

# ARMA modely II. - moving average modely (kľzavé priemery, MA)

Beáta Stehlíková

2-PMS-101 Časové rady

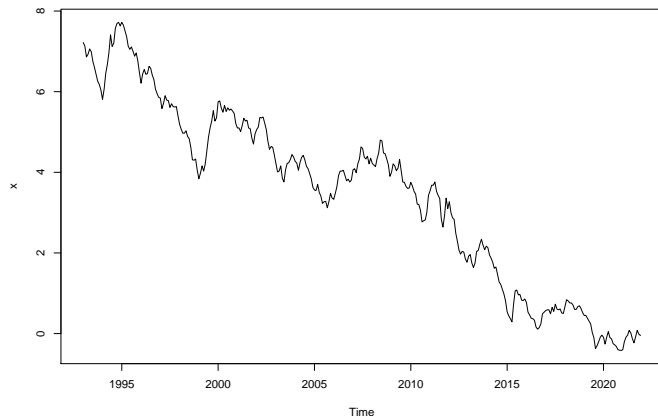
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

## Motivácia

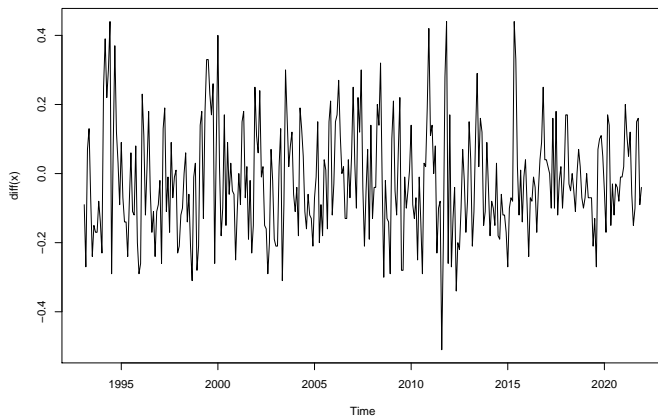
## Príklad: Dlhodobé úrokové miery v Rakúsku

## Dáta

- ▶ Od začiatku dostupnosti dát do konca roka 2021, mesačné

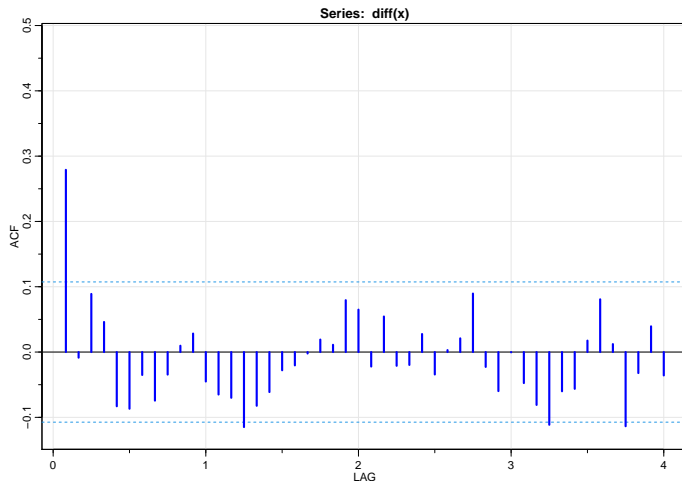


```
plot(diff(x)) # diferencujeme kvoli trendu
```



## Odhadnutá ACF

- ▶ Odhadnutá ACF diferencií logaritmov:



## Odhadnutá ACF

- ▶ Prvá výrazne nenulová, ostatné skoro nulové
- ▶ Nevyzerá to ako typický priebeh pre AR proces:
  - ▶ tam klesala ACF postupne
  - ▶ priebeh tohto typu mala PACF

## Príklad z prvej prednášky



- ▶ Nech  $u_t$  je biely šum, definujme

$$x_t = u_t + u_{t-1}$$

- ▶ Vypočítali sme:

$$\mathbb{E}(x_t) = 0, \mathbb{D}(x_t) = 2\sigma^2$$

$$\text{Cov}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\text{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} 1/2 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- ▶ ACF je nulová pre  $k = 2, 3, \dots$  - presne tá vlastnosť, ktorú potrebujeme

