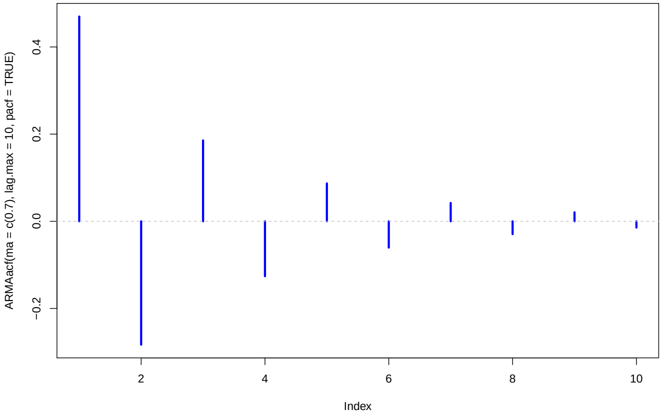
$$\Phi_{44} = \frac{-\rho(1)^4}{(1-\rho(1)^2)^2 - \rho(1)^2}$$

Príklad 1: výpočet PACF v R-ku, $x_t = u_t + 0.7u_{t-1}$

```
plot(ARMAacf(ma = c(0.7), lag.max = 10),
     type = "h", col = "blue", lwd = 3)
```

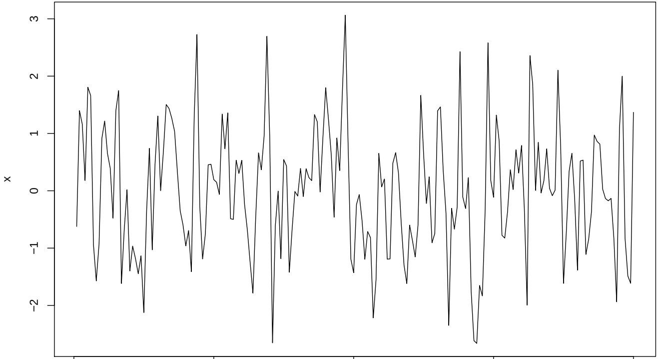


```
plot(ARMAacf(ma = c(0.7), lag.max = 10, pacf = TRUE),
     type = "h", col = "blue", lwd = 3)
abline(h = 0, col = "grey", lty = 2)
```



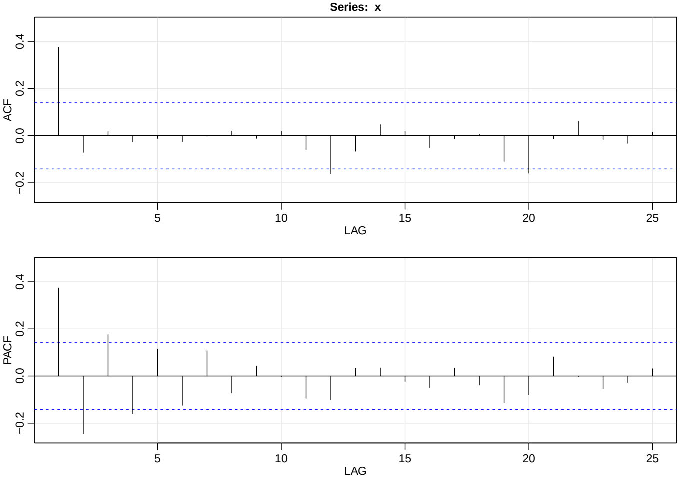
Príklad 2: simulované dáta, $x_t = u_t + 0.7u_{t-1}$

```
set.seed(123)
x <- arima.sim(model = list(ma = c(0.7)), n = 200)
plot(x)
```



