ARMA modely II. - moving average modely (kĺzavé priemery, MA)

Beáta Stehlíková

2-EFM-102 & 2-INF-191 Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Motivácia

Príklad: Ceny kakaa

Dáta

Ben Vogelvang: *Econometrics. Theory and Applications with EViews.*, Pearson Education Limited, 2005.

Chapter 14.7. - The Box-Jenkins Approach in Practice

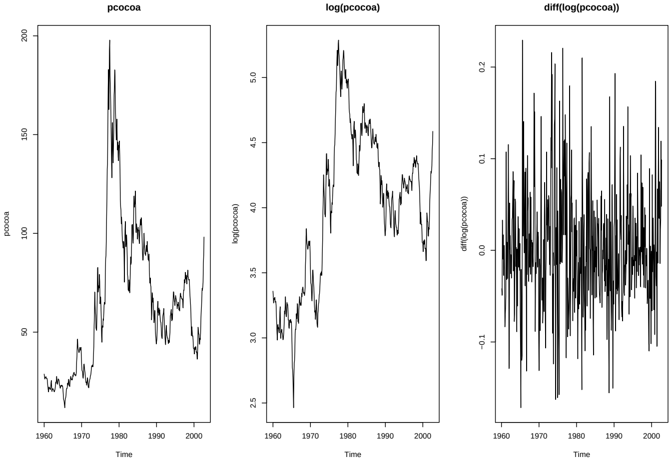
- Mesačné dáta, január 1960 - september 2002
- pcocoa - cena kakka, zlogaritmujeme a kvôli stacionarite budeme pracovať s diferenciami
- Modelujeme teda percentuálnu zmenu ceny

$$\begin{aligned} \Delta \ln(p_t) &= \ln(p_t) - \ln(p_{t-1}) = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}\right) \approx \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} \end{aligned}$$

(lebo $\ln(1+x) \approx x$ pre x malé)

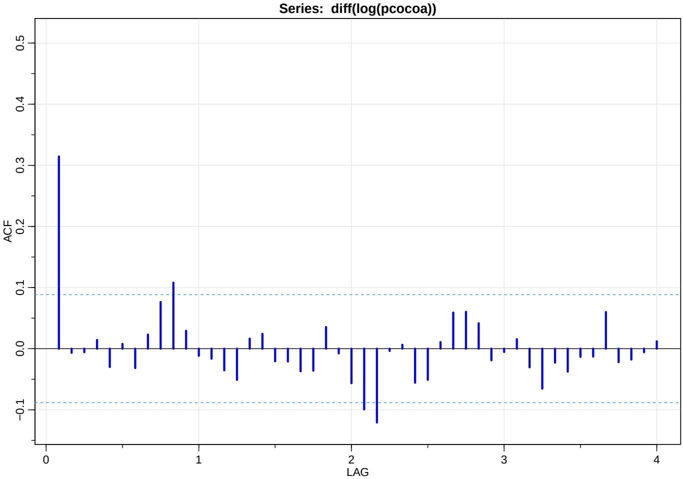
Dáta

Priebeh dát - pôvodné, zlogaritmované, diferencie logaritmov:



Odhadnutá ACF

- Odhadnutá ACF diferencií logaritmov:



Odhadnutá ACF

- Prvá výrazne nenulová, ostatné skoro nulové
- Nevyzerá to ako typický priebeh pre AR proces:
  - tam klesala ACF postupne
  - priebeh tohto typu mala PACF

Príklad z prvej prednášky

- Nech u_t je biely šum, definujme

$$x_t = u_t + u_{t-1}$$

- Vypočítali sme:

$$\mathbb{E}(x_t) = 0, \mathbb{D}(x_t) = 2\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} 1/2 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- ACF je nulová pre $k = 2, 3, \dots$ - presne tá vlastnosť, ktorú potrebujeme

Zovšeobecnenie príkladu a plán prednášky

- Príklad zovšeobecníme tak, aby
  - sa zachovala nulovosť korelácií okrem prvej
  - prvá korelácia mohla nadobädať aj iné hodnoty ako $1/2 \Rightarrow$ MA(1) procesy
- Procesy, ktoré majú prvých q nenulových a ostatné nulové $\Rightarrow$ MA(q) procesy

MA(1) procesy

Definícia, stacionarita, momenty, ACF, PACF

- Nech u_t je biely šum, potom

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

sa nazýva moving average proces prvého rádu - MA(1)

