Diferenčná rovnica 2. rádu s komplexnými koreňami charakteristickej rovnice

Beáta Stehlíková

2-PMS-10 Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Odvodenie postupu výpočtu

Všeobecné riešenie

- Riešime diferenčnú rovnicu $y_k = Ay_{k-1} + By_{k-2}$, resp.
$$y_k - Ay_{k-1} - By_{k-2} = 0 \tag{1}$$
so začiatočnými podmienkami y_0, y_1.
- Hľadáme riešenie v tvare λ^k, dosadením dostaneme, že
$$\lambda^2 - A\lambda - B = 0 \tag{2}$$
- Ak má táto kvadratická rovnica dva rôzne korene λ_1, λ_2, máme dve riešenia a všeobecné riešenie potom je
$$y_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k \tag{3}$$
- Dosadením y_0 a y_1 získame hodnoty konštánt c_1, c_2.
- Aj prípade komplexných koreňov je toto predpis pre riešenie, ale zo zadania pôvodnej úlohy vidieť, že výsledkom sú reálne hodnoty. Preto chceme výsledok zapísať bez imaginárnej jednotky.

Prípad komplexných koreňov

- Korene (2) sú komplexne združené, označme $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}$.
- Zapíšeme komplexné číslo λ v goniometrickom tvare

$$\lambda = r(\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)) \tag{4}$$

- Zapíšeme mocninu λ^k v goniometrickom tvare
- Aby bol výsledok (3) reálnym číslom, aj konštanty c_1, c_2 musia byť komplexne združené čísla. - *dokážte pre všeobené λ, aby sme tento výsledok mohli používať*
- Riešenie (3) má potom tvar (r, ϕ máme z (4)) - *tiež dokážte vo všeobecnosti, potom môžeme z (4) hneď napísať toto*

$$y_k = r^k(d_1\cos(k\phi) + d_2\sin(k\phi)) \tag{5}$$

- Konštanty d_1, d_2 dopočítame zo začiatočných podmienok y_0, y_1

Nepovinné dodatky: Komplexné čísla v R-ku

Definovanie komplexných čísel

```
complex(real = 1, imaginary = 2)
```

```
## [1] 1+2i
```

```
1 + 2i # bez medzery a nasobenia
```

```
## [1] 1+2i
```

```
2 + 1i  # nestaci 2 + i
```

```
## [1] 2+1i
```

```
1 + (sqrt(3) + 1) * 1i
```

```
## [1] 1+2.732051i
```

Poznámka: Odmocnina z mínus jednotky v tvare `sqrt(-1)` dá chybu. Treba z nej spraviť komplexné číslo:

```
sqrt(-1 + 0i)
```

```
## [1] 0+1i
```

```
sqrt(as.complex(-1))
```

```
## [1] 0+1i
```

Reálna a imaginárna časť

```
z <- polyroot(c(3, 2, 1))[1] # prvy koren
Re(z)
```

```
## [1] -1
```

```
Im(z)
```

```
## [1] 1.414214
```

```
z <- 2 + 4i
Conj(z) # komplexne zdruzene cislo
```

```
## [1] 2-4i
```

Aritmetika s komplexnými číslami

```
z1 <- 2 + 3i
z2 <- 0.5 + 0.2 * 1i

z1 + z2
```

```
## [1] 2.5+3.2i
```

```
z1 * z2
```

```
## [1] 0.4+1.9i
```

```
z1^3
```

```
## [1] -46+9i
```

Goniometrický tvar

```
z <- 1 + 1i
Mod(z) # modulus = absolutna hodnota
```

```
## [1] 1.414214
```

```
Arg(z) # argument = uhol s kladnou x-sovou poloosou
```

```
## [1] 0.7853982
```

```
complex(modulus = 2, argument = pi/4)
```

```
## [1] 1.414214+1.414214i
```

Vektorové výpočty

```
z <- complex(real = c(1, 2, 3), imaginary = c(2, 3, 4))
z
```

```
## [1] 1+2i 2+3i 3+4i
```

```
z^2
```

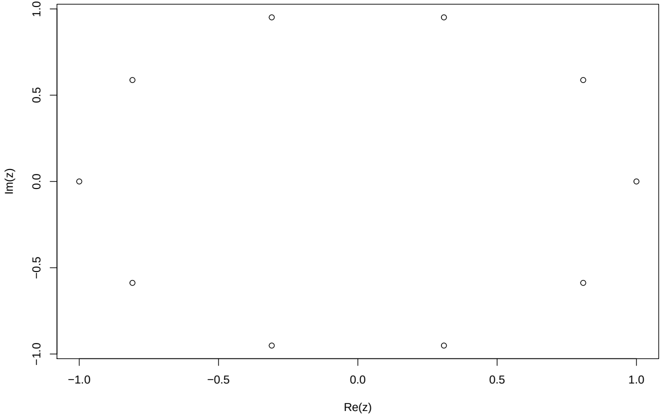
```
## [1] -3+ 4i -5+12i -7+24i
```

```
z <- complex(modulus = 1, argument = 2 * pi/10 * (0:9))
z^10 # vo vektore z su desiate odmocniny z jednotky
```

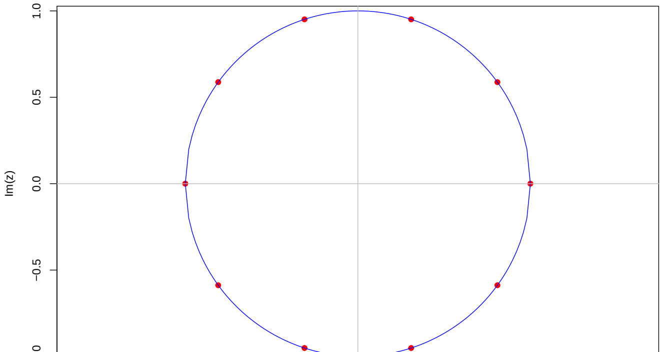
```
##  [1] 1+0i 1-0i 1-0i 1-0i 1-0i 1-0i 1-0i 1-0i 1-0i 1-0i
```

Kreslenie komplexných čísel

```
plot(z)
```



```
plot(z, asp = 1, col = "red", pch = 19)
curve(sqrt(1 - x^2), -1, 1, add = TRUE, col = "blue")
curve(-sqrt(1 - x^2), -1, 1, add = TRUE, col = "blue")
abline(h = 0, col = "grey")
abline(v = 0, col = "grey")
```



Fraktály

- S komplexnými číslami súvisí napríklad **Mandelbrotova množina**
- Podrobnejšie: kapitola 2.2 v bakalárskej práci *Katarína Ivanová: Matematika na pohľadniciach (2014)*: http://www.iam.fmph.uniba.sk/efm/bakalarky/2014/ivanova/bakalarka.pdf
- Obrázky Mandelbrotovej množiny v R-ku: https://www.r-bloggers.com/2014/12/the-mandelbrot-set-in-r/