

# ARMA modely III. - zmiešané ARMA procesy

Beáta Stehlíková

2-EFM-102 Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

## Motivácia

## Kombinácia AR a MA členov

- ▶ Chceli by sme skombinovať AR aj MA členy
- ▶ Odhadneme ACF a PACF z dát a nepodobajú sa ani na AR, ani na MA proces
- ▶ Žiadny z AR a MA modelov nepripúšťa možnosť, že sa ani ACF, ani PACF nevynuluje po konečnom počte členov

- ▶ Pripomeňme si:

|                       | AR( $p$ )          | MA( $q$ )          |
|-----------------------|--------------------|--------------------|
| ACF( $k$ )            | nenulová           | nulová pre $k > q$ |
| PACF( $k$ )           | nulová pre $k > p$ | nenulová           |
| MA( $\infty$ ) - Wold | nekonečná suma     | konečná suma       |
| AR( $\infty$ )        | konečná suma       | nekonečná suma     |

- ▶ Žiadny z týchto modelov nepripúšťa možnosť, že **ani ACF, ani PACF sa nevynuluje** po konečnom počte členov
- ▶ Na to by sme potrebovali proces **s nekonečnou AR aj MA reprezentáciou**
- ▶ Uvidíme, že túto vlastnosť majú **zmiešané ARMA modely** (zmiešané = AR aj MA členy)

## Model ARMA(1,1)

## Definícia, stacionarita, invertovateľnosť

## Definícia

- ▶ Nech  $u_t$  je biely šum, definujme ARMA(1,1) proces ako

$$x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1},$$

pričom  $\alpha \neq \beta$  (k tej podmienke sa ešte vrátíme)

- ▶ Zápis pomocou operátora  $L$ :

$$(1 - \alpha L)x_t = \delta + (1 - \beta L)u_t \quad (1)$$



## Woldova reprezentácia a stacionarita

- ▶ Vyjadríme z (1) proces  $x_t$ :

$$x_t = (1 - \alpha L)^{-1} \delta + (1 - \alpha L)^{-1} (1 - \beta L) u_t,$$

- ▶ Inverzný operátor  $(1 - \alpha L)^{-1}$  existuje pre  $|\alpha| < 1$  (podmienka stacionarity pre AR(1) proces), v tom prípade

$$(1 - \alpha L)^{-1} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots$$

- ▶ Podmienka stacionarity ARMA(1,1) procesu
  - ▶ je teda rovnaká ako pre AR(1) proces
  - ▶ je ňou nerovnosť  $|\alpha| < 1$
  - ▶ to sa dá zapísať aj tak, že koreň polynómu  $1 - \alpha L$  je mimo jednotkového kruhu

- Woldova reprezentácia potom je

$$\begin{aligned}x_t &= \frac{\delta}{1-\alpha} + (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 \dots)(1 - \beta L)u_t \\ &= \frac{\delta}{1-\alpha} + u_t + (\alpha - \beta)u_{t-1} + \alpha(\alpha - \beta)u_{t-2} + \dots \quad (2)\end{aligned}$$

teda jej koeficienty sú

$$\phi_0 = 1, \phi_1 = \alpha - \beta, \phi_2 = \alpha(\alpha - \beta), \dots, \phi_k = \alpha^{k-1}(\alpha - \beta)$$

## O podmienke $\alpha \neq \beta$

- ▶ Máme Woldovu reprezentáciu

$$x_t = \frac{\delta}{1 - \alpha} + u_t + (\alpha - \beta)u_{t-1} + \alpha(\alpha - \beta)u_{t-2} + \dots$$

- ▶ Ak by bolo  $\alpha = \beta$ , tak máme

$$x_t = \frac{\delta}{1 - \alpha} + u_t$$

a teda náš proces by bol iba biely šum posunutý o konštantu.

## Invertovateľnosť

- ▶ Vyjadríme z (1) proces  $u_t$ , aby sme dostali proces  $x_t$  vyjadrený pomocou jeho starších hodnôt a aktuálnej hodnoty bieleho šumu

$$\begin{aligned} -\delta + (1 - \alpha L)x_t &= (1 - \beta L)u_t \\ -(1 - \beta L)^{-1}\delta + (1 - \beta L)^{-1}(1 - \alpha L)x_t &= u_t \end{aligned}$$

- ▶ Vieme, že podmienkou pre existenciu  $(1 - \beta L)^{-1}$  je nerovnosť  $|\beta| < 1$
- ▶ Táto podmienka invertovateľnosti sa dá zapísať aj tak, že koreň polynómu  $1 - \beta L$  musí byť mimo jednotkového kruhu

