

Predikcie v AR a MA modeloch

Beáta Stehlíková

2-EFM-102 Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Predikcie - všeobecný princíp

- ▶ Sme v čase t , chceme predikciu hodnoty $x_{t+\tau}$, t. j. hodnotu procesu o τ období.
- ▶ Označme túto predikciu $\hat{x}_t(\tau)$, teda
 - ▶ index t označuje čas, v ktorom konštruujeme predikciu
 - ▶ argument τ označuje, na koľko období táto predikcia je
- ▶ Predikciu bude očakávaná hodnota procesu v tom čase, pri danej informácii, ktorú máme k dispozícii:

$$\hat{x}_t(\tau) = \mathbb{E}_t(x_{t+\tau})$$

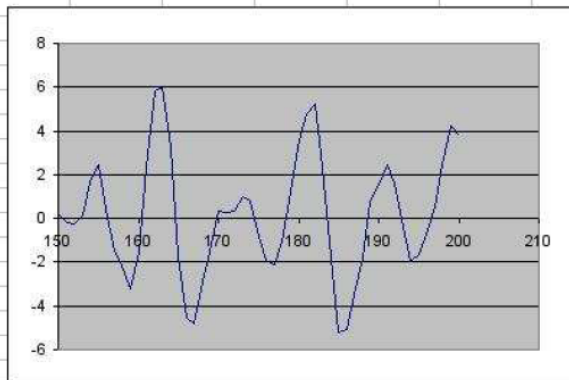
(index t vo výraze \mathbb{E}_t znamená, že strednú hodnotu počítame v čase t)

Predikcie v AR modeloch

Predikcie v AR modeloch

- Majme proces $x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$ a dáta:

183	2,297308
184	-1,79321
185	-5,19365
186	-5,04636
187	-3,5133
188	-1,78753
189	0,706783
190	1,534983
191	2,447012
192	1,593168
193	-0,39105
194	-1,99968
195	-1,62184
196	-0,70644
197	0,518625
198	2,44298
199	4,224192
200	3,797682
201	
202	



Predikcie v AR modeloch

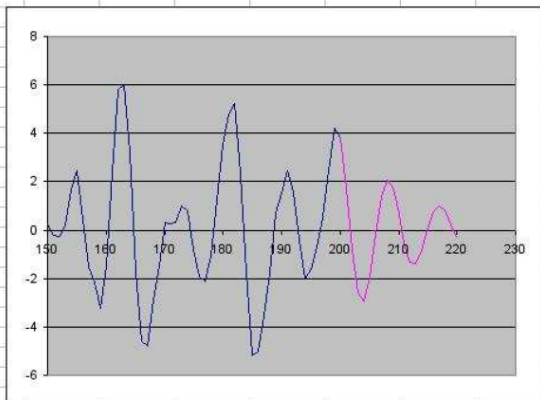
- ▶ Chceme predikcie pre hodnoty v nasledujúcich časoch
- ▶ Intuitívne:
 - ▶ do diferenčnej rovnice dosadzujeme známe hodnoty procesu a keď už k dispozícii nie sú, dosadzujeme predikcie
 - ▶ biely šum nahradíme nulou



Predikcie v AR modeloch

► Výsledok:

189	0,706783
190	1,534983
191	2,447012
192	1,593168
193	-0,39105
194	-1,99968
195	-1,62184
196	-0,70644
197	0,518625
198	2,44298
199	4,224192
200	3,797682
201	1,726193
202	-0,81136
203	-2,60317
204	-2,95478
205	-1,924
206	-0,18203
207	1,38055
208	2,087499
209	1,749031
210	0,67427
211	-0,5427
212	-1,33291
213	-1,46478



Predikcie v AR modeloch

- ▶ Vzťah $\hat{x}_t(\tau) = \mathbb{E}_t(x_{t+\tau})$ sa zhoduje s touto intuíciou.
- ▶ Majme AR(p) proces

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t.$$

- ▶ Potom:

$$\begin{aligned} x_{t+\tau} &= \delta + \alpha_1 x_{t+\tau-1} + \dots + \alpha_p x_{t+\tau-p} + u_{t+\tau}, \\ \underbrace{\mathbb{E}_t(x_{t+\tau})}_{\hat{x}_t(\tau)} &= \delta + \alpha_1 \mathbb{E}_t(x_{t+\tau-1}) + \dots + \alpha_p \mathbb{E}_t(x_{t+\tau-p}) + \underbrace{\mathbb{E}_t(u_{t+\tau})}_0 \end{aligned}$$

pričom

$$\mathbb{E}_t(x_{t+s}) = \begin{cases} \hat{x}_t(s), & \text{pre } s > 0 \\ x_{t+s}, & \text{pre } s \leq 0 \end{cases}$$

