ARMA modely III. - zmiešané ARMA procesy

Beáta Stehlíková

2-PMS-102 Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Motivácia

Kombinácia AR a MA členov

- Chceli by sme skombinovať AR aj MA členy
- Odhadneme ACF a PACF z dát a nepodobajú sa ani na AR, ani na MA proces
- Žiadny z AR a MA modelov nepripúšťa možnosť, že sa ani ACF, ani PACF nevynuluje po konečnom počte členov

- Pripomeňme si:

	AR(p)	MA(q)
ACF(k)	nenulová	nulová pre $k > q$
PACF(k)	nulová pre $k > p$	nenulová
MA(∞) - Wold	nekonečná suma	konečná suma
AR(∞)	konečná suma	nekonečná suma

- Žiadny z týchto modelov nepripúšťa možnosť, že ani ACF, ani PACF sa nevynuluje po konečnom počte členov
- Na to by sme potrebovali proces s nekonečnou AR aj MA reprezentáciou
- Uvidíme, že túto vlastnosť majú zmiešané ARMA modely (zmiešané = AR aj MA členy)

Model ARMA(1,1)

Definícia, stacionarita, invertovateľnosť

Definícia

- Nech u_t je biely šum, definujme ARMA(1,1) proces ako

$$x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1},$$

pričom $\alpha \neq \beta$ (k tej podmienke sa ešte vrátime)

- Zápis pomocou operátora L:

$$(1 - \alpha L)x_t = \delta + (1 - \beta L)u_t \tag{1}$$

Woldova reprezentácia a stacionarita

- Vyjadríme z (1) proces x_t:

$$x_t = (1-\alpha L)^{-1}\delta + (1-\alpha L)^{-1}(1-\beta L)u_t,$$

- Inverzný operátor $(1-\alpha L)^{-1}$ existuje pre $|\alpha| < 1$ (podmienka stacionarity pre AR(1) proces), v tom prípade

$$(1-\alpha L)^{-1} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots$$

- Podmienka stacionarity ARMA(1,1) procesu
  - je teda rovnaká ako pre AR(1) proces
  - je ňou nerovnosť $|\alpha| < 1$
  - to sa dá zapísať aj tak, že koreň polynómu $1-\alpha L$ je mimo jednotkového kruhu

- Woldova reprezentácia potom je

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\delta}{1-\alpha} + (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 \dots)(1 - \beta L) u_t \\ &= \frac{\delta}{1-\alpha} + u_t + (\alpha - \beta) u_{t-1} + \alpha(\alpha - \beta) u_{t-2} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

teda jej koeficienty sú

$$\phi_0 = 1, \phi_1 = \alpha - \beta, \phi_2 = \alpha(\alpha - \beta), \dots, \phi_k = \alpha^{k-1}(\alpha - \beta)$$

O podmienke $\alpha \neq \beta$

- Máme Woldovu reprezentáciu

$$x_t = \frac{\delta}{1-\alpha} + u_t + (\alpha - \beta)u_{t-1} + \alpha(\alpha - \beta)u_{t-2} + \dots$$

- Ak by bolo $\alpha = \beta$, tak máme

$$x_t = \frac{\delta}{1-\alpha} + u_t$$

a teda náš proces by bol iba biely šum posunutý o konštantu.

Invertovateľnosť

- Vyjadríme z (1) proces u_t, aby sme dostali proces x_t vyjadrený pomocou jeho starších hodnôt a aktuálnej hodnoty bieleho šumu

$$
\begin{aligned}
-\delta + (1-\alpha L)x_t &= (1-\beta L)u_t \\
-(1-\beta L)^{-1}\delta + (1-\beta L)^{-1}(1-\alpha L)x_t &= u_t
\end{aligned}
$$

- Vieme, že podmienkou pre existenciu $(1-\beta L)^{-1}$ je nerovnosť $|\beta| < 1$
- Táto podmienka invertovateľnosti sa dá zapísať aj tak, že koreň polynómu $1-\beta L$ musí byť mimo jednotkového kruhu

Zhrnutie

- Uvažujeme proces

$$(1 - \alpha L)x_t = \delta + (1 - \beta L)u_t$$

- Podmienka *stacionarity*
  - koreň polynómu $1 - \alpha L$ mimo jednotkového kruhu
  - *závisí teda iba od AR časti*
- Podmienka *invertovateľnosti*
  - koreň polynómu $1 - \beta L$ mimo jednotkového kruhu
  - *závisí teda iba od MA časti*

Príklad

Odvoďte (t. j. spravte všetky kroky odvodenia, nedosadzujte do získaných všeobecných výsledkov) Woldovu reprezentáciu ARMA(1,1) procesu

$$x_t = 2 + 0.5x_{t-1} + u_t - 0.7u_{t-1}$$

Model ARMA(p,q)

Definícia, stacionarita, invertovateľnosť

Definícia

- Nech u_t je biely šum, definujme ARMA(p,q) proces ako

  $$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \cdots - \beta_q u_{t-q},$$

  teda v operátorovom tvare

  $$(1 - \alpha_1 L - \dots \alpha_p L^p) x_t = \delta + (1 - \beta_1 L - \cdots - \beta_q L^q) u_t,$$

  resp. po označení polynómov

  $$\alpha(L) x_t = \delta + \beta(L) u_t$$

- Požadujeme, aby polynómy $\alpha(L), \beta(L)$ nemali spoločné korene (k tejto podmienke sa vrátime, ide o zovšeobecnenie podmienky $\alpha \neq \beta$ z ARMA(1,1) procesu)

