Modelovanie volatility - GARCH modely

Beáta Stehlíková

2-EFM-102 Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Ceny akcií, ACF výnosov

Dáta

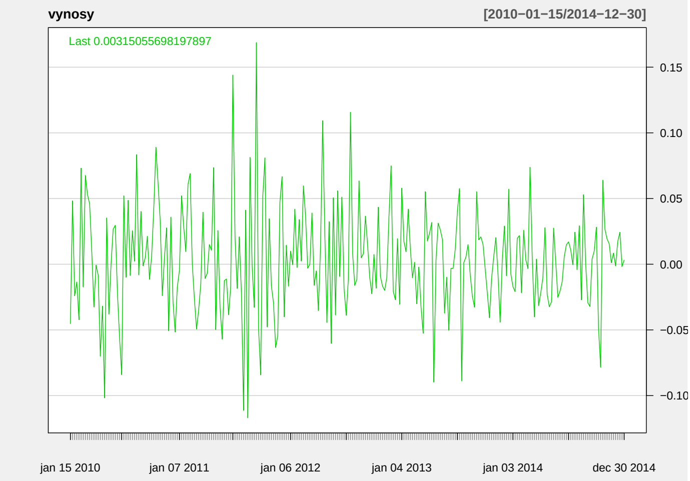
- Týždenné ceny akcií pomocou balíka quantmod
- Vypočítame logaritmické výnosy
- Na začiatku semestra sme analyzovali autokorelácie takýchto dát

```
library(quantmod)
library(astsa)

getSymbols("EBAY", from = "2010-01-01", to = "2014-12-31",
           auto.assign = TRUE)
```

```
## [1] "EBAY"
```

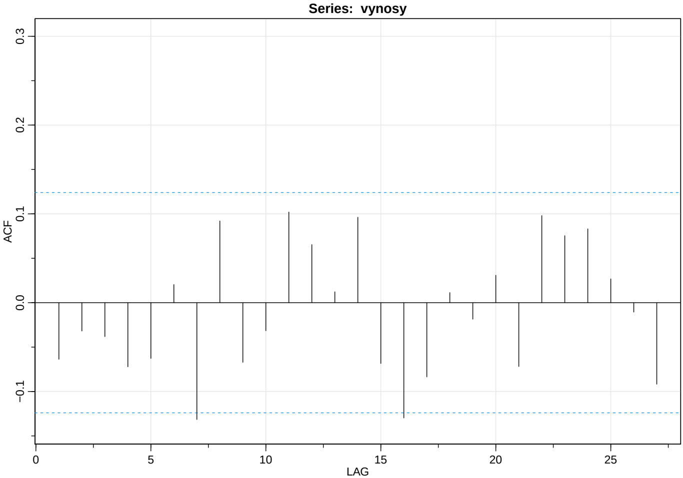
```
EBAY <- to.weekly(EBAY)
vynosy <- diff(log(EBAY$EBAY.Adjusted))[-1]
```

```r
chartSeries(vynosy, theme = "white")
```



ACF výnosov

```
acf1(vynosy)
```



Modelovanie výnosov - posunutý biely šum

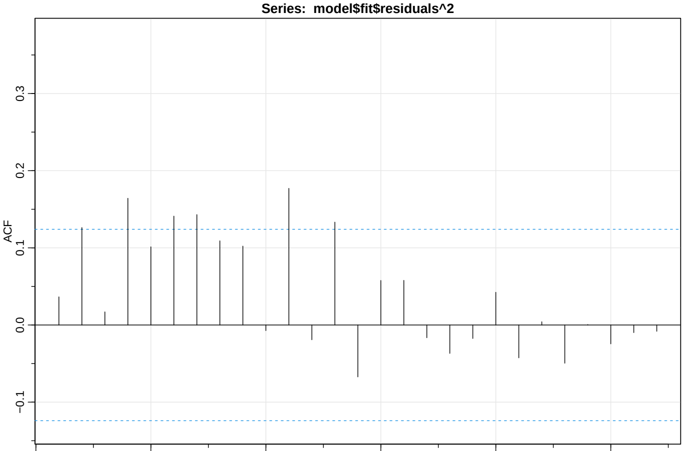
- Výnosy modelujeme ako biely šum posunutý o konštantu
- Rezíduá vyzerajú ako biely šum

```
sarima(vynosy, 0, 0, 0)
```