## Zovšeobecnenie príkladu a plán prednášky

- ▶ Príklad zovšeobecníme tak, aby
  - ▶ sa zachovala nulovosť korelácií okrem prvej
  - ▶ prvá korelácia mohla nadobädať aj iné hodnoty ako  $1/2 \Rightarrow$   
MA(1) procesy
- ▶ Procesy, ktoré majú prvých  $q$  nenulových a ostatné nulové  $\Rightarrow$   
MA( $q$ ) procesy

## MA(1) procesy

## Definícia, stacionarita, momenty, ACF, PACF

- ▶ Nech  $u_t$  je biely šum, potom

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

sa nazýva **moving average proces prvého rádu - MA(1)**

- ▶ **Woldova reprezentácia:**  $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ , pre MA(1) proces:  $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\beta, \psi_j = 0$  pre  $j = 2, 3, \dots \rightarrow$  **vždy stacionárny**
- ▶ **Momenty a ACF:**

$$\mathbb{E}(x_t) = \mu, \mathbb{D}(x_t) = (1 + \beta^2)\sigma^2$$

$$\text{Cov}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} -\beta\sigma^2 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\text{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Pripomeňme si PACF:

$$\Phi_{kk} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}}$$

- Pre MA(1) proces dosadzujeme  $\rho(k) = 0$  pre  $k = 2, 3, \dots$

$$\Phi_{11} = \rho(1)$$

$$\Phi_{22} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-\rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}$$

$$\Phi_{33} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & 0 \\ 0 & \rho(1) & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & 0 \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ 0 & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{\rho(1)^3}{1 - 2\rho(1)^2}$$

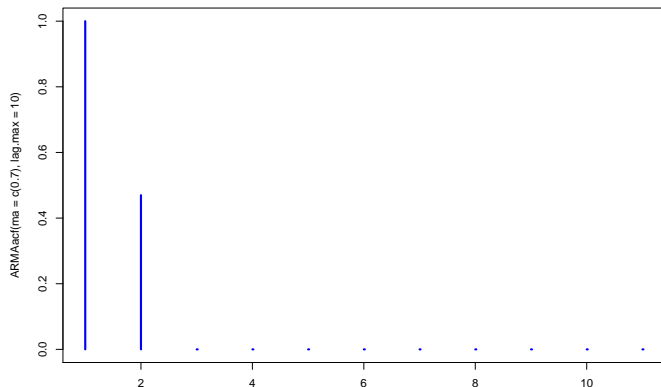


**Cvičenie:** Odvodte ďalší člen PACF:

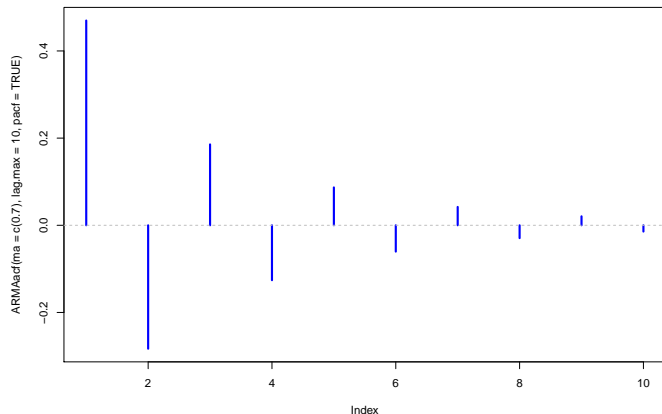
$$\Phi_{44} = \frac{-\rho(1)^4}{(1 - \rho(1)^2)^2 - \rho(1)^2}$$

Príklad 1: výpočet PACF v R-ku,  $x_t = u_t + 0.7u_{t-1}$ 

```
plot(ARMAacf(ma = c(0.7), lag.max = 10),  
     type = "h", col = "blue", lwd = 3)
```

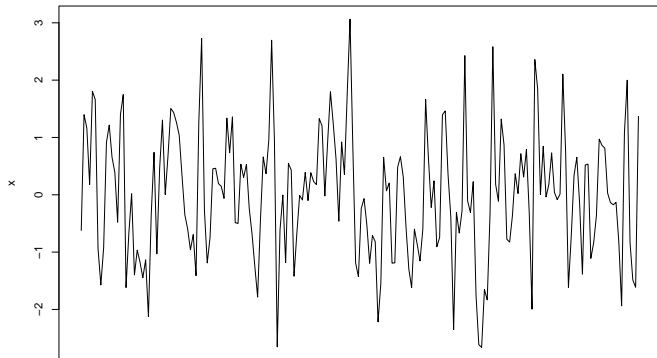


```
plot(ARMAacf(ma = c(0.7), lag.max = 10, pacf = TRUE),  
     type = "h", col = "blue", lwd = 3)  
abline(h = 0, col = "grey", lty = 2)
```