- Woldova reprezentácia: $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$, pre MA(1) proces: $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\beta, \psi_j = 0$ pre $j = 2, 3, \ldots \rightarrow$ **vždy stacionárny**
- Momenty a ACF:

$$\mathbb{E}(x_t) = \mu, \mathbb{D}(x_t) = (1 + \beta^2)\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} -\beta\sigma^2 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- Pripomeňme si PACF:

$$\Phi_{kk} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}}$$

- Pre MA(1) proces dosadzujeme $\rho(k) = 0$ pre $k = 2, 3, \dots$

$$\Phi_{11} = \rho(1)$$

$$\Phi_{22} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-\rho(1)^2}{1-\rho(1)^2}$$

$$\Phi_{33} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & 0 \\ 0 & \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & 0 \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ 0 & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}}$$

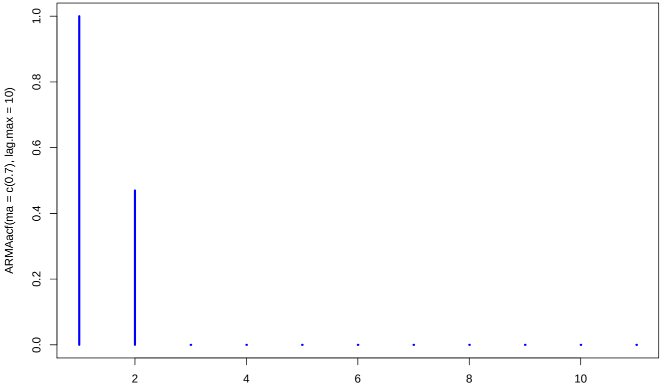
$$= \frac{\rho(1)^3}{1-2\rho(1)^2}$$

Cvičenie: Odvoďte ďalší člen PACF:

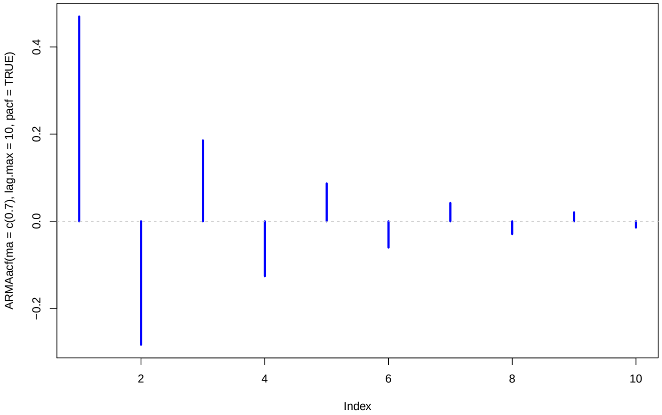
$$\Phi_{44} = \frac{-\rho(1)^4}{(1-\rho(1)^2)^2 - \rho(1)^2}$$

Príklad 1: výpočet PACF v R-ku, $x_t = u_t + 0.7u_{t-1}$

```
plot(ARMAacf(ma = c(0.7), lag.max = 10),
     type = "h", col = "blue", lwd = 3)
```

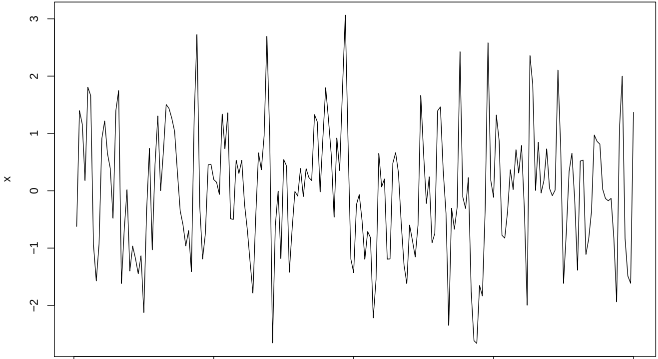


```
plot(ARMAacf(ma = c(0.7), lag.max = 10, pacf = TRUE),
     type = "h", col = "blue", lwd = 3)
abline(h = 0, col = "grey", lty = 2)
```