Odhad ACF a PACF:

```
acf2(x) # naraz ACF (bez lagu 0) a PACF, balik astsa
```



Príklad 3, 4: výpočet ručne

- Nech u_t je biely šum s rozdelením $N(0,4)$, definujme

$$x_t = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1}$$

Potom: $\mathbb{E}(x_t) = 0$, $\mathbb{D}(x_t) = (1 + (1/2)^2) \times 4 = 5$

$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} \frac{1/2}{1+1/4} = 2/5 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- Nech u_t je biely šum s rozdelením $N(0,1)$, definujme

$$x_t = u_t + 2u_{t-1}$$

Potom: $\mathbb{E}(x_t) = 0$, $\mathbb{D}(x_t) = (1 + 2^2) \times 1 = 5$

$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} \frac{2}{1+4} = 2/5 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

MA(1) procesy s danou ACF, invertovateľnosť

MA(1) procesy s danou ACF

- Zovšeobecníme predchádzajúce dva príklady (vyšla pre ne rovnaká ACF)
- Majme MA(1) proces, teda ACF tvaru

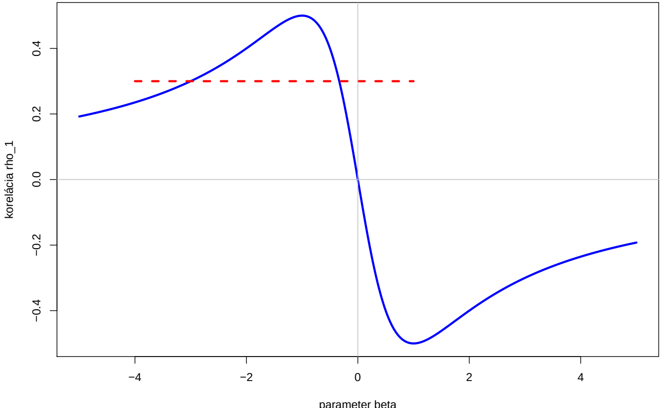
$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Predpokladjme teraz, že máme danú hodnotu $\rho_1 = \rho(1)$ a chceme z nej spätne určiť koeficient β:

$$\rho_1 = -\frac{\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \beta = ?$$

- Máme teda rovnicu

$$\rho_1 = -\frac{\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \beta^2 + \frac{1}{\rho_1}\beta + 1 = 0$$



- Rovnica $\beta^2 + \frac{1}{\rho_1}\beta + 1 = 0$ má pre $|\rho_1| < 1/2$ dve riešenia β_1, β_2, ktoré spĺňajú $\beta_1\beta_2 = 1$
- Procesy

  $$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}, x_t = \mu + u_t - \frac{1}{\beta} u_{t-1}$$

  majú rovnakú ACF
- Ak chceme jednoznačnú parametrizáciu, potrebujeme dodať ďalšiu podmienku

Invertovateľnosť

- Budeme sa snažiť zapísať proces v tvare AR(∞):

$$x_t = \tilde{\mu} + u_t + \psi_1 x_{t-1} + \psi_2 x_{t-2} + \psi_3 x_{t-3} + \dots$$

  Ak sa to dá spraviť, proces sa nazýva invertovateľný
- Pre MA(1) proces:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + (1 - \beta L) u_t \\ (1 - \beta L)^{-1} x_t &= (1 - \beta L)^{-1} \mu + u_t \end{aligned}$$

  inverzia $(1 - \beta L)^{-1}$ existuje pre $|\beta| < 1$, vtedy

$$(1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \dots) x_t = \frac{\mu}{1 - \beta} + u_t$$

$$x_t + \beta x_{t-1} + \beta^2 x_{t-2} + \dots = \frac{\mu}{1 - \beta} + u_t$$

$$x_t = \frac{\mu}{1 - \beta} + u_t - \beta x_{t-1} - \beta^2 x_{t-2} - \dots$$

- Dostali sme teda podmienku invertovateľnosti MA(1) procesu: $|\beta| < 1$
- Iný zápis tejto podmienky:
  - máme proces $x_t = \mu + (1 - \beta L)u_t$
  - koreň polynómu $1 - \beta L$ je $1/\beta$
  - podmienka invertovateľnosti teda hovorí, že koreň polynómu $1 - \beta L$ musí byť v absolútnej hodnote väčší ako 1, pri zakreslení do komplexnej roviny mimo jednotkového kruhu