## Zhrnutie

- ▶ Uvažujeme proces

$$(1 - \alpha L)x_t = \delta + (1 - \beta L)u_t$$

- ▶ Podmienka *stacionarity*
  - ▶ koreň polynómu  $1 - \alpha L$  mimo jednotkového kruhu
  - ▶ *závisí teda iba od AR časti*
- ▶ Podmienka *invertovateľnosti*
  - ▶ koreň polynómu  $1 - \beta L$  mimo jednotkového kruhu
  - ▶ *závisí teda iba od MA časti*

## Cvičenie

Odvodte (t. j. spravte všetky kroky odvodenia, nedosadzujte do získaných všeobecných výsledkov) Woldovu reprezentáciu ARMA(1,1) procesu

$$x_t = 2 + 0.5x_{t-1} + u_t - 0.7u_{t-1}$$

## Model ARMA(p,q)

## Definícia, stacionarita, invertovateľnosť



## Definícia

- Nech  $u_t$  je biely šum, definujme ARMA(p,q) proces ako

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \dots - \beta_q u_{t-q},$$

teda v operátorovom tvare

$$(1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p)x_t = \delta + (1 - \beta_1 L - \dots - \beta_q L^q)u_t,$$

resp. po označení polynómov

$$\alpha(L)x_t = \delta + \beta(L)u_t$$

- Požadujeme, aby polynómy  $\alpha(L), \beta(L)$  nemali spoločné korene (k tejto podmienke sa vrátíme, ide o zovšeobecnenie podmienky  $\alpha \neq \beta$  z ARMA(1,1) procesu)

## Woldova reprezentácia a stacionarita

- Vyjadríme proces  $x_t$ :

$$x_t = \alpha(L)^{-1} \delta + \alpha(L)^{-1} \beta(L) u_t,$$

- Potrebujeme  $\alpha(L)^{-1} \beta(L)$ :

$$\alpha(L)^{-1} \beta(L) = \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots$$

$$\beta(L) = \alpha(L) (\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots)$$

$$\begin{aligned} \beta(L) &= (1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p) \\ &\quad \times (\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) \end{aligned}$$

roznásobíme a porovnáme mocniny pri  $L^j$

- ▶ Pre koeficienty  $\psi_j$  Woldovej reprezentácie dostaneme
  - ▶ diferenčnú rovnicu  $\psi_k - \alpha_1\psi_{k-1} - \dots - \alpha_p\psi_{k-p} = 0$
  - ▶ začiatočné podmienky
- ▶ Kvôli požiadavke na konvergenciu sumy  $\sum \psi_j^2$  musia byť korene charakteristického polynómu  $\lambda^p - \alpha_1\lambda^{p-1} - \dots - \alpha_{p-1}\lambda - \alpha_p$  v absolútnej hodnote menšie ako 1, teda korene polynómu  $\alpha(L)$  musia byť v absolútnej hodnote väčšie ako 1

## Invertovateľnosť

- ▶ Z predpisu pre ARMA proces

$$\alpha(L)x_t = \delta + \beta(L)u_t$$

potrebujeme vyjadriť  $u_t$ :

$$\beta(L)^{-1}\alpha(L)x_t = \beta(L)^{-1}\delta + u_t$$

- ▶ Analogicky ako pri odvodzovaní stacionarity dostaneme, že toto sa dá spraviť, ak korene polynómu  $\beta(L)$  sú v absolútnej hodnote väčšie ako 1
- ▶ Geometricky: korene polynómu

$$\beta(L) = 1 - \beta_1L - \dots - \beta_qL^q$$

musia byť mimo jednotkového kruhu

## Príklad

Overíme stacionaritu a invertovateľnosť ARMA procesu

$$x_t = 2 + 0.5x_{t-1} - 0.15x_{t-2} + u_t - 0.35u_{t-1} + 0.6u_{t-2}$$

**Riešenie:** Proces prepíšeme ako

$$(1 - 0.5L + 0.15L^2)x_t = 2 + (1 - 0.35L + 0.6L^2)u_t$$

```
abs(polyroot(c(1, -0.5, 0.15)))
```

```
## [1] 2.581989 2.581989
```

```
abs(polyroot(c(1, -0.35, 0.6)))
```

```
## [1] 1.290994 1.290994
```

## Príklad

Budúci týždeň na teoretickom cvičení:

- ▶ zadaný ARMA proces
- ▶ overíme stacionaritu, nájdeme Woldovu reprezentáciu
- ▶ overíme invertovateľnosť, nájdeme reprezentáciu v tvare  $AR(\infty)$

## Momenty, ACF, PACF

## Stredná hodnota

- Zoberme stacionárny ARMA proces

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \dots - \beta_q u_{t-q}$$

- Správime strednú hodnotu z oboch strán.
- Zo stacionarity vyplýva, že v každom čase  $s$  je stredná hodnota rovnaká, označme ju  $\mu$ :

$$\mu = \delta + \alpha_1 \mu + \dots + \alpha_p \mu \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$$



## Disperzia, autokovariancie

- ▶ Môžeme znovu predpokladať, že  $\delta = 0$  (posun procesu o konštantu nezmení disperziu ani autokovariancie)
- ▶ Proces

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \dots - \beta_q u_{t-q}$$

vynásobíme  $x_{t-s}$  (pre  $s = 0, 1, 2, \dots$ ) a spravíme strednú hodnotu:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \alpha_1 \gamma(s-1) + \dots + \alpha_p \gamma(s-p) \\ &\quad + \mathbb{E}(u_t x_{t-s}) - \beta_1 \mathbb{E}(u_{t-1} x_{t-s}) - \dots - \beta_q \mathbb{E}(u_{t-q} x_{t-s}) \end{aligned}$$

- ▶ Pre  $s > q$  sú nulové všetky stredné hodnoty

$$\mathbb{E}(u_t x_{t-s}), \mathbb{E}(u_{t-1} x_{t-s}), \dots, \mathbb{E}(u_{t-q} x_{t-s})$$

- ▶ Vtedy platí diferenčná rovnica

$$\gamma(s) = \alpha_1 \gamma(s-1) + \dots + \alpha_p \gamma(s-p) \quad (3)$$

- ▶ Táto diferenčná rovnica potrebuje  $p$  začiatočných podmienok
- ▶ Začiatočné podmienky sa počítajú zo sústavy rovníc
- ▶ Preto (3) budeme používať pre  $s > \max(p, q)$
- ▶ Začiatočné podmienky dostaneme z rovníc získaných pre  $s = 0, 1, \dots, \max(p, q)$

## Autokorelačná funkcia

- ▶ Rovnicu (3) vydelíme disperziou  $\gamma(0)$  a dostaneme diferenčnú rovnicu pre autokorelácie  $\rho(s)$

$$\rho(s) = \alpha_1 \rho(s-1) + \dots + \alpha_p \rho(s-p)$$

pre  $s > \max(p, q)$

- ▶ Diferenčná rovnica pre ACF nezávisí od MA časti, od tej závisia len začiatočné podmienky

## Príklad

**Vo videu:** Uvažujme proces

$$x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + u_t - \frac{1}{3}u_{t-1}$$

Odvodíme diferenčnú rovnicu pre

- ▶ autokovariancie
- ▶ autokorelácie

**Cvičenie:** Rovnakým postupom ukážte, že pre všeobecný stacionárny ARMA(1,1) proces  $x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1}$  platí:

- ▶ Jeho disperzia je  $\mathbb{D}(x_t) = \frac{1+\beta^2-2\alpha\beta}{1-\alpha^2}\sigma^2$ , kde  $\sigma^2$  je disperzia bieleho šumu  $u$
- ▶ ACF je daná predpisom  $\rho(k) = \alpha^{k-1}\rho(1)$ , pričom 
$$\rho(1) = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{1+\beta^2-2\alpha\beta}$$

## Parciálna autokorelačná funkcia

- ▶ Dosadzujeme korelácie do všeobecných vzťahov pre ACF
- ▶ UPOZORNENIE: **NEPLATÍ**, že  $ACF(k) = 0$  pre  $k > q$  a  $PACF(k) = 0$  pre  $k > p$  (v minulých rokoch častá chyba pri komentovaní ACF a PACF)
- ▶ Napríklad pre nasledovný ARMA(2, 2) proces:

```
ARMAacf(ar = c(1.2, -0.8), ma = c(-0.2, -0.9), lag.max = 4
```