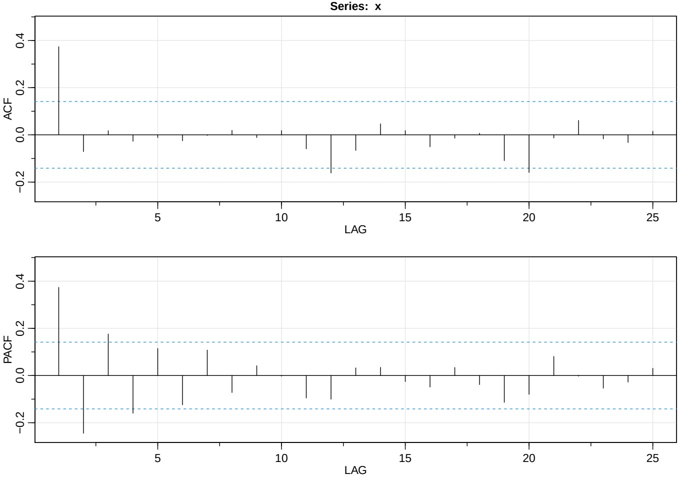
Príklad 2: simulované dáta, $x_t = u_t + 0.7u_{t-1}$

```
set.seed(123)
x <- arima.sim(model = list(ma = c(0.7)), n = 200)
plot(x)
```



Odhad ACF a PACF

```
acf2(x) # naraz ACF (bez lagu 0) a PACF, balik astsa
```



Príklad 3, 4: výpočet ručne

- Nech u_t je biely šum s rozdelením $N(0,4)$, definujme

$$x_t = u_t + \frac{1}{2} u_{t-1}$$

Potom: $\mathbb{E}(x_t) = 0$, $\mathbb{D}(x_t) = (1 + (1/2)^2) \times 4 = 5$

$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} \frac{1/2}{1+1/4} = 2/5 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Nech u_t je biely šum s rozdelením $N(0,1)$, definujme

$$x_t = u_t + 2 u_{t-1}$$

Potom: $\mathbb{E}(x_t) = 0$, $\mathbb{D}(x_t) = (1 + 2^2) \times 1 = 5$

$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} \frac{2}{1+4} = 2/5 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

MA(1) procesy s danou ACF, invertovateľnosť

MA(1) procesy s danou ACF

- Zovšeobecníme predchádzajúce dva príklady (vyšla pre ne rovnaká ACF)
- Majme MA(1) proces, teda ACF tvaru

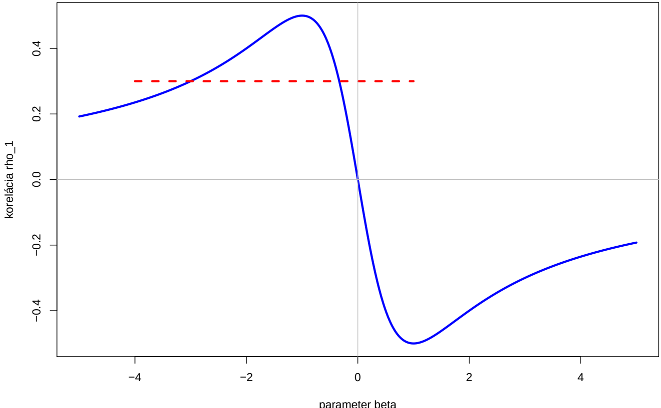
$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Predpokladjme teraz, že máme danú hodnotu $\rho_1 = \rho(1)$ a chceme z nej spätne určiť koeficient β:

$$\rho_1 = -\frac{\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \beta = ?$$

- Máme teda rovnicu

$$\rho_1 = -\frac{\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \beta^2 + \frac{1}{\rho_1}\beta + 1 = 0$$



- Rovnica $\beta^2 + \frac{1}{\rho_1}\beta + 1 = 0$ má pre $|\rho_1| < 1/2$ dve riešenia β_1, β_2, ktoré spĺňajú $\beta_1\beta_2 = 1$
- Procesy

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}, x_t = \mu + u_t - \frac{1}{\beta}u_{t-1}$$

  majú rovnakú ACF
- Ak chceme jednoznačnú parametrizáciu, potrebujeme dodať ďalšiu podmienku

Invertovateľnosť

- Budeme sa snažiť zapísať proces v tvare AR(∞):

$$x_t = \tilde{\mu} + u_t + \psi_1 x_{t-1} + \psi_2 x_{t-2} + \psi_3 x_{t-3} + \dots$$