Reálne dáta: ceny kakaa zo začiatku

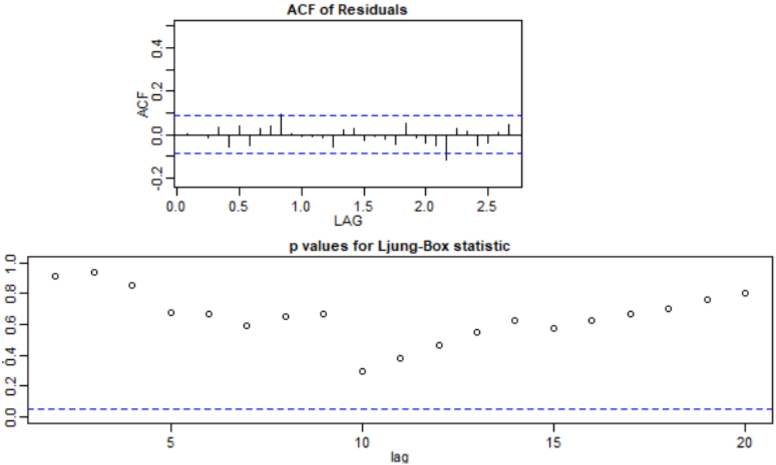
- Odhadneme MA(1) model pre diferencie logaritmov cien (teda percentuálne zmeny cien):

```
##         Estimate     SE t.value p.value
## ma1       0.3520 0.0402  8.7585  0.0000
## xmean     0.0024 0.0037  0.6501  0.5159
```

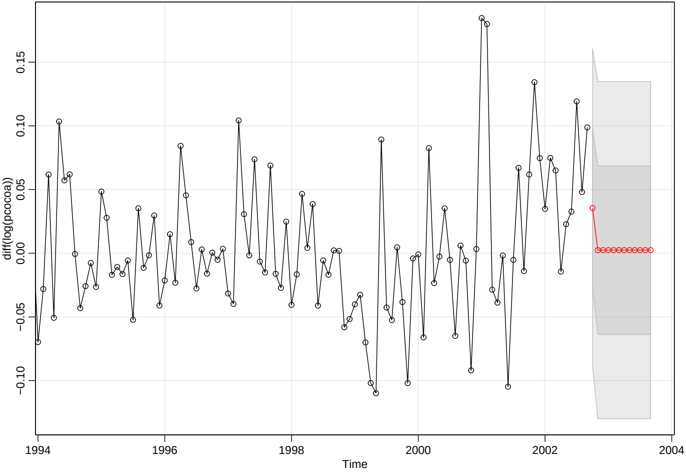
- Zapíšeme model pre premennú $x_t = \Delta \ln(pcocoa_t)$:

$$x_t = 0.0024 + u_t + 0.3520 u_{t-1}$$

- Rezíduá sú v poriadku - model je dobrý



- Predikcie z R-ka na nasledujúci rok.
- Všimnime si, že nie sú konštantné. Prečo nie sú konštantné predikcie z modelu $x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$- *k tomu sa vrátime.*



MA(q) procesy

Definícia, momenty, ACF, PACF, invertovateľnosť

- Nech u_t je biely šum, potom

$$x_t = \mu + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} - \dots - \beta_q u_{t-q}$$

sa nazýva moving average proces rádu q - MA(q)

- Woldova reprezentácia: $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$, pre MA(q) proces: $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\beta_1, \dots, \psi_q = -\beta_q \psi_j = 0$ pre $j > q$ $\rightarrow$ **vždy je stacionárny**
- Momenty a ACF:

$$\mathbb{E}(x_t) = \mu, \mathbb{D}(x_t) = (1 + \beta_1^2 + \dots \beta_q^2)\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) = 0 \text{ pre } k = q+1, q+2, \dots$$

$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = 0 \text{ pre } k = q+1, q+2, \dots$$

