

# Modelovanie volatility - GARCH modely

Beáta Stehlíková

2-EFM-102 Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

## Ceny akcií, ACF výnosov

## Dáta

- ▶ Týždenné ceny akcií pomocou balíka quantmod
- ▶ Vypočítame logaritmické výnosy
- ▶ Na začiatku semestra sme analyzovali autokorelácie takýchto dát

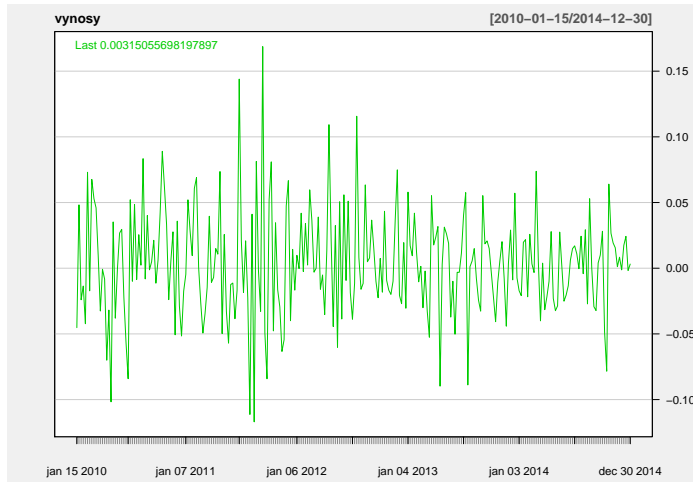
```
library(quantmod)
library(astsa)

getSymbols("EBAY", from = "2010-01-01", to = "2014-12-31",
          auto.assign = TRUE)
```

```
## [1] "EBAY"
```

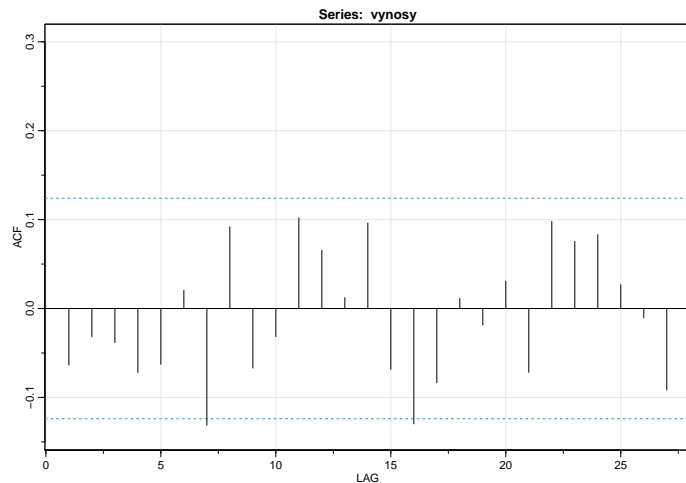
```
EBAY <- to.weekly(EBAY)
vynosy <- diff(log(EBAY$EBAY.Adjusted))[-1]
```

```
chartSeries(vynosy, theme = "white")
```



# ACF výnosov

`acf1(vynosy)`



## Modelovanie výnosov - posunutý biely šum

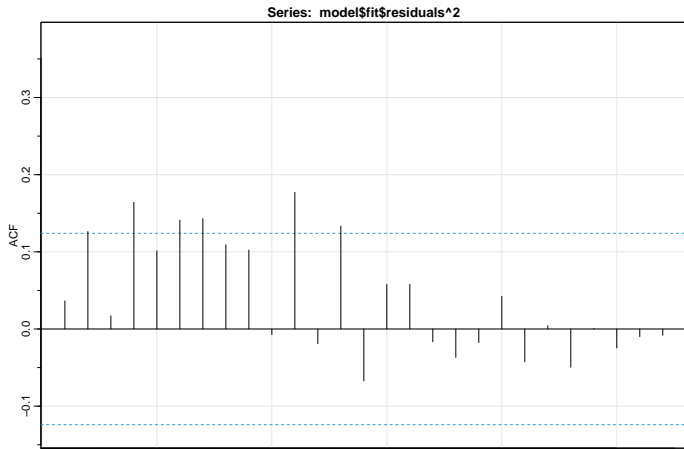
- ▶ Výnosy modelujeme ako biely šum posunutý o konštantu
- ▶ Rezíduá vyzierajú ako biely šum

```
sarima(vynosy, 0, 0, 0)
```