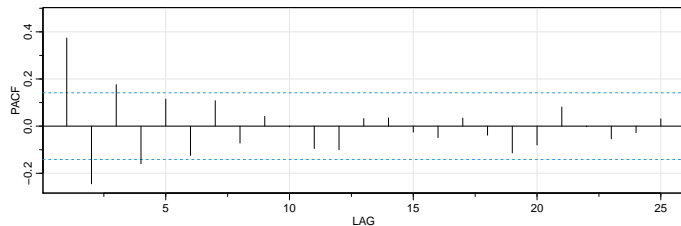
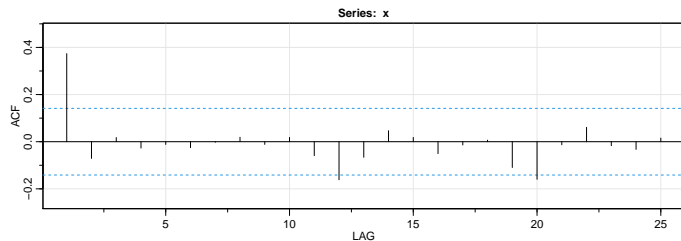
## Príklad 2: simulované dáta, $x_t = u_t + 0.7u_{t-1}$

```
set.seed(123)  
x <- arima.sim(model = list(ma = c(0.7)), n = 200)  
plot(x)
```



## Odhad ACF a PACF

`acf2(x)` # *naraz ACF (bez lagu 0) a PACF, balik a stsa*



## Príklad 3, 4: výpočet ručne

- Nech  $u_t$  je biely šum s rozdelením  $N(0, 4)$ , definujme

$$x_t = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1}$$

Potom:  $\mathbb{E}(x_t) = 0$ ,  $\mathbb{D}(x_t) = (1 + (1/2)^2) \times 4 = 5$

$$\text{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} \frac{1/2}{1+1/4} = 2/5 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Nech  $u_t$  je biely šum s rozdelením  $N(0, 1)$ , definujme

$$x_t = u_t + 2u_{t-1}$$

Potom:  $\mathbb{E}(x_t) = 0$ ,  $\mathbb{D}(x_t) = (1 + 2^2) \times 1 = 5$

$$\text{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} \frac{2}{1+4} = 2/5 & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

└ MA(1) procesy

└ MA(1) procesy s danou ACF, invertovateľnosť

## MA(1) procesy s danou ACF, invertovateľnosť

## MA(1) procesy s danou ACF

- ▶ Zovšeobecníme predchádzajúce dva príklady (vyšla pre ne rovnaká ACF)
- ▶ Majme MA(1) proces, teda ACF tvaru

$$\text{Cor}(x_t, x_{t+k}) = \begin{cases} -\frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{pre } k = 1, \\ 0 & \text{pre } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- ▶ Predpokladjme teraz, že máme danú hodnotu  $\rho_1 = \rho(1)$  a chceme z nej späťne určiť koeficient  $\beta$ :

$$\rho_1 = -\frac{\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \beta = ?$$

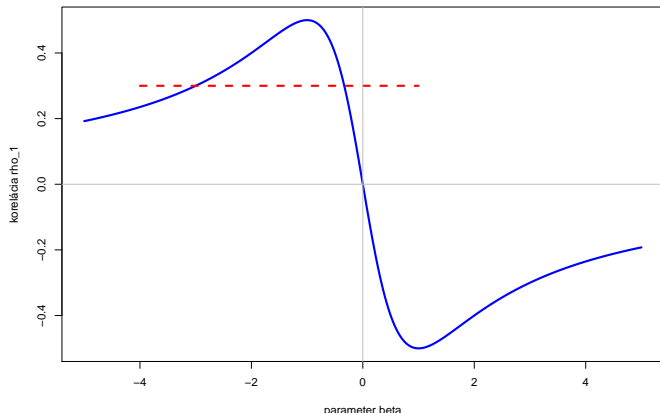


└ MA(1) procesy

└ MA(1) procesy s danou ACF, invertovateľnosť

## ► Máme teda rovnicu

$$\rho_1 = -\frac{\beta}{1 + \beta^2} \Rightarrow \beta^2 + \frac{1}{\rho_1}\beta + 1 = 0$$