Problém: korelácia druhých mocnín rezíduí

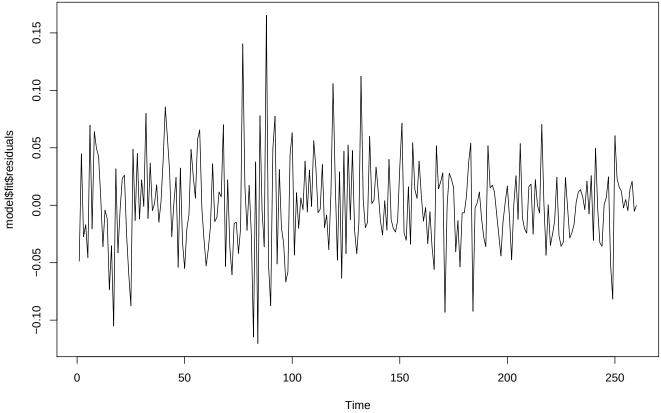
Druhé mocniny rezíduí

```
model <- sarima(vynosy, 0, 0, 0, details = FALSE)
acf1(model$fit$residuals^2)
```



Ešte raz samotné rezíduá

```
plot(model$fit$residuals)
```



- Ak je absolútna hodnota rezídua malá, tak väčšinou nasleduje rezíduum tiež s malou absolútnou hodnotou
- Podobne za rezíduom s veľkou absolútnou hodnotou nasleduje často rezíduum s veľkou absolútnou hodnotou - môže byť kladné aj záporné, preto sa táto vlastnosť na ACF neprejavila
- Druhé mocniny ale kvôli tomu korelované sú - biely šum však túto vlastnosť nemá
- Možné vysvetlenie: nekonštantná disperzia
- Budeme teda modelovať disperziu šumu

ARCH a GARCH modely

ARCH model

Definícia, ohraničenia na parametre

- u_t nie je biely šum, ale $u_t = \sqrt{\sigma^2}\eta_t$, kde η je biely šum s normálnym rozdelením a jednotkovou disperziou, teda
$$u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$
- **ARCH model** (*autoregressive conditional heteroskedasticity*)
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p u_{t-p}^2$$
- Ohraničenia na parametre:
  - kladnosť disperzie: $\omega > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1} \geq 0, \alpha_p > 0$
  - stacionarita: $\alpha_1 + \ldots \alpha_p < 1$
- Označme nepodmienenú strednú hodnotu $s^2 = \mathbb{E}(\sigma_t^2)$, potom:
$$s^2 = \omega + \alpha_1 s^2 + \cdots + \alpha_p s^2 \Rightarrow s^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_p}$$

Nevýhody

- Nevýhody ARCH modelov:
  - malý počet členov u_{t-i}^2 často nestačí - vo štvorcoch rezíduí je stále autokorelácia
  - pri väčšom počte členov sú koeficienty často nesignifikantné
- Zovšeobecnenie: **GARCH modely**, odstraňujú tieto problémy

GARCH model

Definícia, ohraničenia na parametre

- **GARCH(p,q)** model (*generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*):

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p u_{t-p}^2 \\ &\quad + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \sigma_{t-q}^2\end{aligned}$$

- Ohraničenia na parametre:
  - kladnosť disperzie: $\omega > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1} \geq 0, \alpha_p > 0,$ $\beta_1, \ldots, \beta_{q-1} \geq 0, \beta_q > 0$
  - stacionarita: $(\alpha_1 + \ldots \alpha_p) + (\beta_1 + \ldots \beta_q) < 1$
- Často sa používa GARCH(1,1)

GARCH modely v R-ku

Postup

- Balík `fGarch`
- Funkcia `garchFit`, model sa píše v tvare napríklad `arma(1,1) + garch(1,1)`
- parametrom `trace = FALSE` zrušíme vypisovanie podrobností o konvergencii optimalizačného procesu

Prístup k hodnotám z výstupu

Napríklad:

- `@fitted` - fitované hodnoty
- `@residuals` - rezíduá
- `@h.t` - odhadnutá disperzia
- `@sigma.t` - odhadnutá štandardná odchýlka

Štandardizované rezíduá:

- rezíduá vydelené ich štandardnou odchýlkou
- majú byť bielym šumom
- aj ich druhé mocniny majú byť bielym šumom

Výnosy EBAY - pokračovanie

- Odhadneme model *konštanta + šum*, ale na modelovanie šumu skúsime použiť ARCH a ARCH modely
- ARCH(1) model:

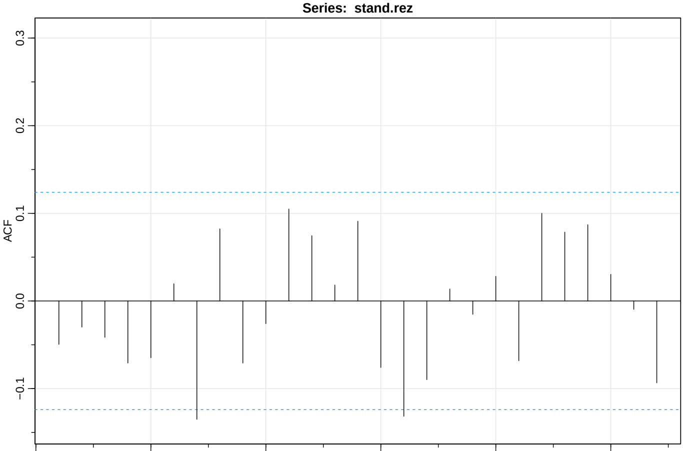
```
library(fGarch)

# arch(1) = garch(1, 0)
model10 <- garchFit(~garch(1,0), data = vynosy, trace = FAI
```

Zobrazíme:

- ACF štandardizovaných rezíduí
- ACF druhých mocnín štandardizovaných rezíduí
- `summary` s testami štandardizovaných rezíduí a ich druhých mocnín + LM ARCH testom (nulová hypotéza je homoskedasticita)

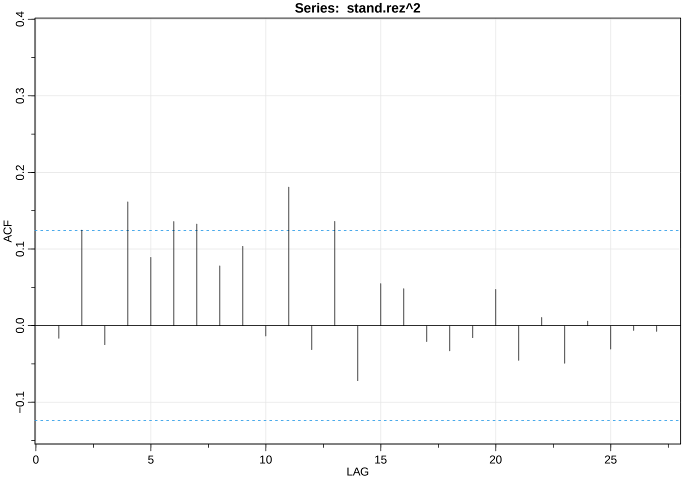
ARCH(1) - štandardizované rezíduá

```
stand.rez <- model10@residuals/model10@sigma.t
acf1(stand.rez)
```



ARCH(1) - druhé mocniny štandardizovaných rezíduí

```
acf1(stand.rez^2)
```



ARCH(1): testy

```
Standardised Residuals Tests:
                                Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  29.30932  4.320771e-07
 Shapiro-Wilk Test  R    W      0.9821506 0.002409571
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  12.19182  0.2724241
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  20.71019  0.1463473
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  28.1477   0.1059487
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  27.69651  0.002018554
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  44.28841  9.909431e-05
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  46.07071  0.0007882045
 LM Arch Test       R    TR^2   26.03807  0.01060155
```

ARCH(2): testy

```
Standardised Residuals Tests:
                                Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  34.77969  2.803408e-08
 Shapiro-Wilk Test  R    W      0.9815247 0.001870525
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  10.66085  0.3845436
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  19.14786  0.2071117
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  26.70303  0.1438278
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  14.1969   0.1641984
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  27.86506  0.02242916
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  30.04476  0.06913165
 LM Arch Test       R    TR^2   20.07658  0.06565113
```

ARCH(3): testy

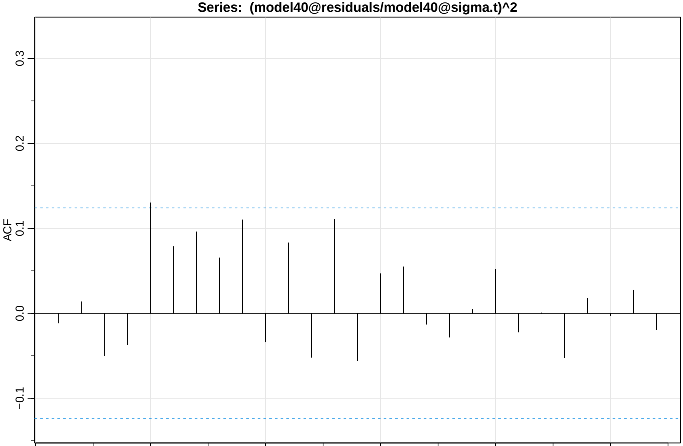
```
Standardised Residuals Tests:
                                  Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test    R    Chi^2  34.11757  3.903591e-08
 Shapiro-Wilk Test   R    W      0.9816657 0.00197985
 Ljung-Box Test      R    Q(10)  10.61708  0.3881183
 Ljung-Box Test      R    Q(15)  19.06902  0.210623
 Ljung-Box Test      R    Q(20)  26.57077  0.1477777
 Ljung-Box Test      R^2  Q(10)  14.10382  0.1683087
 Ljung-Box Test      R^2  Q(15)  27.69602  0.02355115
 Ljung-Box Test      R^2  Q(20)  29.89999  0.07149039
 LM Arch Test        R    TR^2   20.00048  0.06707688
```

ARCH(4): testy

```
Standardised Residuals Tests:
                                Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  12.83554  0.001632289
 Shapiro-Wilk Test  R    W      0.9881233 0.03079696
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  10.45921  0.4011694
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  18.61209  0.2318531
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  25.86172  0.1704277
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  14.51946  0.1505883
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  21.99281  0.1079927
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  23.86874  0.2481727
 LM Arch Test       R    TR^2   18.1817   0.1102839
```

ARCH(4): ACF druhých mocnín rezíduí

```
model40 <- garchFit(~garch(4,0), data = vynosy, trace = FAL
acf1((model40@residuals/model40@sigma.t)^2)
```



ARCH(4): nesignifikantné koeficienty modelu

```
Error Analysis:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     4.116e-03   2.436e-03    1.690   0.0911 .
omega  1.165e-03   2.014e-04    5.783 7.32e-09 ***
alpha1 3.953e-02   1.283e-01    0.308   0.7579
alpha2 1.266e-01   8.064e-02    1.570   0.1164
alpha3 1.000e-08   1.528e-01    0.000   1.0000
alpha4 1.101e-01   8.175e-02    1.347   0.1780
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

GARCH(1,1)