  Ak sa to dá spraviť, proces sa nazýva invertovateľný

- Pre MA(1) proces:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + (1 - \beta L) u_t \\ (1 - \beta L)^{-1} x_t &= (1 - \beta L)^{-1} \mu + u_t \end{aligned}$$

  inverzia $(1 - \beta L)^{-1}$ existuje pre $|\beta| < 1$, vtedy

$$(1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \dots) x_t = \frac{\mu}{1 - \beta} + u_t$$

$$x_t + \beta x_{t-1} + \beta^2 x_{t-2} + \dots = \frac{\mu}{1 - \beta} + u_t$$

$$x_t = \frac{\mu}{1 - \beta} + u_t - \beta x_{t-1} - \beta^2 x_{t-2} - \dots$$

- Dostali sme teda podmienku invertovateľnosti MA(1) procesu: $|\beta| < 1$
- Iný zápis tejto podmienky:
  - máme proces $x_t = \mu + (1 - \beta L)u_t$
  - koreň polynómu $1 - \beta L$ je $1/\beta$
  - podmienka invertovateľnosti teda hovorí, že koreň polynómu $1 - \beta L$ musí byť v absolútnej hodnote väčší ako 1, pri zakreslení do komplexnej roviny mimo jednotkového kruhu

Reálne dáta: ceny kakaa zo začiatku

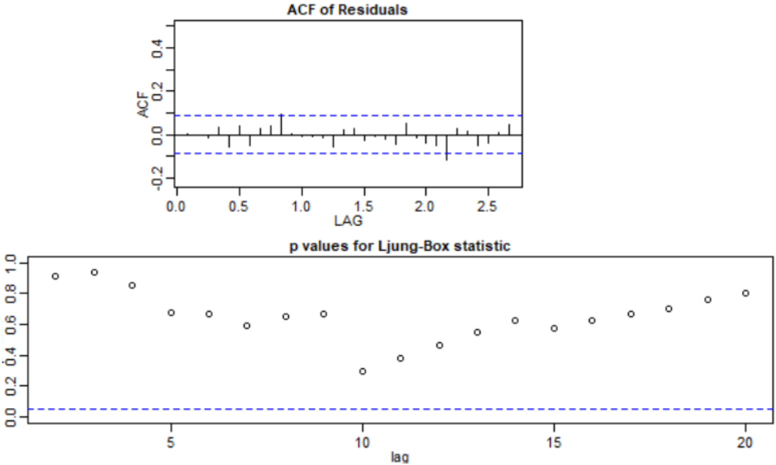
- Odhadneme MA(1) model pre diferencie logaritmov cien (teda percentuálne zmeny cien):

```
##        Estimate     SE t.value p.value
## ma1      0.3520 0.0402  8.7585  0.0000
## xmean    0.0024 0.0037  0.6501  0.5159
```

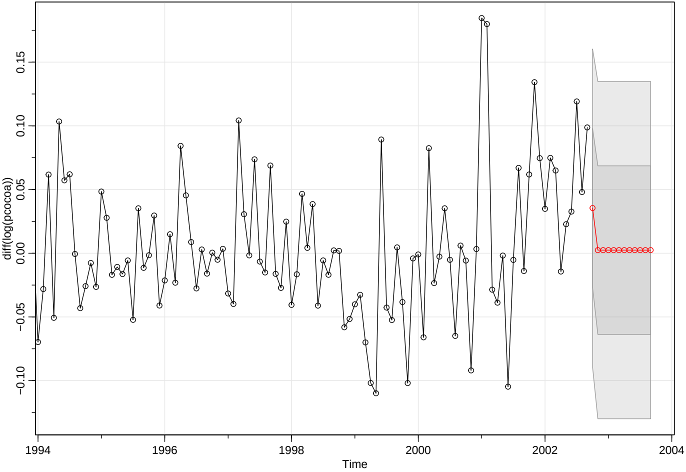
- Zapíšeme model pre premennú $x_t = \Delta \ln(pcocoa_t)$:

$$x_t = 0.0024 + u_t + 0.3520 u_{t-1}$$

- Rezíduá sú v poriadku - model je dobrý



- Predikcie z R-ka na nasledujúci rok.
- Všimnime si, že nie sú konštantné. Prečo nie sú konštantné predikcie z modelu $x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$- *k tomu sa vrátime.*