└ MA(1) procesy

└ MA(1) procesy s danou ACF, invertovateľnosť

- ▶ Rovnica  $\beta^2 + \frac{1}{\rho_1}\beta + 1 = 0$  má pre  $|\rho_1| < 1/2$  dve riešenia  $\beta_1, \beta_2$ , ktoré spĺňajú  $\beta_1\beta_2 = 1$
- ▶ Procesy

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}, x_t = \mu + u_t - \frac{1}{\beta} u_{t-1}$$

majú rovnakú ACF

- ▶ Ak chceme jednoznačnú parametrizáciu, potrebujeme dodať ďalšiu podmienku

## Invertovateľnosť

- Budeme sa snažiť zapísať proces v tvare  $AR(\infty)$ :

$$x_t = \tilde{\mu} + u_t + \psi_1 x_{t-1} + \psi_2 x_{t-2} + \psi_3 x_{t-3} + \dots$$

Ak sa to dá spraviť, proces sa nazýva invertovateľný

- Pre MA(1) proces:

$$x_t = \mu + (1 - \beta L)u_t$$

$$(1 - \beta L)^{-1}x_t = (1 - \beta L)^{-1}\mu + u_t$$

inverzia  $(1 - \beta L)^{-1}$  existuje pre  $|\beta| < 1$ , vtedy

$$(1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \dots)x_t = \frac{\mu}{1 - \beta} + u_t$$

$$x_t + \beta x_{t-1} + \beta^2 x_{t-2} + \dots = \frac{\mu}{1 - \beta} + u_t$$

$$x_t = \frac{\mu}{1 - \beta} + u_t - \beta x_{t-1} - \beta^2 x_{t-2} - \dots$$

- ▶ Dostali sme teda podmienku invertovateľnosti MA(1) procesu:  
 $|\beta| < 1$
- ▶ Iný zápis tejto podmienky:
  - ▶ máme proces  $x_t = \mu + (1 - \beta L)u_t$
  - ▶ koreň polynómu  $1 - \beta L$  je  $1/\beta$
  - ▶ podmienka invertovateľnosti teda hovorí, že koreň polynómu  $1 - \beta L$  musí byť v absolútnej hodnote väčší ako 1, pri zakreslení do komplexnej roviny mimo jednotkového kruhu

## Dlhodobé úrokové miery v Rakúsku - pokračovanie

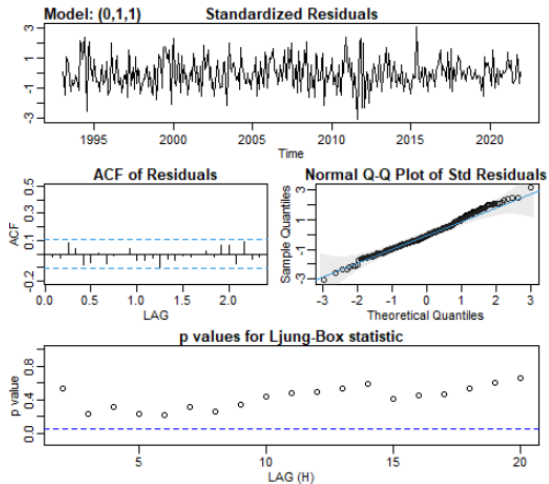
- ▶ Odhadneme MA(1) model pre diferencie, teda ARIMA(0,1,1) pre pôvodné dáta:

```
##           Estimate      SE t.value p.value
## ma1          0.3347 0.0537  6.2282  0.0000
## constant    -0.0209 0.0109 -1.9204  0.0556
```