```
model11 <- garchFit(~garch(1,1), data = vynosy, trace = FAI
```

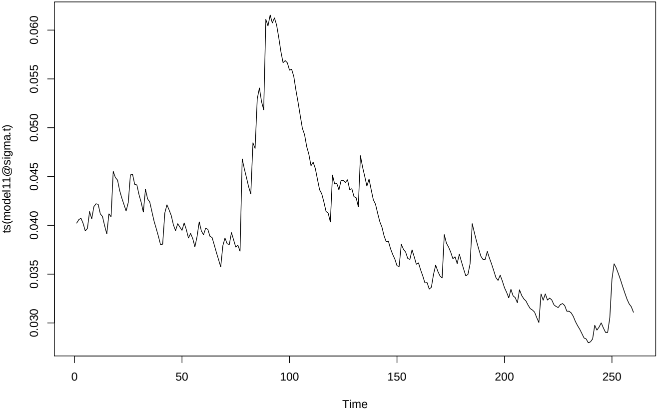
```
Standardised Residuals Tests:
                                 Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  11.47383  0.003224707
 Shapiro-Wilk Test  R    W      0.9873551 0.0219362
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  10.14321  0.4280201
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  17.36923  0.297275
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  23.60515  0.2600655
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  9.638904  0.4727237
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  16.91175  0.3241676
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  18.88114  0.5295636
 LM Arch Test       R    TR^2   12.11644  0.4363738
```

GARCH(1,1): koeficienty

```
Error Analysis:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     3.360e-03   2.345e-03    1.432   0.1520
omega  2.330e-05   3.533e-05    0.660   0.5096
alpha1 4.326e-02   2.402e-02    1.801   0.0717 .
beta1  9.402e-01   3.897e-02   24.129   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Odhadnutá štandardná odchýlka

```
plot(ts(model11@sigma.t))
```



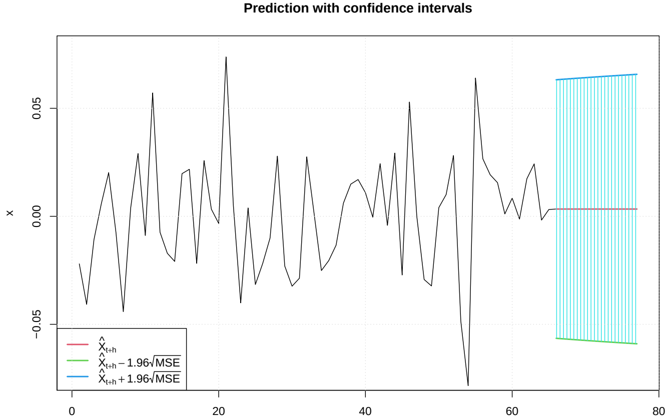
Iný prístup k rôznym grafom

```
> plot(model11)

Make a plot selection (or 0 to exit):

 1:    Time Series
 2:    Conditional SD
 3:    Series with 2 Conditional SD Superimposed
 4:    ACF of Observations
 5:    ACF of Squared Observations
 6:    Cross Correlation
 7:    Residuals
 8:    Conditional SDs
 9:    Standardized Residuals
10:    ACF of Standardized Residuals
11:    ACF of Squared Standardized Residuals
12:    Cross Correlation between r^2 and r
13:    QQ-Plot of Standardized Residuals
```

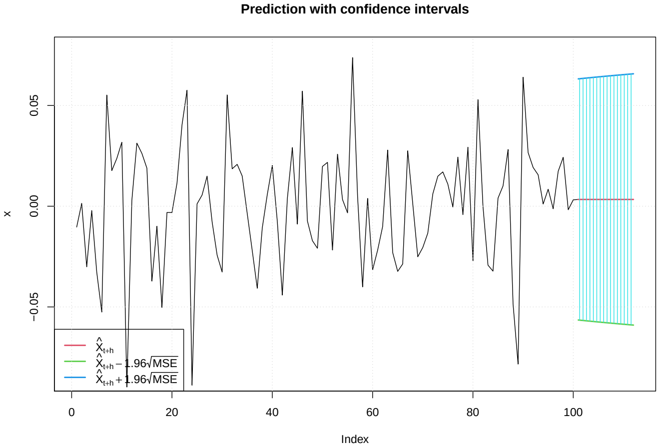
Predikcie v GARCH modeloch

- Predikcie pomocou funkcie `predict`, parameter `n.ahead` určuje počet pozorovaní

```
predikcie <- predict(model11, n.ahead = 12, plot = TRUE)
```