MA(q) procesy

Definícia, momenty, ACF, PACF, invertovateľnosť

- Nech u_t je biely šum, potom

$$x_t = \mu + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} - \cdots - \beta_q u_{t-q}$$

  sa nazýva moving average proces rádu q - MA(q)

- Woldova reprezentácia: $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$, pre MA(q) proces: $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\beta_1, \ldots, \psi_q = -\beta_q \psi_j = 0$ pre $j > q$ $\rightarrow$ **vždy je stacionárny**
- Momenty a ACF:

$$\mathbb{E}(x_t) = \mu, \mathbb{D}(x_t) = (1 + \beta_1^2 + \ldots \beta_q^2)\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) = 0 \text{ pre } k = q+1, q+2, \ldots$$

$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+k}) = 0 \text{ pre } k = q+1, q+2, \ldots$$

- Výpočet prvých q autokorelácií:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) &= \mathbb{E}[(u_t - \beta_1 u_{t-1} - \cdots - \beta_q u_{t-q}) \times \\ &\quad (u_{t+k} - -\beta_1 u_{t+k-1} - \cdots - \beta_q u_{t+k-q})]\end{aligned}$$

- Postupne dostaneme

$$\begin{aligned}k = 1 \quad &\Rightarrow \quad \gamma(1) = (-\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \cdots + \beta_{q-1}\beta_q)\sigma^2 \\ k = 2 \quad &\Rightarrow \quad \gamma(2) = (-\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \cdots + \beta_{q-2}\beta_q)\sigma^2 \\ &\quad \ldots \\ k = q \quad &\Rightarrow \quad \gamma(q) = (-\beta_q)\sigma^2\end{aligned}$$

- *Pre konkrétny model je praktickejšie počítať to priamo, namiesto dosadzovania do týchto vzťahov (tie sú užitočné kvôli postupu)*
- ACF: autokovariancie vydelíme disperziou
- PACF: ACF dosadzujeme do všeobecného vzorca

Cvičenie

Uvažujme proces $x_t = 10 + u_t + 0.5u_{t-1} - 0.2u_{t-2} + 0.1u_{t-3}$

- Ukážte, že je invertovateľný.
- Vypočítajte jeho ACF
- Vypočítajte prvé tri hodnoty jeho PACF

Na kontrolu:

```
ARMAacf(ma=c(0.5,-0.2,0.1), lag.max = 4)[-1]
```

```
##          1           2          3          4
##  0.29230769 -0.11538462  0.07692308  0.00000000
```

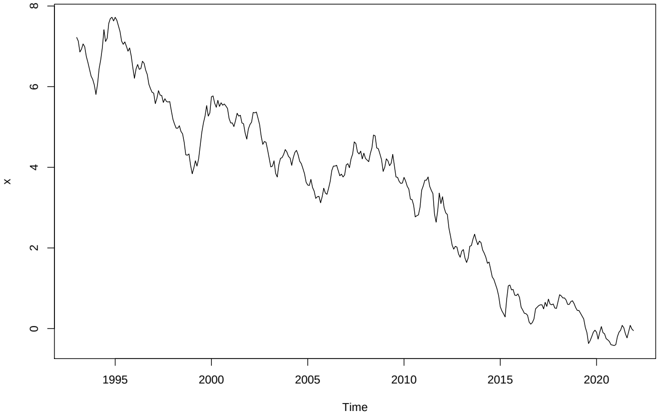
```
ARMAacf(ma=c(0.5,-0.2,0.1), lag.max = 3, pacf = TRUE)
```

```
## [1]  0.2923077 -0.2195911  0.2093677
```

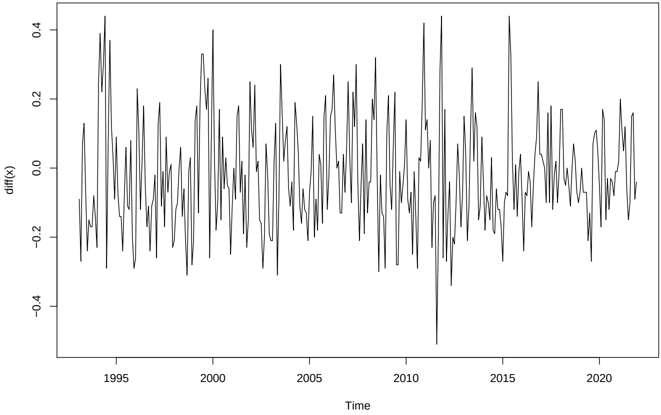
Príklad: dlhodobé úrokové miery

Rakúske dlhodobé úrokové miery

- `long_term_Rats.csv` na stránke predmentu, do konca roka 2021

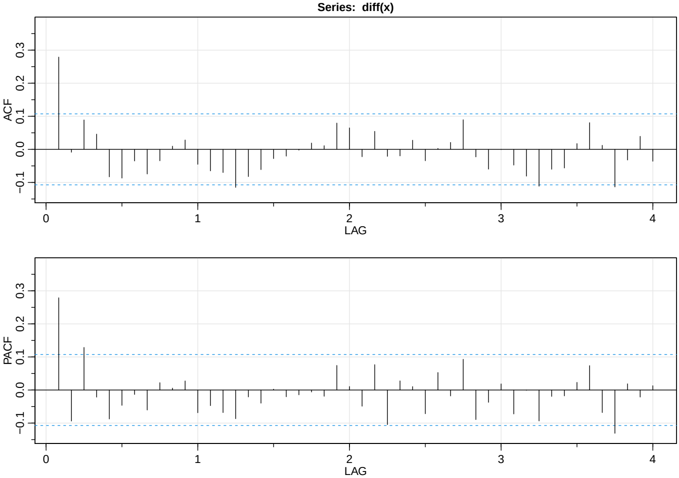


```
plot(diff(x)) # diferencujeme kvoli trendu
```

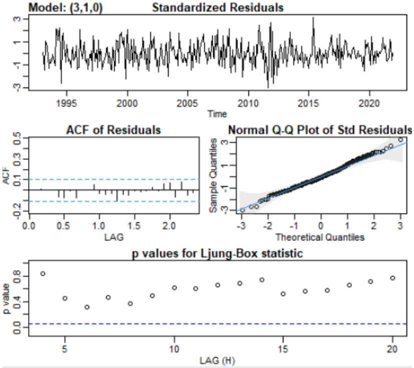


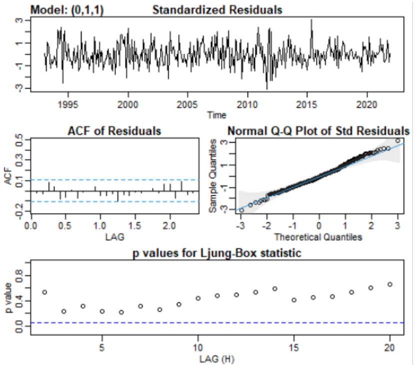
ACF a PACF diferencií

```
acf2(diff(x))
```



AR(3) a MA(1) pre diferencie, t.j. ARIMA(3,1,0) a ARIMA(0,1,1)





Bayesovo informačné kritérium

```
modelAR3 <- sarima(x, 3, 1, 0, details = FALSE)
modelMA1 <- sarima(x, 0, 1, 1, details = FALSE)
```

```
modelAR3$BIC
```

```
## [1] -0.8535038
```

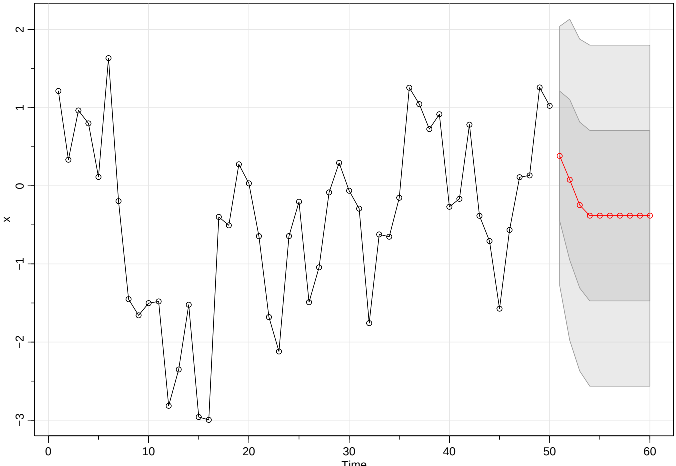
```
modelMA1$BIC
```

```
## [1] -0.8770151
```

Predikcie

Simulovaný príklad - predikcie z MA nie sú konštantné

```
set.seed(321)
x <- arima.sim(model = list(ar = c(0.6, 0.3)), n = 50)
sarima.for(x, n.ahead = 10, 0, 0, 3)
```