Problém: korelácia druhých mocnín rezíduí

## Druhé mocniny rezíduí

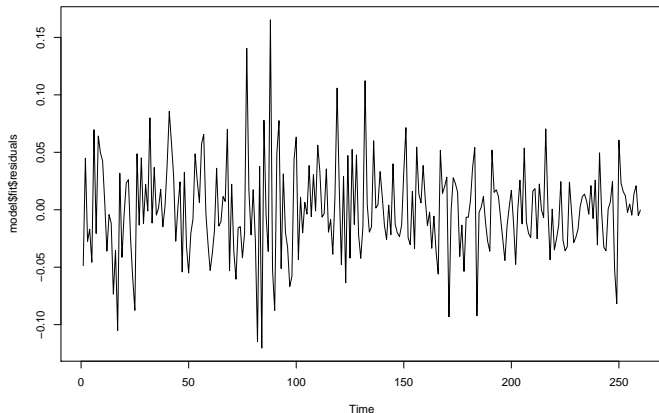
```
model <- sarima(vynosy, 0, 0, 0, details = FALSE)
acf1(model$fit$residuals^2)
```





## Ešte raz samotné rezíduá

```
plot(model$fit$residuals)
```



- ▶ Ak je absolútna hodnota rezídua malá, tak väčšinou nasleduje rezíduum tiež s malou absolútnou hodnotou
- ▶ Podobne za rezíduom s veľkou absolútnou hodnotou nasleduje často rezíduum s veľkou absolútnou hodnotou - môže byť kladné aj záporné, preto sa táto vlastnosť na ACF neprejavila
- ▶ Druhé mocniny ale kvôli tomu korelované sú - biely šum však túto vlastnosť nemá
- ▶ Možné vysvetlenie: nekonštantná disperzia
- ▶ Budeme teda modelovať disperziu šumu

## ARCH a GARCH modely

## ARCH model

## Definícia, ohraničenia na parametre

- ▶  $u_t$  nie je biely šum, ale  $u_t = \sqrt{\sigma_t^2} \eta_t$ , kde  $\eta_t$  je biely šum s normálnym rozdelením a jednotkovou disperziou, teda

$$u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

- ▶ **ARCH model** (*autoregressive conditional heteroskedasticity*)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2$$

- ▶ Ohraničenia na parametre:

- ▶ kladnosť disperzie:  $\omega > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \geq 0, \alpha_p > 0$

- ▶ stacionarita:  $\alpha_1 + \dots + \alpha_p < 1$

- ▶ Označme nepodmienenú strednú hodnotu  $s^2 = \mathbb{E}(\sigma_t^2)$ , potom:

$$s^2 = \omega + \alpha_1 s^2 + \dots + \alpha_p s^2 \Rightarrow s^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$$

## Nevýhody

- ▶ Nevýhody ARCH modelov:
  - ▶ malý počet členov  $u_{t-i}^2$  často nestačí - vo štvorcoch rezíduí je stále autokorelácia
  - ▶ pri väčšom počte členov sú koeficienty často nesignifikantné
- ▶ Zovšeobecnenie: **GARCH modely**, odstraňujú tieto problémy

## GARCH model

## Definícia, ohraničenia na parametre

- ▶ **GARCH(p,q)** model (*generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2$$

- ▶ Ohraničenia na parametre:
  - ▶ kladnosť disperzie:  $\omega > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \geq 0, \alpha_p > 0, \beta_1, \dots, \beta_{q-1} \geq 0, \beta_q > 0$
  - ▶ stacionarita:  $(\alpha_1 + \dots + \alpha_p) + (\beta_1 + \dots + \beta_q) < 1$
- ▶ Často sa používa GARCH(1,1)



## GARCH modely v R-ku

## Postup

- ▶ Balík `fGarch`
- ▶ Funkcia `garchFit`, model sa píše v tvare napríklad `arma(1,1)`  
+ `garch(1,1)`
- ▶ parametrom `trace = FALSE` zrušíme vypisovanie podrobností  
o konvergencii optimalizačného procesu

## Prístup k hodnotám z výstupu

Napríklad:

- ▶ `@fitted` - fitované hodnoty
- ▶ `@residuals` - rezíduá
- ▶ `@h.t` - odhadnutá disperzia
- ▶ `@sigma.t` - odhadnutá štandardná odchýlka

**Štandardizované rezíduá:**

- ▶ rezíduá vydelené ich štandardnou odchýlkou
- ▶ majú byť bielym šumom
- ▶ aj ich druhé mocniny majú byť bielym šumom

## Výnosy EBAY - pokračovanie

- ▶ Odhadneme model *konštanta + šum*, ale na modelovanie šumu skúsime použiť ARCH a ARCH modely
- ▶ ARCH(1) model:

```
library(fGarch)
```

```
# arch(1) = garch(1, 0)
```

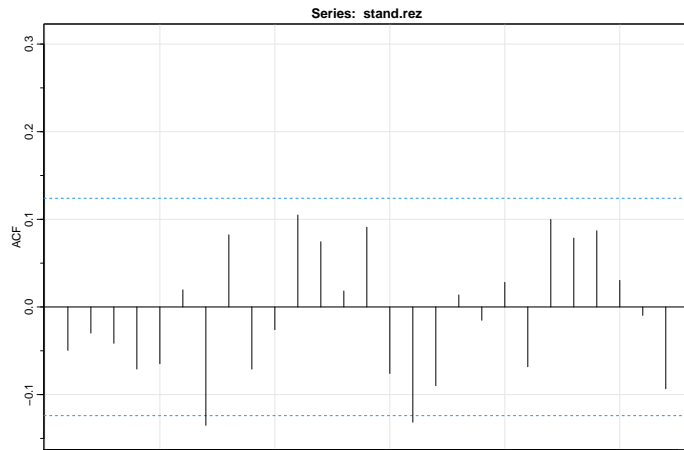
```
model10 <- garchFit(~garch(1,0), data = vynosy, trace = FALSE)
```

Zobrazíme:

- ▶ ACF štandardizovaných rezíduí
- ▶ ACF druhých mocnín štandardizovaných rezíduí
- ▶ `summary` s testami štandardizovaných rezíduí a ich druhých mocnín + LM ARCH testom (nulová hypotéza je homoskedasticita)

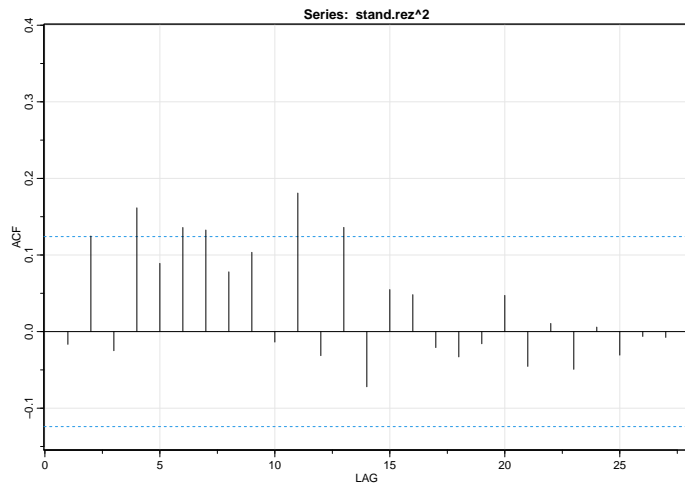
## ARCH(1) - štandardizované rezíduá

```
stand.rez <- model10@residuals/model10@sigma.t  
acf1(stand.rez)
```



# ARCH(1) - druhé mocniny štandardizovaných rezíduí

```
acf1(stand.rez^2)
```



## ARCH(1): testy

## Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi <sup>2</sup>	29.30932	4.320771e-07
Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9821506	0.002409571
Ljung-Box Test	R	Q(10)	12.19182	0.2724241
Ljung-Box Test	R	Q(15)	20.71019	0.1463473
Ljung-Box Test	R	Q(20)	28.1477	0.1059487
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(10)	27.69651	0.002018554
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(15)	44.28841	9.909431e-05
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(20)	46.07071	0.0007882045
LM Arch Test	R	TR <sup>2</sup>	26.03807	0.01060155