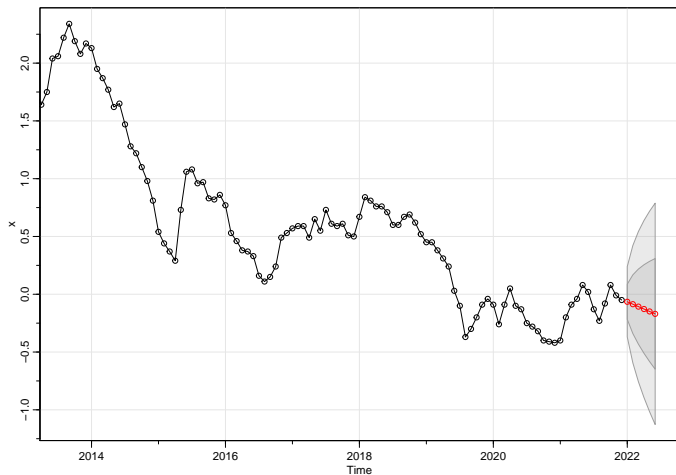
- ▶ Zapišeme model pre premennú  $\Delta x_t$  (všimnime si, že máme constant, a nie xmean):

$$\Delta x_t = -0.0209 + u_t + 0.3347u_{t-1}$$

- Rezíduá sú v poriadku - model je dobrý



## ► Predikcie z R-ka na nasledujúci polrok.





## MA(q) procesy

## Definícia, momenty, ACF, PACF, invertovateľnosť

- ▶ Nech  $u_t$  je biely šum, potom

$$x_t = \mu + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \beta_2 u_{t-2} - \dots - \beta_q u_{t-q}$$

sa nazýva **moving average proces rádu  $q$  - MA( $q$ )**

- ▶ **Woldova reprezentácia:**  $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ , pre MA( $q$ ) proces:  $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\beta_1, \dots, \psi_q = -\beta_q, \psi_j = 0$  pre  $j > q \rightarrow$  **vždy je stacionárny**
- ▶ **Momenty a ACF:**

$$\mathbb{E}(x_t) = \mu, \mathbb{D}(x_t) = (1 + \beta_1^2 + \dots + \beta_q^2) \sigma^2$$

$$\text{Cov}(x_t, x_{t+k}) = 0 \text{ pre } k = q + 1, q + 2, \dots$$

$$\text{Cor}(x_t, x_{t+k}) = 0 \text{ pre } k = q + 1, q + 2, \dots$$

- ▶ Výpočet prvých  $q$  autokorelácií:

$$\text{Cov}(x_t, x_{t+k}) = \mathbb{E}[(u_t - \beta_1 u_{t-1} - \dots - \beta_q u_{t-q}) \times (u_{t+k} - \beta_1 u_{t+k-1} - \dots - \beta_q u_{t+k-q})]$$

- ▶ Postupne dostaneme

$$k = 1 \Rightarrow \gamma(1) = (-\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \dots + \beta_{q-1}\beta_q)\sigma^2$$

$$k = 2 \Rightarrow \gamma(2) = (-\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \dots + \beta_{q-2}\beta_q)\sigma^2$$

...

$$k = q \Rightarrow \gamma(q) = (-\beta_q)\sigma^2$$

- ▶ *Pre konkrétny model je praktickejšie počítať to priamo, namiesto dosadzovania do týchto vzťahov (tie sú užitočné kvôli postupu)*
- ▶ **ACF**: autokovariancie vydeliť disperziou
- ▶ **PACF**: ACF dosadzujeme do všeobecného vzorca

## Cvičenie

Uvažujme proces  $x_t = 10 + u_t + 0.5u_{t-1} - 0.2u_{t-2} + 0.1u_{t-3}$

- ▶ Ukážte, že je invertovateľný.
- ▶ Vypočítajte jeho ACF
- ▶ Vypočítajte prvé tri hodnoty jeho PACF

Na kontrolu:

```
ARMAacf(ma=c(0.5, -0.2, 0.1), lag.max = 4)[-1]
```

```
##           1           2           3           4
## 0.29230769 -0.11538462  0.07692308  0.00000000
```