Predikcie - všeobecný princíp

- Sme v čase t, chceme predikciu hodnoty $x_{t+\tau}$, t. j. hodnotu procesu o τ období.
- Označme túto predikciu $\hat{x}_t(\tau)$, teda
  - index t označuje čas, v ktorom konštruujeme predikciu
  - argument τ označuje, na koľko období táto predikcia je
- Predikciou bude očakávaná hodnota procesu v tom čase, pri danej informácii, ktorú máme k dispozícii:

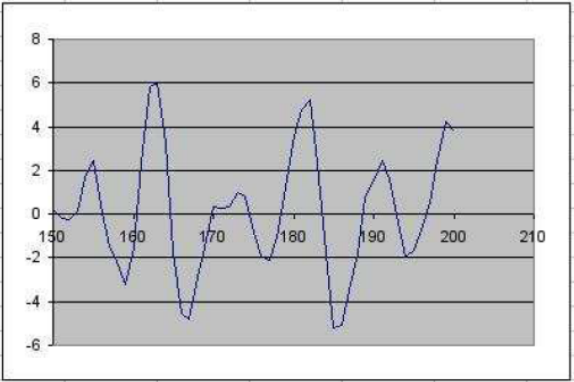
$$\hat{x}_t(\tau) = \mathbb{E}_t(x_{t+\tau})$$

(index t vo výraze $\mathbb{E}_t$ znamená, že strednú hodnotu počítame v čase t)

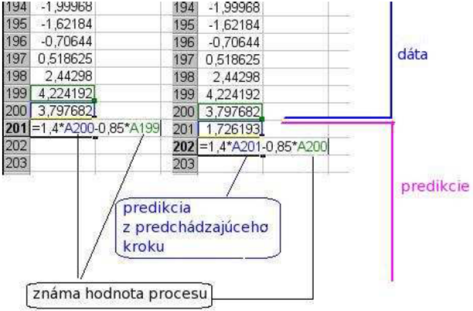
Predikcie v AR modeloch

- Majme proces $x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$ a dáta:

183	2,297308
184	-1,79321
185	-5,19365
186	-5,04636
187	-3,5133
188	-1,78753
189	0,706783
190	1,534983
191	2,447012
192	1,593168
193	-0,39105
194	-1,99968
195	-1,62184
196	-0,70644
197	0,518625
198	2,44298
199	4,224192
200	3,797682
201	
202	

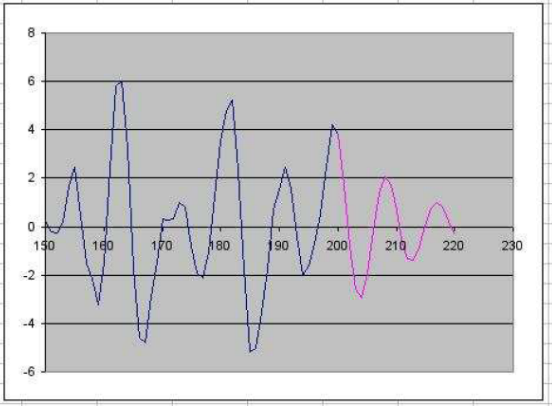


- Chceme predikcie pre hodnoty v nasledujúcich časoch
- Intuitívne:
  - do diferenčnej rovnice dosadzujeme známe hodnoty procesu a keď už k dispozícii nie sú, dosadzujeme predikcie
  - biely šum nahradíme nulou



- Výsledok:

189	0,706783
190	1,534983
191	2,447012
192	1,593168
193	-0,39105
194	-1,99968
195	-1,62184
196	-0,70644
197	0,518625
198	2,44298
199	4,224192
200	3,797682
201	1,726193
202	-0,81136
203	-2,60317
204	-2,95478
205	-1,924
206	-0,18203
207	1,38055
208	2,087499
209	1,749031
210	0,67427
211	-0,5427
212	-1,33291
213	[illegible]



- Vzťah $\hat{x}_t(\tau) = \mathbb{E}_t(x_{t+\tau})$ sa zhoduje s touto intuíciou.
- Majme AR(p) proces