- Výpočet prvých q autokorelácií:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) &= \mathbb{E}[(u_t - \beta_1 u_{t-1} - \cdots - \beta_q u_{t-q}) \times \\ &\quad (u_{t+k} - -\beta_1 u_{t+k-1} - \cdots - \beta_q u_{t+k-q})]\end{aligned}$$

- Postupne dostaneme

$$\begin{aligned}k = 1 &\Rightarrow \gamma(1) = (-\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \cdots + \beta_{q-1}\beta_q)\sigma^2 \\ k = 2 &\Rightarrow \gamma(2) = (-\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \cdots + \beta_{q-2}\beta_q)\sigma^2 \\ &\quad \ldots \\ k = q &\Rightarrow \gamma(q) = (-\beta_q)\sigma^2\end{aligned}$$

- *Pre konkrétny model je praktickejšie počítať to priamo, namiesto dosadzovania do týchto vzťahov (tie sú užitočné kvôli postupu)*
- ACF: autokovariancie vydelíme disperziou
- PACF: ACF dosadzujeme do všeobecného vzorca

Cvičenie

Uvažujme proces $x_t = 10 + u_t + 0.5u_{t-1} - 0.2u_{t-2} + 0.1u_{t-3}$

- Ukážte, že je invertovateľný.
- Vypočítajte jeho ACF
- Vypočítajte prvé tri hodnoty jeho PACF

Na kontrolu:

```
ARMAacf(ma=c(0.5,-0.2,0.1), lag.max = 4)[-1]
```

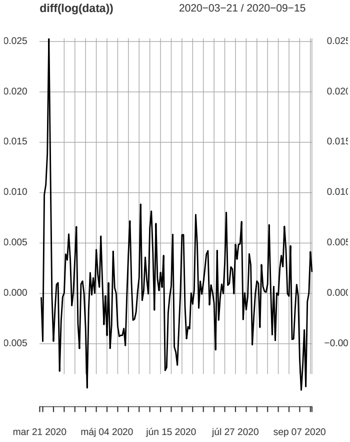
```
##           1           2           3           4
##  0.29230769 -0.11538462  0.07692308  0.00000000
```

```
ARMAacf(ma=c(0.5,-0.2,0.1), lag.max = 3, pacf = TRUE)
```

```
## [1]  0.2923077 -0.2195911  0.2093677
```

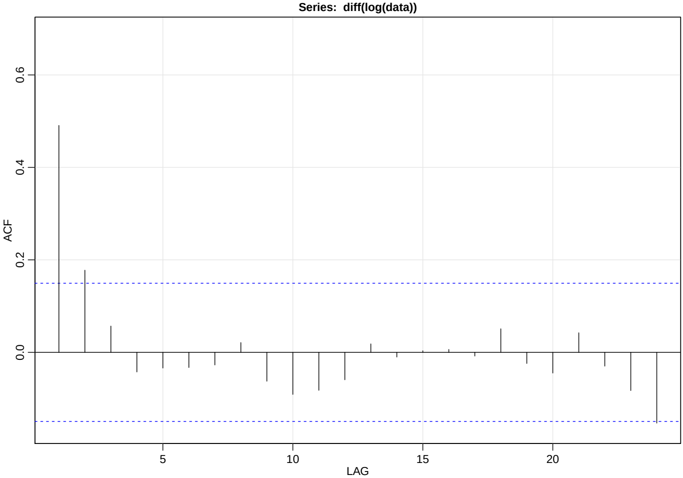
Reálne dáta

```r
library(quantmod)
data <- getSymbols.oanda("GBP/USD", auto.assign=FALSE)
```



Budeme modelovať percentuálnu zmenu výmenného kurzu

```
acf1(diff(log(data)))
```



Odhadneme MA(2) model:

```
##        Estimate     SE t.value p.value
## ma1      0.5164 0.0725  7.1242  0.0000
## ma2      0.1303 0.0750  1.7384  0.0839
## xmean    0.0006 0.0005  1.1641  0.2460
```

Rezíduá nám potvrdia vhodnosť modelu: