Úvod, základné pojmy, testovanie bieleho šumu

Beáta Stehlíková

2-EFM-102 Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Analýza časových radov: úvod

Klasický vzorový príklad

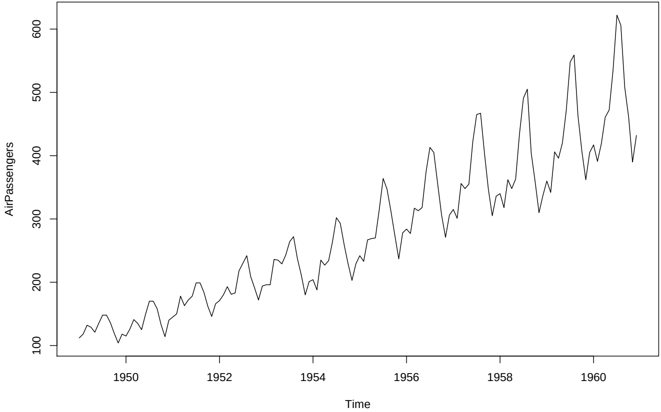
- Pozrieme sa na dáta - počty cestujúcich aerolinkami
- Dáta `AirPassengers` z balíka `datasets`
- Popis dát v dokumentácii (pomocou `?AirPassengers`):
  - The classic Box & Jenkins airline data. Monthly totals of international airline passengers, 1949 to 1960.
  - A monthly time series, in thousands.

```r
library(datasets)
AirPassengers
```

```
##      Jan Feb Mar Apr May Jun Jul Aug Sep Oct Nov Dec
## 1949 112 118 132 129 121 135 148 148 136 119 104 118
## 1950 115 126 141 135 125 149 170 170 158 133 114 140
## 1951 145 150 178 163 172 178 199 199 184 162 146 166
## 1952 171 180 193 181 183 218 230 242 209 191 172 194
## 1953 196 196 236 235 229 243 264 272 237 211 180 201
```

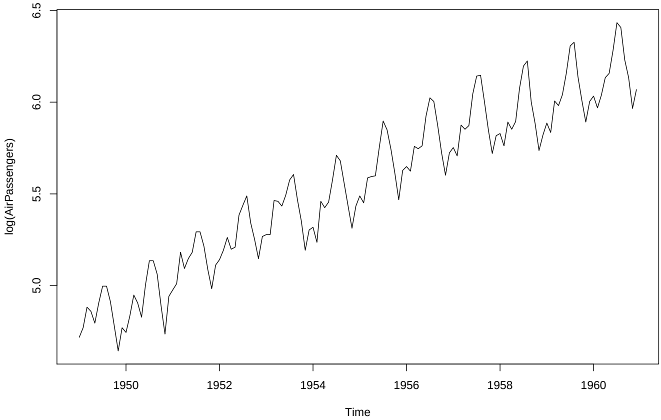
Klasický vzorový príklad - priebeh dát

Stačí `plot(AirPassengers)` a vďaka časovej štruktúre dát máme:



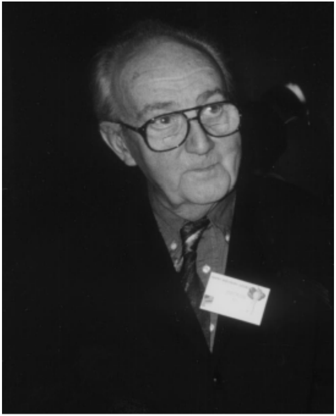
Klasický vzorový príklad - priebeh dát

Po zlogaritmovaní sa stabilizuje volatilita:



Box a Jenkins

Budeme sa zaoberať najmä **prístupom od Boxa a Jenkinsa**.



Rozhovor s G. E. P. Boxom po oslave jeho 80. narodenín (1999), ako sa začal zaujímať o štatistiku a ďalšie otázky.

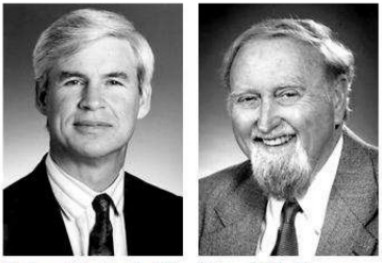
> *The first paper you wrote with Jenkins has been considered as a breakthrough in statistics.*

Peña, D. (2001). George Box: An interview with the International Journal of Forecasting. International Journal of Forecasting, 17(1), 1-9.

Odkaz na článok s rozhovorom:
https:// www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169207000000613

Modelovanie volatility

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2003 was divided equally between Robert F. Engle III *for methods of analyzing economic time series with time-varying volatility (ARCH)* and Clive W.J. Granger for methods of analyzing economic time series with common trends (cointegration).



ARCH model a jeho zovšeobecnenia budú tiež obsahom nášho kurzu

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2003. NobelPrize.org. Nobel Media AB 2020. <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2003/summary/>

Základné pojmy

Obsah

- Časový rad, momenty
- Stacionarita, ergodicita
- Biely šum
- Autokorelačná funkcia
- Woldova reprezentácia
- Testy o autokorelačnej funkcii

Momenty časového radu

- Náhodný proces $x_1, x_2, \ldots, x_T$ je úplne charakterizovaný svojou T-rozmernou distribučnou funkciou
- Obvykle sa zameriavame na **prvé dva momenty**:
  - stredná hodnota $E(x_t)$
  - variancia $D(x_t)$
  - kovariancie $Cov(x_t, x_s)$, tzv. autokovariancie

Stacionarita a ergodicita

- Väčšinou máme len jeden časový rad - jednu realizáciu náhodného procesu $\rightarrow$ aby sa dala robiť štatistická inferencia, potrebujeme dodatočné predpoklady
- Napríklad: na to, aby sme odhadli strednú hodnotu, ... potrebujeme viac ako jednu realizáciu tejto náhodnej premennej
- Ergodický proces - výberové momenty počítané z časového radu s T pozorovaniami konvergujú pre $T \rightarrow \infty$ k zodpovedajúcim momentom
- Tento koncept má zmysel iba ak predpokladáme, že $E(x_t) = \mu$, $D(x_t) = \sigma^2, \ldots$ pre každé t

Stacionarita a ergodicita

- Silná stacionarita: združená distribučná funkcia sa nemení pri posune v čase
- Obvykle sa pracuje so slabším predpokladom $\rightarrow$ slabá stacionarita:

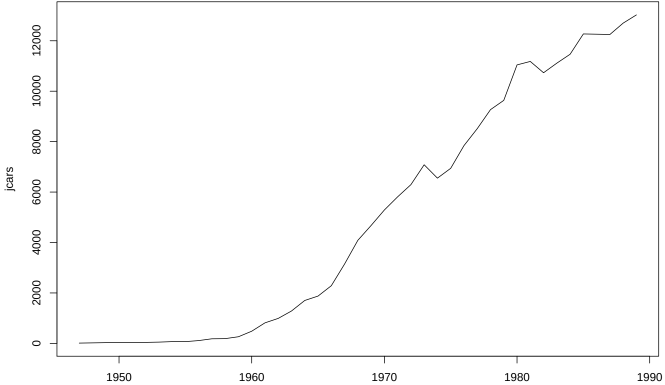
$$\begin{aligned} E(x_t) &= \mu \ \forall t & (1) \\ Cov(x_t, x_s) &= \gamma(|t-s|) \ \forall t, s & (2) \end{aligned}$$

- Z (2) vyplýva, že $D(x_t) = const.$ pre všetky t.
- Ďalej budeme pod stacionaritou rozumieť slabú stacionaritu.

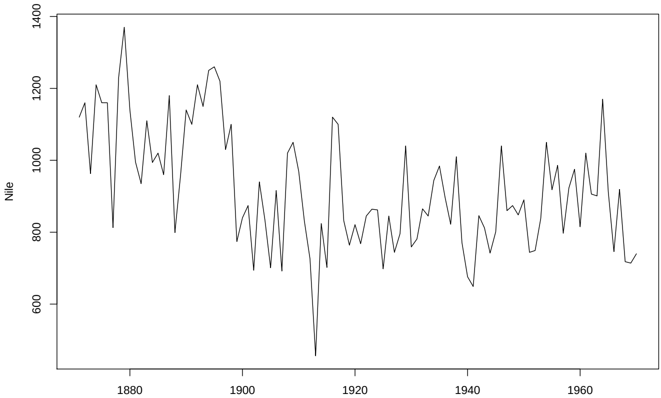
Stacionarita - dáta

- *Stacionárny časový rad*:
  - dáta sú priťahované k určitej rovnovážnej hodnote, okolo ktorej oscilujú
- *Nestacionárny časový rad*:
  - napríklad trend: rastúci trend $\rightarrow$ stredná hodnota nie je konštantná $\rightarrow$ proces nie je stacionárny
  - neskôr budeme vidieť aj iné druhy nestacionarity (napr. zatiaľ nejasne znejúci pojem *jednotkový koreň* v sylabe predmetu)

```
# PRIKLAD 1
# Japanese motor vehicle production in thousand (1947-1989)
library(fma)
plot(jcars)
```



```
# PRIKLAD 2
# Rocny prietok Nilu v Aswane v 10^8 m^3 (stavba priehrad)
library(datasets)
plot(Nile)
```

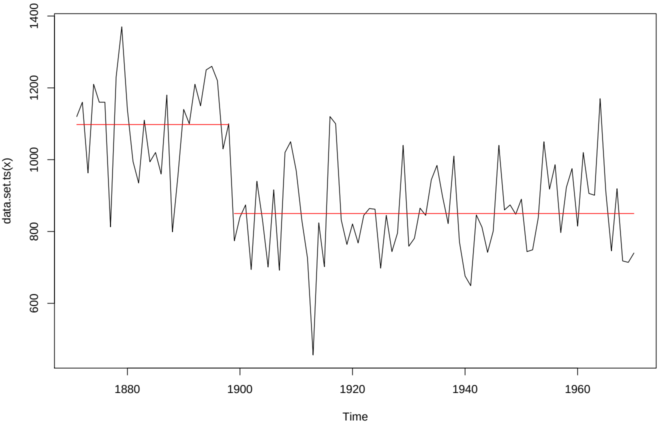


Nepovinné poznámky: Hľadanie bodov zmeny

- Tutoriál (2017) na stránke: http://members.cbio.mines-paristech.fr/~thocking/change-tutorial/RK-CptWorkshop.html
- Diplomovka Lucie Macháčkovej, zmeny v prietokoch slovenských riek (2020, školiteľ: doc. Pekár)
- Článok s prehľadom rôznych metód: *Aminikhanghahi, S., & Cook, D. J. (2017). A survey of methods for time series change point detection. Knowledge and information systems, 51(2), 339-367.* https://link.springer.com/article/10.1007/s10115-016-0987-z

```
# pozrime sa na prietoky Nilu:
library(changepoint)
zmena <- cpt.mean(Nile)
plot(zmena)
```

Výstup z predchádzajúceho slajdu:



Biely šum

Definícia bieleho šumu

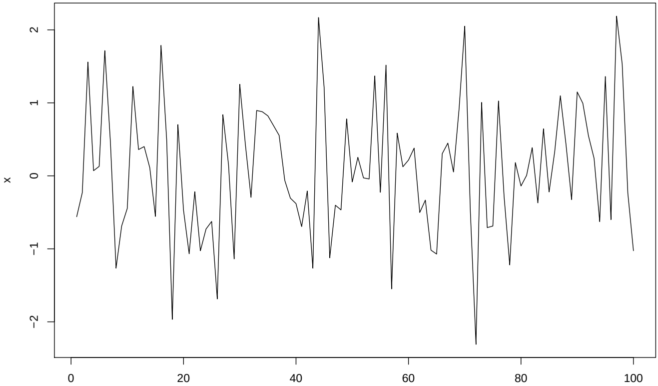
- Dôležitý príklad stacionárneho procesu, pomocou ktorého budeme definovať aj rôzne modely pre dáta
- Biely šum u_t je náhodný proces s nasledujúcimi vlastnosťami

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u_t) &= 0 \ \forall t \\ \mathbb{D}(u_t) &= \sigma^2 \ \forall t \\ \mathrm{Cov}(u_t, u_s) &= 0 \ \forall t \neq s \end{aligned}$$

- Napríklad postupnosť nezávislých náhodných premenných s rovnakým rozdelením (a konečnou strednou hodnotou a disperziou), ale nie je to jediná možnosť

Príklad

```
x <- rnorm(100)
plot(x, type = "l")
```



Príklady: zisťovanie stacionarity procesu

Príklad 1

- Nech u_t je biely šum, definujme

$$x_t = u_t + u_{t-1}$$

- Platí:

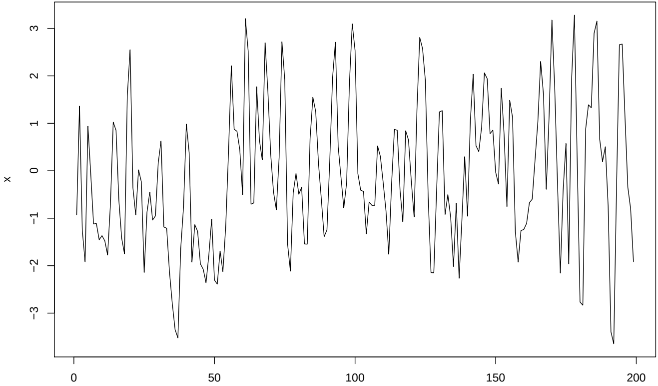
$$\mathbb{E}(x_t) = 0, \mathbb{D}(x_t) = 2\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Proces teda **je stacionárny**

Príklad 1: simulácia priebehu procesu, N = 200 pozorovaní

```
u <- rnorm(N + 1)
x <- u[2:N] + u[1:(N - 1)]
```



Príklad 2

- Nech u_t je biely šum, definujme

$$x_t = \begin{cases} u_1 & \text{pre } t = 1, \\ x_{t-1} + u_t & \text{pre } t = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- x_t sa dá zapísať v tvare $x_t = \sum_{i=1}^{t} u_i$
- Platí:

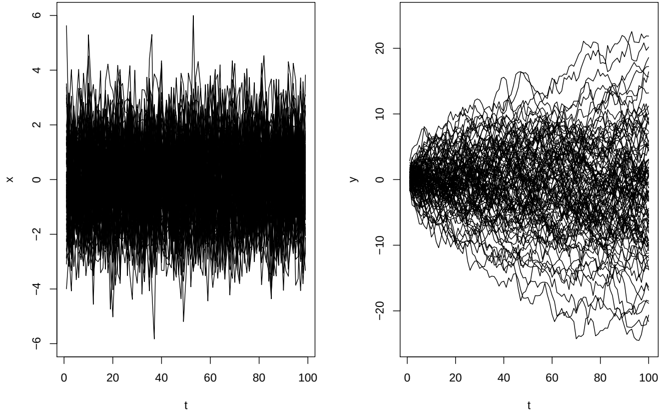
$$\mathbb{E}(x_t) = 0, \mathbb{D}(x_t) = t\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) = t\sigma^2 \quad \text{pre } k > 0$$

- Proces teda **nie je stacionárny** (to vieme povedať už po výpočte disperzie)

Príklady 1, 2: porovnanie simulácií procesov

- Vľavo: stacionárny proces z príkladu 1, vpravo: proces s rastúcou disperziou z príkladu 2



Príklad 3

- Nech u_t je biely šum, definujme

$$x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}, \tag{3}$$

kde koeficienty ψ_j spĺňajú $\psi_0 = 1$, $\sum \psi_j^2 < \infty$

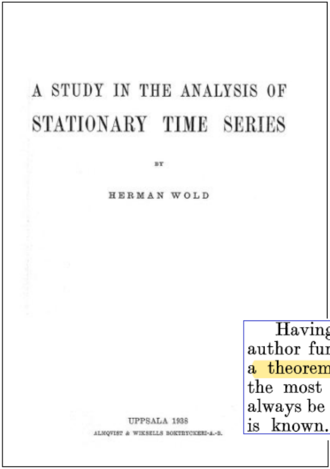
- Platí:

$$\mathbb{E}(x_t) = \mu, \mathbb{D}(x_t) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2$$

$$\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{k+j}$$

- Proces **je stacionárny**.

Woldova reprezentácia

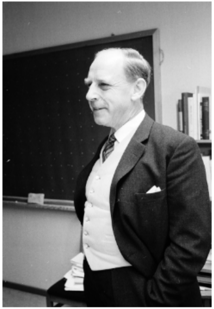


A STUDY IN THE ANALYSIS OF
STATIONARY TIME SERIES

BY

HERMAN WOLD

UPPSALA 1938
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.



Having discussed a number of types of random processes, the author furnishes proofs of their various properties, and then gives a theorem of considerable interest, concerning the structure of the most general discrete stationary process. This, in fact, can always be presented as a sum of two components the nature of which is known.

J. N. (1939). Journal of the Royal Statistical Society, 102(2), 295-298.

https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.262214
https://www.jstor.org/stable/298000

https://digitaltmuseum.se/021016543711/professor-herman-wold-uppsala-1969

Woldova reprezentácia stacionárneho procesu

- V príklade 3: Proces tvaru (3) je stacionárny
- Dá sa dokázať: Každý stacionárny proces x_t sa dá zapísať v tvare

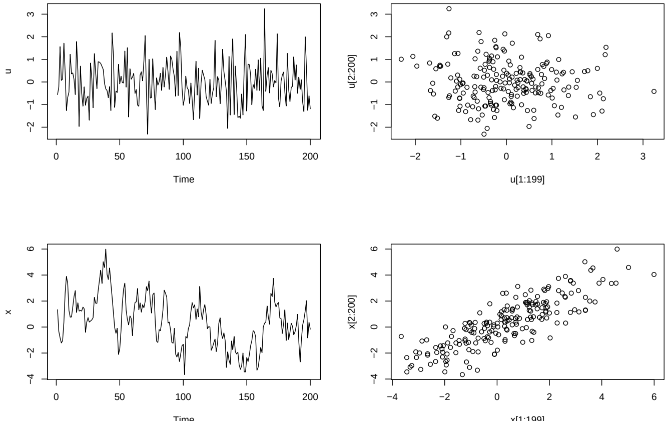
$$x_t = \mu_t + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$$

  kde u je biely šum, $\psi_0 = 1$, $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ a μ_t sa dá presne predikovať z predchádzajúcich hodnôt procesu x (v našich aplikáciách to bude konštanta)
- Toto vyjadrenie sa nazýva Woldova reprezentácia

Autokorelačná funkcia (ACF)

Motivácia

- Hore: u_t, dolu: $x_t = 0.9x_{t-1} + u_t$ - simulácia a závislosť x_t od x_{t-1}



Definícia základné vlastnosti

- Autokorelačná funkcia (ACF) stacionárneho procesu je definovaná ako

$$\rho(\tau) = \mathrm{cor}(x_t, x_{t+\tau}) = \frac{\mathrm{cov}(x_t, x_{t+\tau})}{\sqrt{\mathbb{D}(x_t)\mathbb{D}(x_{t+\tau})}}$$

- ACF sa teda dá vyjadriť pomocou autokovariančnej funkcie γ:

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)},$$

- Platí:

$$\rho(0) = 1, \rho(-\tau) = \rho(\tau),$$

stačí nám teda počítať $\rho(\tau)$ pre $\tau = 1, 2, \ldots$

Príklad

- Nech u_t je biely šum, definujme

$$x_t = u_t + u_{t-1}$$

- Pre tento proces sme odvodili stacionaritu a vlastnosti:

$$\mathbb{D}(x_t) = 2\sigma^2, \mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- ACF teda je

$$\rho(k) = \mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} 1/2 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Odhadovanie ACF z dát

- Ergodický proces → stredná hodnota, disperzia a autokovariancie sa dajú konzistentne odhadnúť z dát $x_1, \ldots, x_T$:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t, \quad \hat{\gamma}(0) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\gamma}(\tau) = \sum_{t=1}^{T-\tau}(x_t - \hat{\mu})(x_{t+\tau} - \hat{\mu})$$