## ARCH(2): testy

## Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi <sup>2</sup>	34.77969	2.803408e-08
Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9815247	0.001870525
Ljung-Box Test	R	Q(10)	10.66085	0.3845436
Ljung-Box Test	R	Q(15)	19.14786	0.2071117
Ljung-Box Test	R	Q(20)	26.70303	0.1438278
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(10)	14.1969	0.1641984
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(15)	27.86506	0.02242916
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(20)	30.04476	0.06913165
LM Arch Test	R	TR <sup>2</sup>	20.07658	0.06565113



## ARCH(3): testy

## Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi <sup>2</sup>	34.11757	3.903591e-08
Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9816657	0.00197985
Ljung-Box Test	R	Q(10)	10.61708	0.3881183
Ljung-Box Test	R	Q(15)	19.06902	0.210623
Ljung-Box Test	R	Q(20)	26.57077	0.1477777
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(10)	14.10382	0.1683087
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(15)	27.69602	0.02355115
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(20)	29.89999	0.07149039
LM Arch Test	R	TR <sup>2</sup>	20.00048	0.06707688

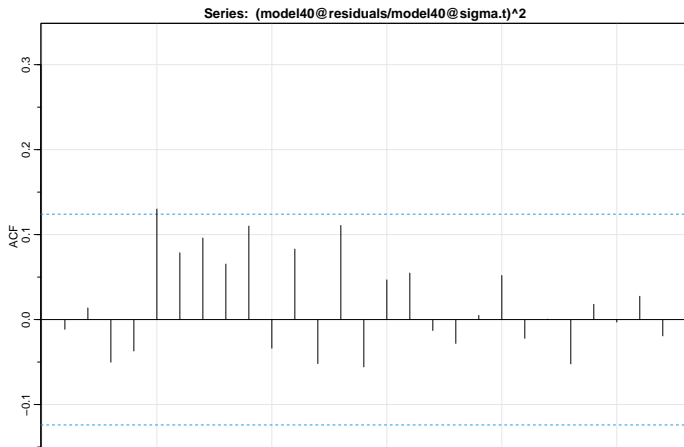
## ARCH(4): testy

## Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	$\chi^2$	12.83554	0.001632289
Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9881233	0.03079696
Ljung-Box Test	R	Q(10)	10.45921	0.4011694
Ljung-Box Test	R	Q(15)	18.61209	0.2318531
Ljung-Box Test	R	Q(20)	25.86172	0.1704277
Ljung-Box Test	$R^2$	Q(10)	14.51946	0.1505883
Ljung-Box Test	$R^2$	Q(15)	21.99281	0.1079927
Ljung-Box Test	$R^2$	Q(20)	23.86874	0.2481727
LM Arch Test	R	$TR^2$	18.1817	0.1102839

## ARCH(4): ACF druhých mocnín rezíduí

```
model40 <- garchFit(~garch(4,0), data = vynosy, trace = FALSE)
acf1((model40@residuals/model40@sigma.t)^2)
```



## ARCH(4): nesignifikantné koeficienty modelu

### Error Analysis:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
mu	4.116e-03	2.436e-03	1.690	0.0911	.
omega	1.165e-03	2.014e-04	5.783	7.32e-09	***
alpha1	3.953e-02	1.283e-01	0.308	0.7579	
alpha2	1.266e-01	8.064e-02	1.570	0.1164	
alpha3	1.000e-08	1.528e-01	0.000	1.0000	
alpha4	1.101e-01	8.175e-02	1.347	0.1780	
---					
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1					

## GARCH(1,1)

```
model11 <- garchFit(~garch(1,1), data = vynosy, trace = FALSE)
```

## Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi <sup>2</sup>	11.47383	0.003224707
Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9873551	0.0219362
Ljung-Box Test	R	Q(10)	10.14321	0.4280201
Ljung-Box Test	R	Q(15)	17.36923	0.297275
Ljung-Box Test	R	Q(20)	23.60515	0.2600655
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(10)	9.638904	0.4727237
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(15)	16.91175	0.3241676
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(20)	18.88114	0.5295636
LM Arch Test	R	TR <sup>2</sup>	12.11644	0.4363738

## GARCH(1,1): koeficienty

Error Analysis:

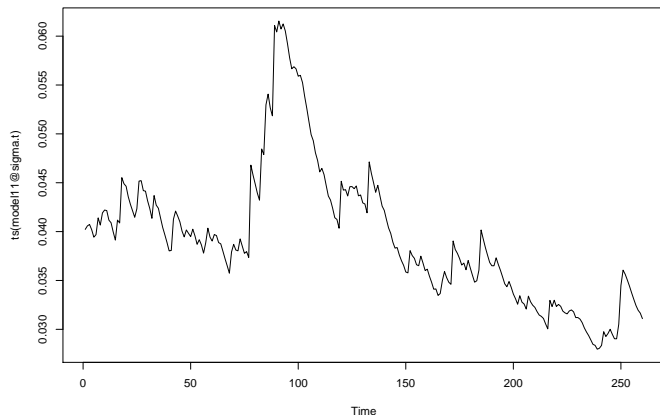
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	3.360e-03	2.345e-03	1.432	0.1520
omega	2.330e-05	3.533e-05	0.660	0.5096
alpha1	4.326e-02	2.402e-02	1.801	0.0717 .
beta1	9.402e-01	3.897e-02	24.129	<2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

## Odhadnutá štandardná odchýlka

```
plot(ts(model11@sigma.t))
```



## Iný prístup k rôznym grafom

```
> plot(model11)
```

Make a plot selection (or 0 to exit):

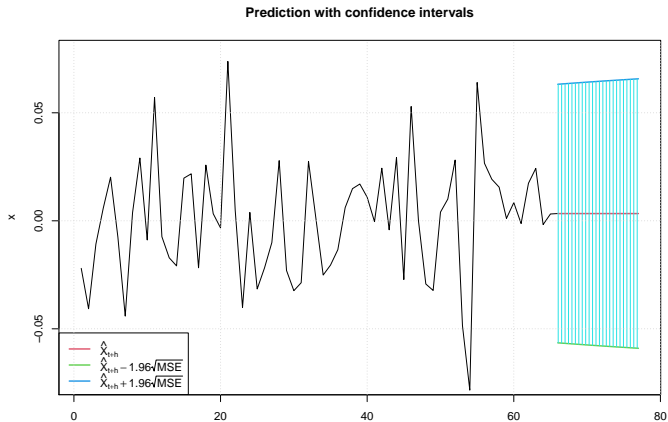
- 1: Time Series
- 2: Conditional SD
- 3: Series with 2 Conditional SD Superimposed
- 4: ACF of Observations
- 5: ACF of Squared Observations
- 6: Cross Correlation
- 7: Residuals
- 8: Conditional SDs
- 9: Standardized Residuals
- 10: ACF of Standardized Residuals
- 11: ACF of Squared Standardized Residuals
- 12: Cross Correlation between  $r^2$  and  $r$
- 13: QQ-Plot of Standardized Residuals



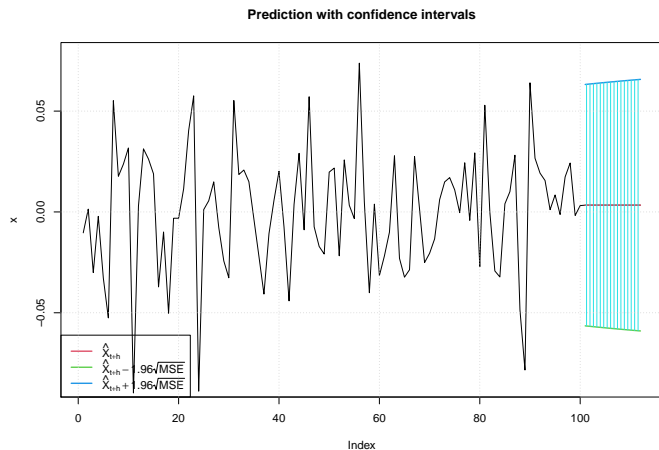
## Predikcie v GARCH modeloch

- Predikcie pomocou funkcie `predict`, parameter `n.ahead` určuje počet pozorovaní

```
predikcie <- predict(model11, n.ahead = 12, plot = TRUE)
```