Predikcie v MA modeloch

Predikcie v MA modeloch

- Majme MA(1) proces

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

a počítajme predikcie $\hat{x}_t(\tau)$:

$$\begin{aligned} x_{t+s} &= \mu + u_{t+s} - \beta u_{t+s-1}, \\ \underbrace{\mathbb{E}_t(x_{t+s})}_{\hat{x}_t(s)} &= \underbrace{\mu + \mathbb{E}_t(u_{t+s})}_0 - \beta \underbrace{\mathbb{E}_t(u_{t+s-1})}_{u_t \text{ pre } s=1, \text{ inak } 0}, \end{aligned}$$

Teda:

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t, & \text{pre } s = 1 \\ \mu, & \text{pre } s = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- **Cvičenie:** Dokážte, že pre MA(q) model je $\hat{x}_t(s) = \mu$ pre $s > q$ a že pre $s \leq q$ predikcie obsahujú realizované hodnoty bieleho šumu u

Predikcie v MA modeloch

- ▶ Predikcie pre MA(1) model teda sú:

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t, & \text{pre } s = 1 \\ \mu, & \text{pres } = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- ▶ Obsahujú teda hodnotu bieleho šumu u_t - tá už v čase konštrukcie predikcií bola realizovaná, nie sme však schopní ju pozorovať.
- ▶ Cvičenie z predch. slajdu - podobná situácia nastáva pre ľubovoľný MA(q) proces
- ▶ *Ako teda prakticky počítať predikcie?* Myšlienka: vyjadríme u_t pomocou hodnôt procesu x .
- ▶ Tento výpočet si ukážeme pre MA(1) model.

Predikcie v MA(1) modeli

- ▶ Vyjadrujeme teda u_t pomocou x_1, x_2, \dots, x_t .
- ▶ Využijeme pritom:
 - ▶ Pre MA(1) sme odvodili:

$$\hat{x}_t(1) = \mu - \beta u_t \quad (1)$$

- ▶ Pre predikčnú chybu platí:

$$x_t - \hat{x}_{t-1}(1) = u_t \quad (2)$$

- ▶ Budeme postupne počítať $\hat{x}_t(1)$ pre $t = 0, 1, 2, \dots$

Predikcie v MA(1) modeli

- Pre $t = 0$:

$$\hat{x}_0(1) \stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_0 \quad (3)$$

- Pre $t = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(1) &\stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_1 \\ &\stackrel{(2)}{=} \mu - \beta [x_1 - \hat{x}_0(1)] \\ &\stackrel{(3)}{=} \mu - \beta [x_1 - (\mu - \beta u_0)] \\ &= \mu(1 + \beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Predikcie v MA(1) modeli

► Pre $t = 2$:

$$\begin{aligned}\hat{x}_2(1) &\stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_2 \\ &\stackrel{(2)}{=} \mu - \beta [x_2 - \hat{x}_1(1)] \\ &\stackrel{(4)}{=} \mu - \beta [x_2 - (\mu(1 + \beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0)] \\ &= \mu(1 + \beta + \beta^2) - \beta x_2 - \beta^2 x_1 - \beta^3 u_0\end{aligned}\quad (5)$$

Predikcie v MA(1) modeli

- ▶ Pre všeobecné t :

$$\begin{aligned}\hat{x}_t(1) &= \mu(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^t) \\ &\quad - \beta x_t - \beta^2 x_{t-1} - \dots - \beta^t x_1 - \beta^{t+1} u_0\end{aligned}$$

- ▶ Pripomeňme si podmienku invertovateľnosti $|\beta| < 1$.
- ▶ Jediný nepozorovateľná hodnota v predikcii je u_0 , ale vplyv člena $\beta^{t+1} u_0$ ide k nule pre $t \rightarrow \infty$ (t je počet dát) \Rightarrow zanedbáme ho a dostaneme predpis pre predikcie obsahujúci len pozorovateľné hodnoty