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + u_t.$$

- Potom:

$$\begin{aligned} x_{t+\tau} &= \delta + \alpha_1 x_{t+\tau-1} + \cdots + \alpha_p x_{t+\tau-p} + u_{t+\tau}, \\ \underbrace{\mathbb{E}_t(x_{t+\tau})}_{\hat{x}_t(\tau)} &= \delta + \alpha_1 \mathbb{E}_t(x_{t+\tau-1}) + \cdots + \alpha_p \mathbb{E}_t(x_{t+\tau-p}) + \underbrace{\mathbb{E}_t(u_{t+\tau})}_{0} \end{aligned}$$

pričom

$$\mathbb{E}_t(x_{t+s}) = \begin{cases} \hat{x}_t(s), & \text{pre } s > 0 \\ x_{t+s}, & \text{pre } s \leq 0 \end{cases}$$

Predikcie v MA modeloch

- Majme MA(1) proces

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

a počítajme predikcie $\hat{x}_t(\tau)$:

$$\begin{aligned} x_{t+s} &= \mu + u_{t+s} - \beta u_{t+s-1}, \\ \underbrace{\mathbb{E}_t(x_{t+s})}_{\hat{x}_t(s)} &= \mu + \underbrace{\mathbb{E}_t(u_{t+s})}_{0} - \beta \underbrace{\mathbb{E}_t(u_{t+s-1})}_{u_t \text{ pre } s=1, \text{ inak} 0}, \end{aligned}$$

Teda:

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t, & \text{pre } s = 1 \\ \mu, & \text{pre } s = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- *Cvičenie:* Dokážte, že pre MA(q) model je $\hat{x}_t(s) = \mu$ pre $s > q$ a že pre $s \leq q$ predikcie obsahujú realizované hodnoty bieleho šumu u

- Predikcie pre MA(1) model teda sú:

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t, & \text{pre } s = 1 \\ \mu, & \text{pre} s = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- Obsahujú teda hodnotu bieleho šumu u_t - tá už v čase konštrukcie predikcií bola realizovaná, nie sme však schopní ju pozorovať.
- Cvičenie z predch. slajdu - podobná situácia nastáva pre ľubovoľný MA(q) proces
- *Ako teda prakticky počítať predikcie?* Myšlienka: vyjadríme u_t pomocou hodnôt procesu x.
- Tento výpočet si ukážeme pre MA(1) model.

Predikcie v MA(1) modeli

- Vyjadrujeme teda u_t pomocou $x_1, x_2, \ldots, x_t$.
- Využijeme pritom:
  - Pre MA(1) sme odvodili:

$$\hat{x}_t(1) = \mu - \beta u_t \tag{1}$$

  - Pre predikčnú chybu platí:

$$x_t - \hat{x}_{t-1}(1) = u_t \tag{2}$$

- Budeme postupne počítať $\hat{x}_t(1)$ pre $t = 0, 1, 2, \ldots$

- Pre $t = 0$:

$$\hat{x}_0(1) \stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_0 \tag{3}$$

- Pre $t = 1$:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1(1) &\stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_1 \\
&\stackrel{(2)}{=} \mu - \beta \left[x_1 - \hat{x}_0(1)\right] \\
&\stackrel{(3)}{=} \mu - \beta \left[x_1 - (\mu - \beta u_0)\right] \\
&= \mu(1 + \beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0
\end{aligned} \tag{4}$$

- Pre $t = 2$:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_2(1) &\overset{(1)}{=} \mu - \beta u_2 \\
&\overset{(2)}{=} \mu - \beta \left[x_2 - \hat{x}_1(1)\right] \\
&\overset{(4)}{=} \mu - \beta \left[x_2 - (\mu(1+\beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0\right] \\
&= \mu(1+\beta+\beta^2) - \beta x_2 - \beta^2 x_1 - \beta^3 u_0 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

- Pre všeobecné t:

$$\begin{aligned}\hat{x}_t(1) &= \mu(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^t)\\ &\quad -\beta x_t-\beta^2 x_{t-1}-\cdots-\beta^t x_1-\beta^{t+1}u_0\end{aligned}$$

- Pripomeňme si podmienku invertovateľnosti $|\beta| < 1$.
- Jediný nepozorovateľná hodnota v predikcii je u_0, ale vplyv člena $\beta^{t+1}u_0$ ide k nule pre $t \to \infty$ (t je počet dát) $\Rightarrow$ zanedbáme ho a dostaneme predpis pre predikcie obsahujúci len pozorovateľné hodnoty