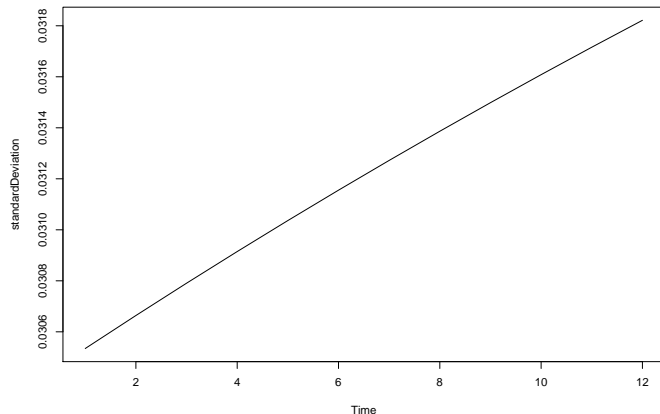


- ▶ Parametrom `nx` sa dá zmeniť počet pozorovaní z dát, ktoré sa vykreslia (tu je `nx = 100`):



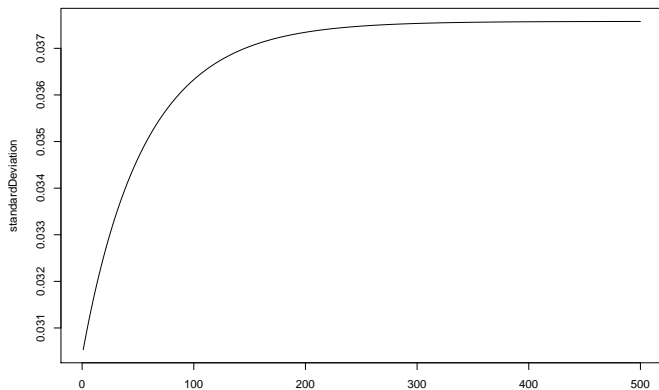
- ▶ Predikovaný vývoj štandardnej odchýlky:

```
plot(ts(predikcie[3]))
```



► Predikovaný vývoj štandardnej odchýlky

```
predikcie <- predict(model11, n.ahead = 500, plot = FALSE)  
plot(ts(predikcie[3]))
```



# Cvičenie

Zopakujte pre dáta z dlhšieho obdobia:

```
getSymbols("EBAY", from = "2005-01-01", to = "2019-12-31",  
           auto.assign = TRUE)
```

Modelujeme logaritmické výnosy.

- ▶ Zhodnoťte model konštanta + biely šum.
- ▶ Odhadnite ARCH modely a testujte ich štandardizované rezíduá.
- ▶ Odhadnite GARCH(1, 1) model.
- ▶ Nájdite vhodný ARCH/GARCH model pre výnosy
- ▶ Spravte predikciu štandardnej odchýlky výnosov.

## Aplikácia: Value at risk



## Čo je Value at risk (VaR)

- ▶ Je to vlastne kvantil
- ▶ Nech  $X$  je hodnota portfólia, potom

$$\mathbb{P}(X \leq VaR) = \alpha,$$

napr.  $\alpha = 0.05$

- ▶ Štandardne GARCH predpokladá normálne rozdelenie (dajú sa odhadovať aj iné)  $\rightarrow$  vieme počítat kvantily
- ▶ Nedostatky:
- ▶ predpoklad normality
- ▶ sú aj lepšie miery rizika ako VaR

## Spravíme vo videu

- ▶ Začneme po  $N$  hodnotách výnosov
- ▶ Odhadneme GARCH(1,1) model
- ▶ Spravíme predikciu pre štandardnú odchýlku a pomocou nej zostrojíme VaR na nasledujúci týždeň
- ▶ Každý týždeň posunieme okno s dátami (máme nové pozorovanie), odhadneme znovu GARCH a vypočítame nové VaR

## Iné modely pre volatilitu

## ▶ **Threshold GARCH**

- ▶  $u_t > 0$  - *good news*,  $u_t < 0$  - *bad news*
  - ▶ TARCH umožňuje, aby mali na volatilitu rôzny vplyv
  - ▶ *leverage effect* - väčší vplyv na volatilitu majú *bad news*
- ▶ Nemodelujeme disperziu (ako v ARCH a GARCH modeloch), ale
- ▶ jej logaritmus - **exponential GARCH**
  - ▶ ľubovoľnú mocninu štandardnej odchýlky - **power GARCH**
- ▶ a ďalšie...