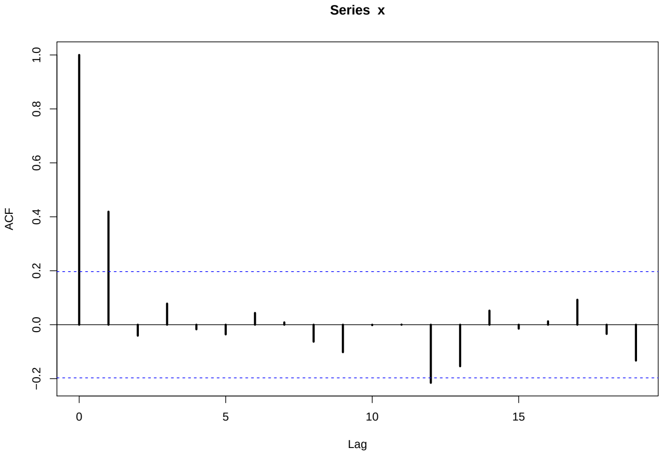
- Z toho - konzistentný odhad autokorelačnej funkcie:

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\hat{\gamma}(0)}$$

- je asymptoticky nevychýlený

Odhadovanie ACF z dát v R-ku: funkcia acf

```
acf(x) # pre data x <- u[2:N] + u[1:(N - 1)]
```



Využitie na kontrolu výpočtov

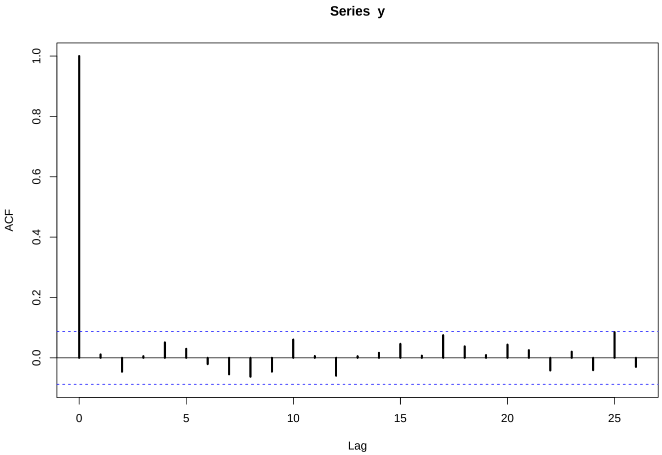
- *Zadanie:* Nech z_t je proces, ktorého hodnoty sú nezávislé náhodné premenné s rozdelením $N(0, 1)$. Ukážte, že nasledujúci proces je stacionárny a vypočítajte jeho ACF:

$$y_t = \begin{cases} z_t & \text{pre } t \text{ nepárne} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(z_{t-1}^2 - 1) & \text{pre } t \text{ párne} \end{cases}$$

- Vygenerujeme si daný proces a zobrazíme odhadnutú ACF (náš výpočet by mal dať podobný výsledok):

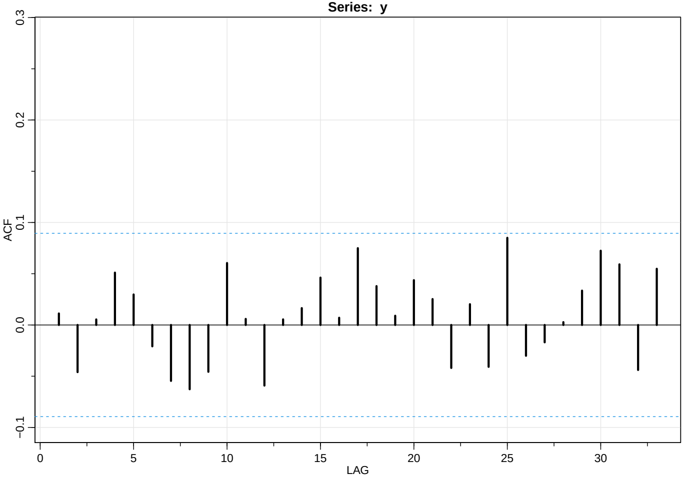
```
set.seed(1234)
N <- 500
z <- rnorm(N, mean = 0, sd = 1)
y <- z  # pre neparne indexy zostane, parne upravime
ind.parne <- seq(from = 2, to = N, by = 2)
y[ind.parne] <- (1/sqrt(2)) * (z[ind.parne - 1]^2 - 1)
```

```
acf(y)
```