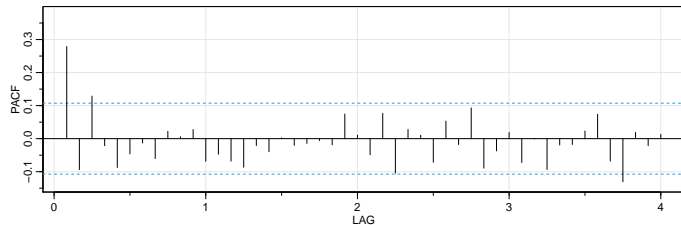
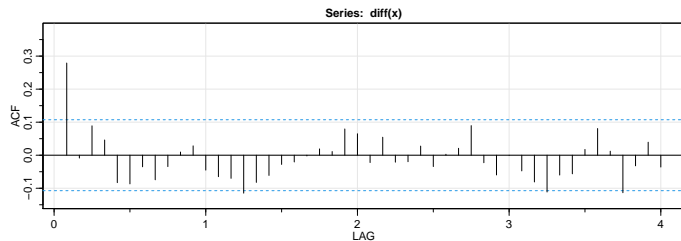
```
ARMAacf(ma=c(0.5, -0.2, 0.1), lag.max = 3, pacf = TRUE)
```

```
## [1] 0.2923077 -0.2195911  0.2093677
```

Dlhodobé úrokové miery - ešte raz :)

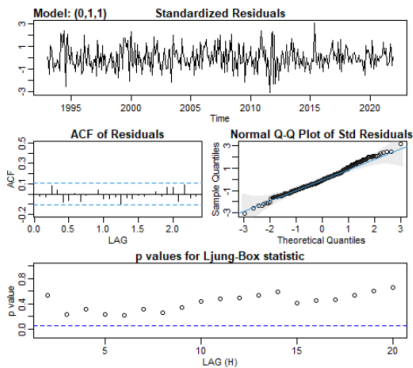
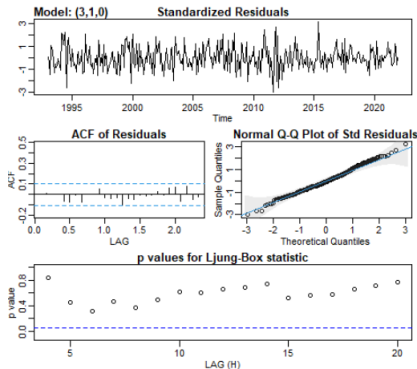
## ACF a PACF diferencií

```
acf2(diff(x))
```



└ Dlhodobé úrokové miery - ešte raz :)

# AR(3) a MA(1) pre diferencie, t.j. ARIMA(3,1,0) a ARIMA(0,1,1)





## Bayesovo informačné kritérium

```
modelAR3 <- sarima(x, 3, 1, 0, details = FALSE)
modelMA1 <- sarima(x, 0, 1, 1, details = FALSE)
```

```
modelAR3$BIC
```

```
## [1] -0.8535038
```

```
modelMA1$BIC
```

```
## [1] -0.8770151
```

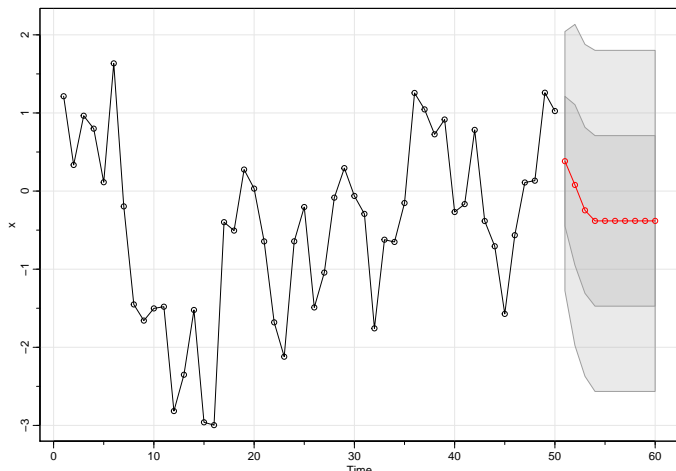
## Predikcie

## Simulovaný príklad - predikcie z MA nie sú konštantné

```
set.seed(321)
```

```
x <- arima.sim(model = list(ar = c(0.6, 0.3)), n = 50)
```

```
sarima.for(x, n.ahead = 10, 0, 0, 3)
```



## Predikcie - všeobecný princíp

- ▶ Sme v čase  $t$ , chceme predikciu hodnoty  $x_{t+\tau}$ , t. j. hodnotu procesu o  $\tau$  období.
- ▶ Označme túto predikciu  $\hat{x}_t(\tau)$ , teda
  - ▶ index  $t$  označuje čas, v ktorom konštruujeme predikciu
  - ▶ argument  $\tau$  označuje, na koľko období táto predikcia je
- ▶ Predikciou bude očakávaná hodnota procesu v tom čase, pri danej informácii, ktorú máme k dispozícii:

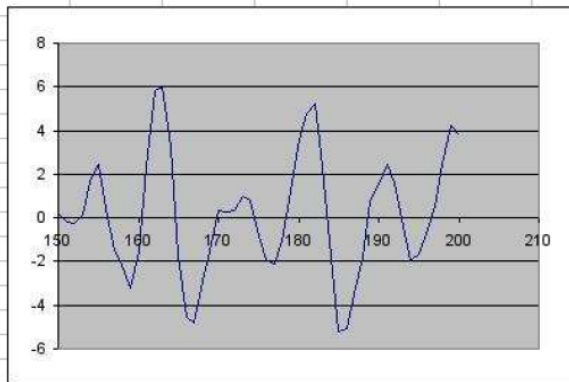
$$\hat{x}_t(\tau) = \mathbb{E}_t(x_{t+\tau})$$

(index  $t$  vo výraze  $\mathbb{E}_t$  znamená, že strednú hodnotu počítame v čase  $t$ )

## Predikcie v AR modeloch

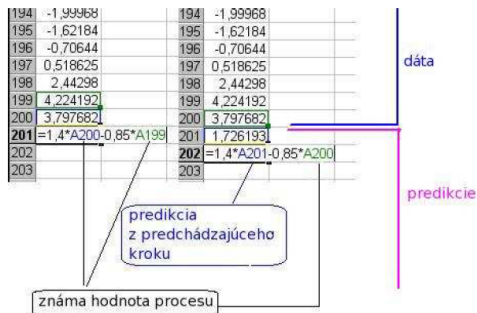
- Majme proces  $x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$  a dáta:

183	2,297308
184	-1,79321
185	-5,19365
186	-5,04636
187	-3,51133
188	-1,78753
189	0,706783
190	1,534983
191	2,447012
192	1,593168
193	-0,39105
194	-1,99968
195	-1,62184
196	-0,70644
197	0,518625
198	2,44298
199	4,224192
200	3,797682
201	
202	



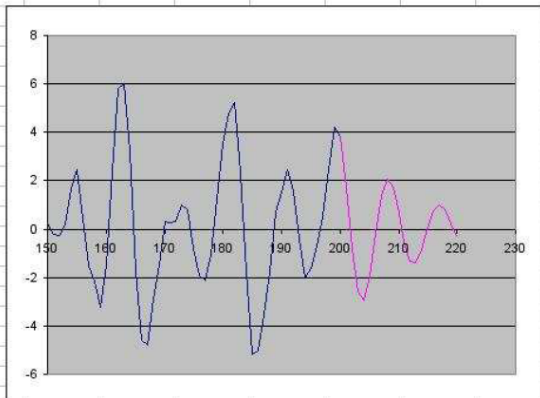


- ▶ Chceme predikcie pre hodnoty v nasledujúcich časoch
- ▶ Intuitívne:
  - ▶ do diferenciálnej rovnice dosadzujeme známe hodnoty procesu a keď už k dispozícii nie sú, dosadzujeme predikcie
  - ▶ biely šum nahradíme nulou



## ► Výsledok:

189	0,706783
190	1,534983
191	2,447012
192	1,593168
193	-0,39105
194	-1,99968
195	-1,62184
196	-0,70644
197	0,518625
198	2,44298
199	4,224192
200	3,797682
201	1,726193
202	-0,81136
203	-2,60317
204	-2,95478
205	-1,924
206	-0,18203
207	1,38055
208	2,087499
209	1,749031
210	0,67427
211	-0,5427
212	-1,33291
213	-1,40170



- ▶ Vzťah  $\hat{x}_t(\tau) = \mathbb{E}_t(x_{t+\tau})$  sa zhoduje s touto intuíciou.
- ▶ Majme AR(p) proces

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t.$$

- ▶ Potom:

$$\begin{aligned} x_{t+\tau} &= \delta + \alpha_1 x_{t+\tau-1} + \dots + \alpha_p x_{t+\tau-p} + u_{t+\tau}, \\ \underbrace{\mathbb{E}_t(x_{t+\tau})}_{\hat{x}_t(\tau)} &= \delta + \alpha_1 \mathbb{E}_t(x_{t+\tau-1}) + \dots + \alpha_p \mathbb{E}_t(x_{t+\tau-p}) + \underbrace{\mathbb{E}_t(u_{t+\tau})}_0 \end{aligned}$$

pričom

$$\mathbb{E}_t(x_{t+s}) = \begin{cases} \hat{x}_t(s), & \text{pre } s > 0 \\ x_{t+s}, & \text{pre } s \leq 0 \end{cases}$$

