

Časové rady

Vzorová skúšková písomka a kostra predmetu

- Písomka je open book, zakázaná je komunikácia (medzi sebou aj s hocikým iným). Môžete používať aj dopredu pripravené kódy v R-ku, ale nemôžu sa zdieľať počas písomky.
- Príklady 1, 2, 3 tvoria kostru predmetu. Z celkového počtu 15 bodov treba na úspešné absolvovanie skúšky získať aspoň 10 bodov.
- Odozdvávajú sa odpovede a výpočty na papieri, nie kód v R-ku.
- u označuje všade biely šum.

Štruktúra písomky aj spôsob hodnotenia jednotlivých príkladov budú rovnaké ako v tejto vzorovej písomke.

1 Vzorová skúšková písomka

Príklad 1 (3 body): stacionarita a invertovateľnosť

Overte stacionaritu a invertovateľnosť nasledujúceho procesu:

$$x_t = 5 + 0.5x_{t-1} - 0.4x_{t-2} + u_t - 0.5u_{t-1} - 0.3u_{t-2}.$$

Pre každú z týchto vlastností napíšte:

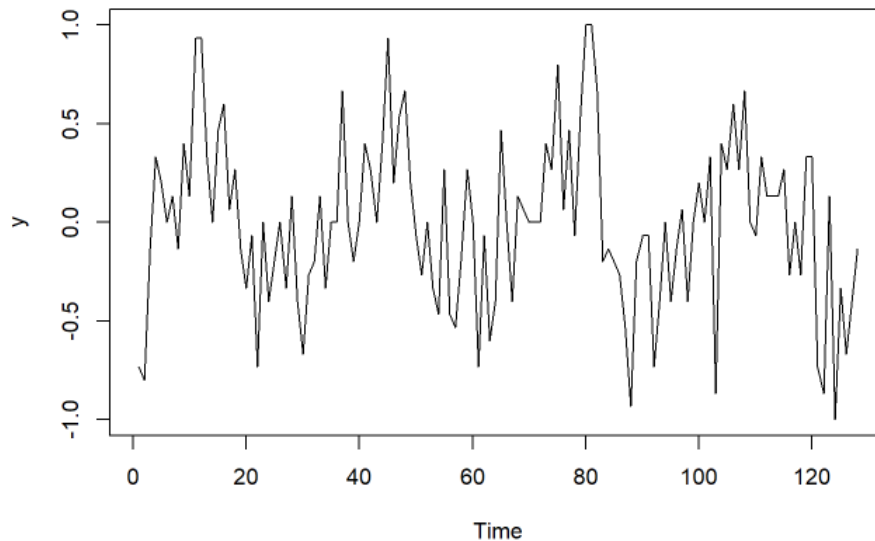
- polynóm, ktorého korene budete počítat',
- aké musia byť ich absolútne hodnoty, aby mal proces overovanú vlastnosť,
- aké vyšli absolútne hodnoty koreňov a čo z toho vyplýva.

Hodnotenie: Za každý z týchto bodov 0.5 b. pre každú z vlastností.

Príklad 2 (8 bodov): ARIMA modelovanie

Budeme pracovať s dátami, ktoré sú dostupné v balíku `astsa`:

```
library(astsa)
y <- ts(fmri$L1T2[, 2])
plot(y)
```



Cieľom je nájsť vhodný ARIMA model. Dáta sú vždy vybrané tak, aby sa pre ne dal nájsť nesezónny ARIMA(p, d, q) model, pričom p a q nie sú väčšie ako 5.

- (1 bod) Vysvetlite, koľkokrát ste dáta diferencovali a prečo. Teda pre každý časový rad (pôvodné dáta, prípadné prvé diferencie, druhé diferencie atď.) napíšte, či ste ich diferencovali a prečo. Skončíme teda tým, že určitý časový rad už diferencovať netreba.
- (5 bodov, 1 bod za každú úlohu) Súčasťou predchádzajúceho bodu bolo testovanie jednotkového koreňa. V poslednom kroku (po prípadnom predchádzajúcom diferencovaní) nastala situácia, že v dátach nebol ani trend, ani jednotkový koreň, a preto ich nebolo potrebné diferencovať. Podrobne vysvetlite, čo sa tam dialo:
 - (a) Napíšte, s akými parametrami ADF testu ste ich tieto dáta testovali a aká regresia sa odhadla.
 - (b) Aká hypotéza o koeficientoch tejto regresie sa testuje?
 - (c) Odvodte, že táto hypotéza predstavuje hypotézu o jednotkovom koreni daného časového radu.
 - (d) Kedy túto hypotézu zamietame (ako vyzerá kritérium založené na testovacej štatistike a kritickej hodnote)?
 - (e) Čo vyšlo v našom prípade (zamietame alebo nie) a čo to znamená pre diferencovanie nášho časového radu (diferencujeme alebo nie)?
- (2 body) Nájdite vhodný ARIMA model pre dáta y . Požiadavky sú: stacionarita, invertovateľnosť a p hodnoty Ljung-Boxovho testu nad 5 percent. Odpoveď napíšte zapísaním parametrov funkcie `sarima`, ktorou model odhadnete.

Príklad 3 (4 body): Základné výpočty

Budeme pracovať s nasledovnými dátami:

```
library(astsa)
x <- ts(fmri$L2T2[, 2])
}
```

- (a) Zdôvodnite, prečo sa x nedá považovať za biely šum.
- (b) Vypočítajte výberovú autokorelačnú funkciu a uveďte jej hodnotu pre lag 1 (zaokrúhlenú na dve desatinné miesta).
- (c) Odhadnite MA modely od rádu 1 do rádu 4. Ktoré z nich vyhovujúce a ktoré nie sú na základe Ljung-Boxovho testu (počet lagov podľa výstupu z funkcie `sarima`)?
- (d) Spravte predikciu pre nasledujúcu hodnotu na základe MA(3) modelu.

Hodnotenie: 1 b. za každú z otázok. Uveďte iba výsledky, resp. odpovede na otázky (nie kód, podrobnejšie vysvetlenia testov a pod.)

Príklad 4 (10 bodov): teoretický príklad

Nech x_t je stacionárny AR(1) proces. Odvod'te autokorelačnú funkciu procesu y_t , ktorý je definovaný ako $y_t = x_t - x_{t-1}$.

Príklad 5 (10 bodov): nájdenie procesu s danou vlastnosťou

Uveďte príklad procesov s danými vlastnosťami, všetky procesy musia byť uvedené s konkrétnymi číselnými hodnotami parametrov. Ak nie je povedané inak, proces musí byť stacionárny. Pre každý proces dokážte stacionaritu a že má požadovanú vlastnosť.

- (a) MA(2) proces s disperziou 2023.
- (b) ARMA(2,2) proces so strednou hodnotou 2023.
- (c) Proces, pre ktorý sa ACF rádu 3 rovná 0,36.
- (d) ARCH(2) proces pre disperziu šumu.
- (e) SARIMA(0,0,1)×(0,0,1)₄ proces.

Hodnotenie pre každý proces: 2 body za správnu odpoveď a správne zdôvodnenie; 1 bod za dobrý prístup, neúplný dôkaz vlastnosti a pod.; za uvedenie procesu bez zdôvodnenia je 0 bodov.

Príklad 6 (12 bodov): true/false

Rozhodnite, či sú nasledovné tvrdenia pravdivé. Píšte iba odpovede - pravda/nepravda - nie zdôvodnenia.

- (a) Ak sú všetky autoregresné koeficienty ARMA procesu menšie ako 1, tak je tento proces stacionárny.
- (b) MA proces $x_t = 10 + u_t + 2u_{t-1}$ je nestacionárny.
- (c) Ak je súčet autoregresných koeficientov AR procesu rovný jednej, tak je tento proces nestacionárny.
- (d) Autokorelačná funkcia ARMA procesu nezávisí od jeho MA časti.
- (e) Parciálna autokorelačná funkcia ARMA procesu nezávisí od jeho MA časti.
- (f) Autokorelačná funkcia AR(1) procesu je vždy monotónna.
- (g) Autokorelačná funkcia ARMA(2,3) procesu má od lagu 4 všetky hodnoty nulové.
- (h) Parciálna autokorelačná funkcia ARMA(2,3) procesu má od lagu 3 všetky hodnoty nulové.
- (i) GARCH modely sa používajú na modelovanie trendu.
- (j) ARCH procesy sú zovšeobecnením GARCH procesov.
- (k) Spektrum každého AR procesu je na intervale $(0, \pi)$ monotónne.
- (l) Spektrum MA(1) procesu je na intervale $(0, \pi)$ monotónne.

Hodnotenie: Za každú správnu odpoveď je 1 bod, za nesprávnu mínus 1 bod, žiadna odpoveď znamená 0 bodov.

Príklad 7 (3 body): krátke numerické výpočty

Ide o krátke výpočty, nie dlhé odvodzovanie. Niektoré sa dajú vypočítať v R-ku. Odovzdávajte len výsledok (nie výpočet).

- (a) PACF rádu 2 pre proces $x_t = 10 + 0.5x_{t-1} - 0.1x_{t-2} + u_t$.
- (b) Všetky lags (okrem nulového), pre ktoré je ACF procesu $x_t = 12 + 0.5x_{t-4} + u_t$ rôzna od nuly.
- (c) Koeficienty ψ_1 a ψ_2 Woldovej reprezentácie procesu $x_t = 10 + 0.5x_{t-1} + 0.1x_{t-2} + u_t$.

Hodnotenie: Za každý správny výsledok je 1 bod.

2 Kostra predmetu

Príklad 1 (3 body): stacionarita a invertovateľnosť

Obsahom príkladu bude overenie stacionarity a invertovateľnosti ARMA procesu, pričom tento proces bude zadaný jedným z nasledovných spôsobov:

- (a) predpisom pre hodnotu procesu v čase t , napr. $x_t = 10 + 0.5x_{t-1} - 0.4x_{t-2} + u_t + 0.65u_{t-1}$.
- (b) pomocou operátora posunu L , napr. $(1 - 0.6L)x_t = 40 + (1 + 0.4L - 0.55L^2 + 0.1L^3)u_t$
- (c) výstupom z odhadovania procesu funkciou `sarima` v R-ku, napr.

```
ar1    ar2    ar3    ma1  xmean
0.172  0.049  0.111 -0.129  0.013
```

Príklad 2 (8 bodov): ARIMA modelovanie

Príklad bude mať presne rovnaké zadanie ako vo vzorovej písomke, líšiť sa bude len použitými dátami.

Príklad 3 (4 body): Základné výpočty

Príklad bude obsahovať výber z nasledujúcich zadaní aplikovaných na zadané dáta:

- Rozhodnite, či ich môžeme považovať za biely šum. Rozhodnite, či je zadaný ARMA model vhodný model.
- Vypočítajte výberovú ACF, resp. PACF pre daný lag.
- Testujte hypotézu o tom, že prvých k autokorelácií daného časového radu, resp. rezíduí zadaného modelu, sa rovná nule. Treba uviesť použitý test, p hodnotu a záver.
- Spraviť predikciu pre zadané obdobie zo zadaného ARMA modelu.
- Uviesť optimálne parametre exponenciálneho vyhladzovania a Holt-Wintersovej metódy.
- Uviesť sumu štvorcov rezíduí pre optimálne parametre exponenciálneho vyhladzovania a Holt-Wintersovej metódy, resp. pre zadané parametre.
- Uviesť predikciu pre zadané obdobie pre optimálne parametre exponenciálneho vyhladzovania a Holt-Wintersovej metódy, resp. pre zadané parametre.
- Odhadnúť zadaný GARCH model v tvare konštanta plus šum. Overiť splnenie podmienok stacionarity. Uviesť výsledok požadovaného testu pre rezíduá, resp. pre druhé mocniny rezíduí podľa výstupu z funkcie `summary`. Treba uviesť použitý test, p hodnotu a záver.
- Pre zadaný GARCH model v tvare konštanta plus šum spraviť predikciu strednej hodnoty a štandardnej odchýlky pre zadané obdobie.
- Pri predikciách z rôznych modelov vypočítať absolútnu alebo percentuálnu chybu (porovnaním so zadanou presnou hodnotou).