Alternatíva: funkcia acf1 z balíka astsa

```
library(astsa); acf1(y)
```



Testovanie nulovosti autokorelácií

Testovanie nulovosti autokorelácií - každej samostatne

- Biely šum má nulovú ACF $\Rightarrow$ pri testovaní, či sú dáta bielym šumom, budeme testovať, či majú nulové autokorelácie
- Odhad ACF v prípade bieleho šumu
  - asymptoticky nevychýlený
  - disperzia $\approx 1/T$
  - $\Rightarrow$ približný 95 % interval spoľahlivosti: $\pm 2/\sqrt{T}$ - často sa zobrazuje spolu s odhadnutými autokoreláciami (aj v prípade funkcií `acf` a `acf1`)
- Pre každú autokoreláciu samostatne:
  - Testujeme, či sa rovná nule.
  - Nulovú hypotézu zamietame, ak je jej odhad mimo intervalu spoľahlivosti

Ak testujeme nulovosť autokorelácie, nie pre biely šum:

- V prípade procesu, pre ktorý platí $\rho(\tau) = 0$ pre $\tau > k$, pre tieto τ platí

$$\mathbb{D}(\hat{\rho}(\tau)) \approx \frac{1}{T} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{k} \hat{\rho}(j)^2 \right)$$

Testovanie nulovosti autokorelácií - Ljung-Boxov test

- Netestujeme nulovosť každej autokorelácie samostatne, ale testujeme hypotézu $\rho(1) = \rho(2) = \cdots = \rho(m) = 0$
- Box & Pierce, 1970: ak platí H_0, asymptoticky

$$Q = T \sum_{j=1}^{m} \hat{\rho}(j)^2 \sim \chi^2_m$$

- Ljung & Box, 1978: modifikácia s lepšími vlastnosťami pri menšom počte dát

$$Q = T(T+2) \sum_{j=1}^{m} \frac{\hat{\rho}(j)^2}{T-j} \sim \chi^2_m$$

- *Poznámka, ktorú využijeme neskôr: Počet stupňov voľnosti sa zmení, ak ide o rezíduá z modelu*

Ljung-Boxov test v R-ku: funkcia Box.test

- Testujme pre dáta x, že prvé tri autokorelácie sú nulové

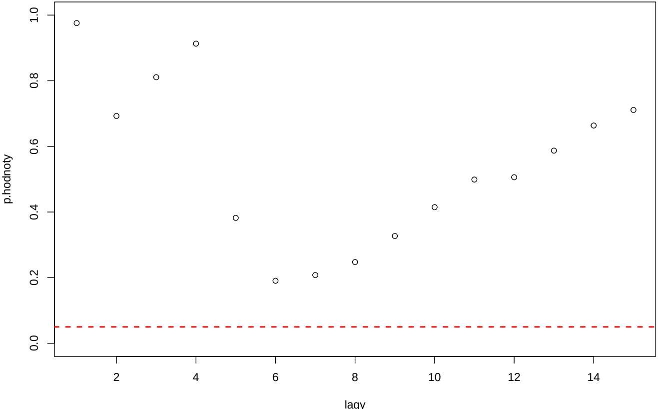
```
set.seed(12345)
x <- rnorm(N)

Box.test(x, lag = 3, type = "Ljung-Box") # staci `Ljung`
```

```
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  x
## X-squared = 0.9611, df = 3, p-value = 0.8107
```

Na cvičení - štandardný výstup pre LB test

- Ljung-Boxov test pre rôzny počet lagov, zobrazíme P hodnoty (prístup pomocou `$p.value`) a hranicu 0.05:



Na cvičení - (ne)korelovanosť výnosov akcií

- Aj ako načítať ceny akcií priamo z R-ka a kresliť pekné grafy