## Predikcie v MA modeloch

► Majme MA(1) proces

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

a počítajme predikcie  $\hat{x}_t(\tau)$ :

$$\begin{aligned}
 x_{t+s} &= \mu + u_{t+s} - \beta u_{t+s-1}, \\
 \underbrace{\mathbb{E}_t(x_{t+s})}_{\hat{x}_t(s)} &= \mu + \underbrace{\mathbb{E}_t(u_{t+s})}_0 - \beta \underbrace{\mathbb{E}_t(u_{t+s-1})}_{u_t \text{ pre } s=1, \text{ inak } 0},
 \end{aligned}$$

Teda:

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t, & \text{pre } s = 1 \\ \mu, & \text{pre } s = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- *Cvičenie:* Dokážte, že pre MA(q) model je  $\hat{x}_t(s) = \mu$  pre  $s > q$  a že pre  $s \leq q$  predikcie obsahujú realizované hodnoty bieleho šumu  $u$

- ▶ Predikcie pre MA(1) model teda sú:

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t, & \text{pre } s = 1 \\ \mu, & \text{pres } = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- ▶ Obsahujú teda hodnotu bieleho šumu  $u_t$  - tá už v čase konštrukcie predikcií bola realizovaná, nie sme však schopní ju pozorovať.
- ▶ Cvičenie z predch. slajdu - podobná situácia nastáva pre ľubovoľný MA(q) proces
- ▶ *Ako teda prakticky počítat predikcie?* Myšlienka: vyjadríme  $u_t$  pomocou hodnôt procesu  $x$ .
- ▶ Tento výpočet si ukážeme pre MA(1) model.

## Predikcie v MA(1) modeli

- ▶ Vyjadrujeme teda  $u_t$  pomocou  $x_1, x_2, \dots, x_t$ .
- ▶ Využijeme pritom:
  - ▶ Pre MA(1) sme odvodili:

$$\hat{x}_t(1) = \mu - \beta u_t \quad (1)$$

- ▶ Pre predikčnú chybu platí:

$$x_t - \hat{x}_{t-1}(1) = u_t \quad (2)$$

- ▶ Budeme postupne počítat  $\hat{x}_t(1)$  pre  $t = 0, 1, 2, \dots$



► Pre  $t = 0$ :

$$\hat{x}_0(1) \stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_0 \quad (3)$$

► Pre  $t = 1$ :

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(1) &\stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_1 \\ &\stackrel{(2)}{=} \mu - \beta [x_1 - \hat{x}_0(1)] \\ &\stackrel{(3)}{=} \mu - \beta [x_1 - (\mu - \beta u_0)] \\ &= \mu(1 + \beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0 \end{aligned} \quad (4)$$

► Pre  $t = 2$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_2(1) &\stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_2 \\
 &\stackrel{(2)}{=} \mu - \beta [x_2 - \hat{x}_1(1)] \\
 &\stackrel{(4)}{=} \mu - \beta [x_2 - (\mu(1 + \beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0)] \\
 &= \mu(1 + \beta + \beta^2) - \beta x_2 - \beta^2 x_1 - \beta^3 u_0 \quad (5)
 \end{aligned}$$

- ▶ Pre všeobecné  $t$ :

$$\begin{aligned}\hat{x}_t(1) &= \mu(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^t) \\ &\quad - \beta x_t - \beta^2 x_{t-1} - \dots - \beta^t x_1 - \beta^{t+1} u_0\end{aligned}$$

- ▶ Pripomeňme si podmienku invertovateľnosti  $|\beta| < 1$ .
- ▶ Jediný nepozorovateľná hodnota v predikcii je  $u_0$ , ale vplyv člena  $\beta^{t+1} u_0$  ide k nule pre  $t \rightarrow \infty$  ( $t$  je počet dát)  $\Rightarrow$  zanedbáme ho a dostaneme predpis pre predikcie obsahujúci len pozorovateľné hodnoty