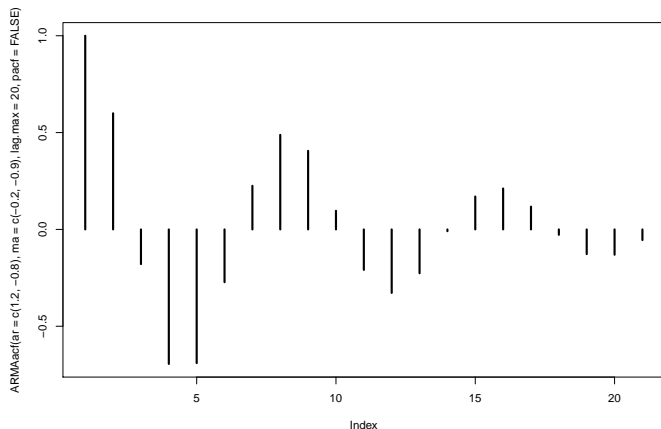
```
##           0           1           2           3           4
##  1.0000000  0.5996344 -0.1791590 -0.6946984 -0.6903108
```

```
ARMAacf(ar = c(1.2, -0.8), ma = c(-0.2, -0.9), lag.max = 4
```

```
## [1]  0.5996344 -0.8411742  0.0400243 -0.4416171
```

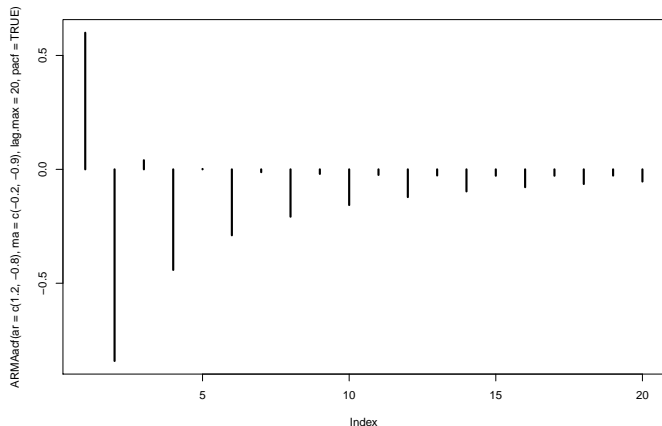
# ACF

```
plot(ARMAacf(ar = c(1.2, -0.8), ma = c(-0.2, -0.9),  
            lag.max = 20, pacf = FALSE), type = "h", lwd =
```



## # PACF

```
plot(ARMAacf(ar = c(1.2, -0.8), ma = c(-0.2, -0.9),  
            lag.max = 20, pacf = TRUE), type = "h", lwd =
```



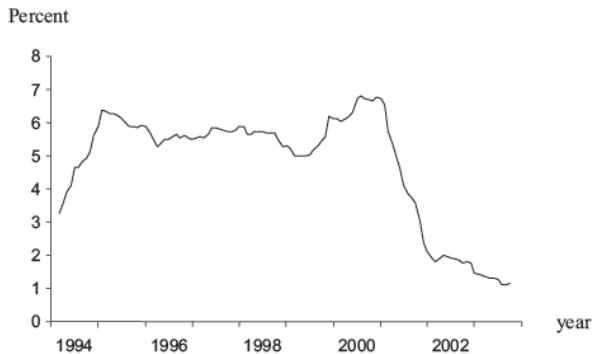
## Príklad: Reálne dáta



# Dáta

Prebraté z učebnice *Kirchgässner & Wolters, example 2.15*

- ▶ USA, marec 1994 - august 2003
- ▶  $USR_t$  je trojmesačná úroková miera



a) New York three months money market rate, 1994 - 2003

## Odhadnutý model

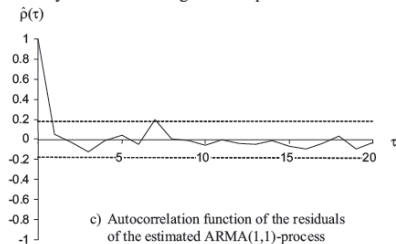
The following ARMA(1,1) model has been estimated for this time series:

$$\Delta\text{USR}_t = -0.006 + 0.831 \Delta\text{USR}_{t-1} + \hat{u}_t - 0.457 \hat{u}_{t-1},$$

$$(-0.73) \quad (10.91) \quad \quad \quad (-3.57)$$

$$\bar{R}^2 = 0.351, \quad \text{SE} = 0.166, \quad Q(10) = 7.897 \quad (p = 0.639).$$

The AR(1) as well as the MA(1) terms are different from zero at the 0.1 percent significance level. The autocorrelogram of the estimated residuals, which is also given in *Figure 2.10*, as well as the Box-Ljung Q statistic, which is calculated for this model with 12 autocorrelation coefficients (i.e. with 10 degrees of freedom), do not provide any evidence of a higher order process.