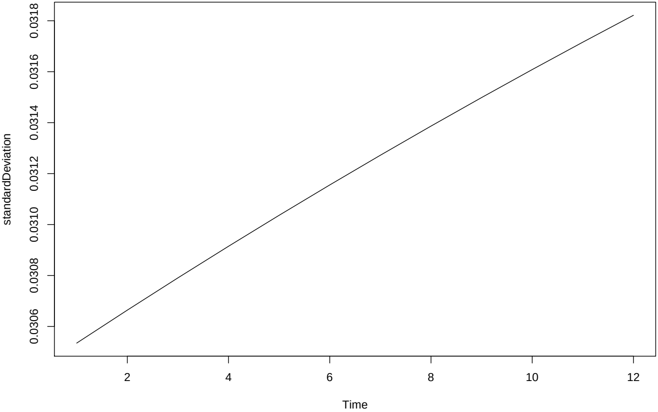


- Parametrom `nx` sa dá zmeniť počet pozorovaní z dát, ktoré sa vykreslia (tu je `nx = 100`):



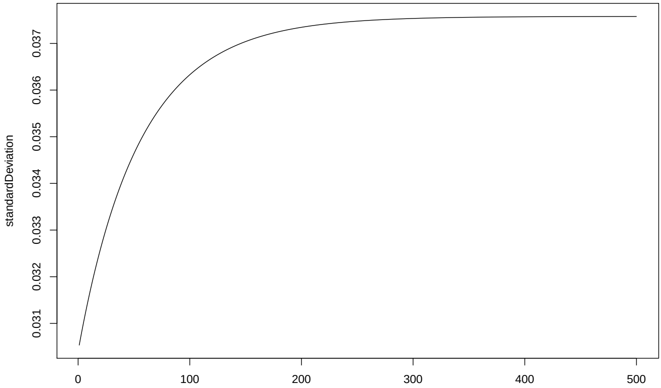
- Predikovaný vývoj štandardnej odchýlky:

```
plot(ts(predikcie[3]))
```



- Predikovaný vývoj štandardnej odchýlky

```
predikcie <- predict(model11, n.ahead = 500, plot = FALSE)
plot(ts(predikcie[3]))
```



Cvičenie

Zopakujte pre dáta z dlhšieho obdobia:

```
getSymbols("EBAY", from = "2005-01-01", to = "2019-12-31",
           auto.assign = TRUE)
```

Modelujeme logaritmické výnosy.

- Zhodnoťte model konštanta + biely šum.
- Odhadnite ARCH modely a testujte ich štandardizované rezíduá.
- Odhadnite GARCH(1, 1) model.
- Nájdite vhodný ARCH/GARCH model pre výnosy
- Spravte predikciu štandardnej odchýlky výnosov.

Aplikácia: Value at risk

Čo je Value at risk (VaR)

- Je to vlastne kvantil
- Nech X je hodnota portfólia, potom

$$\mathbb{P}(X \leq VaR) = \alpha,$$

  napr. $\alpha = 0.05$
- Štandardne GARCH predpokladá normálne rozdelenie (dajú sa odhadovať aj iné) $\rightarrow$ vieme počítať kvantily
- Nedostatky:
- predpoklad normality
- sú aj lepšie miery rizika ako VaR

- Príklad:

```
ocakavanyVynos <- 0.005
stdOdchylka <- 0.0305
var <- qnorm(0.05, mean = ocakavanyVynos, sd = stdOdchylka)
var
```

```
## [1] -0.04516804
```

- **Cvičenie:** Vypočítajte pomocou predikcie z GARCH modelu VaR pre nasledujúci deň.

Iné modely pre volatilitu

- **Threshold GARCH**
  - $u_t > 0$ - *good news*, $u_t < 0$ - *bad news*
  - TARCH umožňuje, aby mali na volatilitu rôzny vplyv
  - *leverage effect* - väčší vplyv na volatilitu majú *bad news*
- Nemodelujeme disperziu (ako v ARCH a GARCH modeloch), ale
  - jej logaritmus - **exponential GARCH**
  - ľubovoľnú mocninu štandardnej odchýlky - **power GARCH**
- a ďalšie...