c) Autocorrelation function of the residuals of the estimated ARMA(1,1)-process with confidence intervals

## Otázky k modelu

- ▶ Ukážte, že získaný model je stacionárny a invertovateľný
- ▶ Vysvetlite tvrdenie: *“The autocorrelogram of the estimated residuals (...) not provide any evidence of a higher order process”*
- ▶ Píše sa: *“the Box-Ljung Q statistic, which is calculated for this model with 12 autocorrelation coefficients (i.e. with 10 degrees of freedom)...”*
  - ▶ sformulujte hypotézu, ktorá sa testuje
  - ▶ zdôvodnite počet stupňov voľnosti
  - ▶ aký je záver testu?

## Spoločné korene AR a MA časti

Pripomeňme si definíciu ARMA(p,q) procesu:

- ▶ Nech  $u_t$  je biely šum, definujme ARMA(p,q) proces ako

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \dots - \beta_q u_{t-q},$$

teda v operátorovom tvare

$$(1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p)x_t = \delta + (1 - \beta_1 L - \dots - \beta_q L^q)u_t,$$

resp. po označení polynómov

$$\alpha(L)x_t = \delta + \beta(L)u_t$$

- ▶ Požadujeme, aby polynómy  $\alpha(L), \beta(L)$  nemali spoločné korene
- ▶ Teraz sa pozrieme na túto podmienku na korene

- ▶ Majme “ARMA(2,2)” proces

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha L^2)x_t = \delta + (1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2)u_t$$

pričom polynómy majú tvar

$$1 - \alpha_1 L - \alpha L^2 = (1 - \gamma L)(1 - \gamma_1 L), 1 - \beta_1 L - \beta L^2 = (1 - \gamma L)(1 - \gamma_2 L),$$

teda majú spoločný koreň  $1/\gamma$

- ▶ Potom sa proces dá písať nasledovne:

$$\begin{aligned}(1 - \gamma L)(1 - \gamma_1 L)x_t &= \delta + (1 - \gamma L)(1 - \gamma_2 L)u_t \\ (1 - \gamma_1 L)x_t &= (1 - \gamma L)^{-1}\delta + (1 - \gamma_2 L)u_t\end{aligned}$$

- ▶ Ide teda v skutočnosti nie o ARMA(2,2), ale o ARMA(1,1) proces

## Blízke korene AR a MA časti pri práci s dátami

- ▶ Ak dostaneme blízky koreň AR a MA časti, treba namiesto ARMA(p,q) modelu skúsiť ARMA(p-1, q-1)
- ▶ **Príklad:**
  - ▶ Vygenerujeme dáta z ARMA(1,1) procesu a budeme pre ne odhadovať ARMA(2,2) model
  - ▶ Čo očakávame: malo by nám výjsť, že model treba zjednodušiť

```
set.seed(2020)
x <- arima.sim(model = list(ar = c(0.8), ma = c(0.5)),
               n = 100, sd = 1)
```

```
library(astsa)
model <- sarima(x, 2, 0, 2, details = FALSE)
model$fit$coef
```

```
##          ar1          ar2          ma1          ma2          xmean
## 0.3521183 0.2290491 1.0511979 0.2299059 0.6243467
```

```
ar.korene <- polyroot(c(1, -model$fit$coef[1:2]))
ma.korene <- polyroot(c(1, model$fit$coef[3:4]))
ar.korene
```

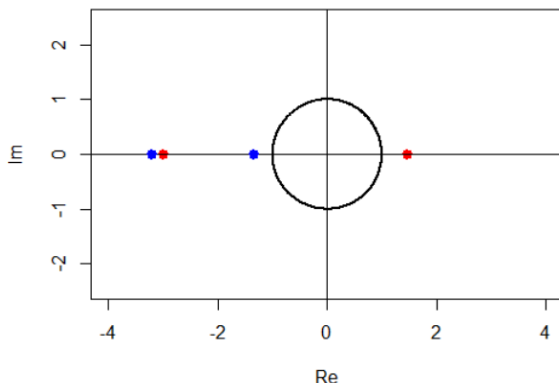
```
## [1] 1.457713-0i -2.995018+0i
```

```
ma.korene
```

```
## [1] -1.349736-0i -3.222561+0i
```



- ▶ Červené AR korene a modré MA korene:



- ▶ Blízky AR a MA koreň → mali by sme skúsiť namiesto ARMA(2,2) odhadnúť ARMA(1,1) (čo sedí, tak boli tie dáta generované)