Woldova reprezentácia a stacionarita

- Vyjadríme proces x_t:

$$x_t = \alpha(L)^{-1}\delta + \alpha(L)^{-1}\beta(L)u_t,$$

- Potrebujeme $\alpha(L)^{-1}\beta(L)$:

$$\begin{aligned}
\alpha(L)^{-1}\beta(L) &= \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots \\
\beta(L) &= \alpha(L)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) \\
\beta(L) &= (1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p) \\
&\quad \times(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots)
\end{aligned}$$

roznásobíme a porovnáme mocniny pri L^j

- Pre koeficienty ψ_j Woldovej reprezentácie dostaneme
  - diferenčnú rovnicu $\psi_k - \alpha_1 \psi_{k-1} - \dots \alpha_p \psi_{k-p} = 0$
  - začiatočné podmienky
- Kvôli požiadavke na konvergenciu sumy $\sum \psi_j^2$ musia byť korene charakteristického polynómu $\lambda^p - \alpha_1 \lambda^{p-1} - \dots - \alpha_{p-1}\lambda - \alpha_p$ v absolútnej hodnote menšie ako 1, teda korene polynómu $\alpha(L)$ musia byť v absolútnej hodnote väčšie ako 1

Invertovateľnosť

- Z predpisu pre ARMA proces

$$\alpha(L)x_t = \delta + \beta(L)u_t$$

potrebujeme vyjadriť u_t:

$$\beta(L)^{-1}\alpha(L)x_t = \beta(L)^{-1}\delta + u_t$$

- Analogicky ako pri odvodzovaní stacionarity dostaneme, že toto sa dá spraviť, ak korene polynómu $\beta(L)$ sú v absolútnej hodnote väčšie ako 1
- Geometricky: korene polynómu

$$\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \cdots - \beta_q L^q$$

musia byť mimo jednotkového kruhu

Príklad

Overíme stacionaritu a invertovateľnosť ARMA procesu

$$x_t = 2 + 0.5x_{t-1} - 0.15x_{t-2} + u_t - 0.35u_{t-1} + 0.6u_{t-2}$$

Riešenie: Proces prepíšeme ako

$$(1 - 0.5L + 0.15L^2)x_t = 2 + (1 - 0.35L + 0.6L^2)u_t$$

```
abs(polyroot(c(1, -0.5, 0.15)))
```

```
## [1] 2.581989 2.581989
```

```
abs(polyroot(c(1, -0.35, 0.6)))
```

```
## [1] 1.290994 1.290994
```

Momenty, ACF, PACF

Stredná hodnota

- Zoberme stacionárny ARMA proces

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \cdots - \beta_q u_{t-q}$$

- Spravíme strednú hodnotu z oboch strán.
- Zo stacionarity vyplýva, že v každom čase s je stredná hodnota rovnaká, označme ju μ:

$$\mu = \delta + \alpha_1 \mu + \ldots \alpha_p \mu \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \alpha_1 - \ldots \alpha_p}$$

Disperzia, autokovariancie

- Môžeme znovu predpokladať, že $\delta = 0$ (posun procesu o konštantu nezmení disperziu ani autokovariancie)
- Proces

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \cdots - \beta_q u_{t-q}$$

vynásobíme x_{t-s} (pre $s = 0, 1, 2, \ldots$) a spravíme strednú hodnotu:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \alpha_1 \gamma(s-1) + \cdots + \alpha_p \gamma(s-p) \\ &\quad + \mathbb{E}(u_t x_{t-s}) - \beta_1 \mathbb{E}(u_{t-1} x_{t-s}) - \cdots - \beta_q \mathbb{E}(u_{t-q} x_{t-s}) \end{aligned}$$

- Pre $s > q$ sú nulové všetky stredné hodnoty

$$\mathbb{E}(u_t x_{t-s}), \mathbb{E}(u_{t-1} x_{t-s}), \dots, \mathbb{E}(u_{t-q} x_{t-s})$$

- Vtedy platí diferenčná rovnica

$$\gamma(s) = \alpha_1 \gamma(s-1) + \cdots + \alpha_p \gamma(s-p) \tag{3}$$

- Táto diferenčná rovnica potrebuje p začiatočných podmienok
- Začiatočné podmienky sa počítajú zo sústavy rovníc
- Preto (3) budeme používať pre $s > \max(p, q)$
- Začiatočné podmienky dostaneme z rovníc získaných pre $s = 0, 1, \dots, \max(p, q)$

Autokorelačná funkcia

- Rovnicu (3) vydelíme disperziou $\gamma(0)$ a dostaneme diferenčnú rovnicu pre autokorelácie $\rho(s)$

$$\rho(s) = \alpha_1 \rho(s-1) + \cdots + \alpha_p \rho(s-p)$$

pre $s > \max(p, q)$

- Diferenčná rovnica pre ACF nezávisí od MA časti, od tej závisia len začiatočné podmienky

Príklad

Uvažujme proces

$$x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + u_t - \frac{1}{3}u_{t-1}$$

Odvodíme diferenčnú rovnicu pre

- autokovariancie
- autokorelácie

Cvičenie: Rovnakým postupom ukážte, že pre všeobecný stacionárny ARMA(1,1) proces $x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1}$ platí:

- Jeho disperzia je $\mathbb{D}(x_t) = \frac{1+\beta^2-2\alpha\beta}{1-\alpha^2}\sigma^2$,kde σ^2 je disperzia bieleho šumu u
- ACF je daná predpisom $\rho(k) = \alpha^{k-1}\rho(1)$, pričom $\rho(1) = \frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{1+\beta^2-2\alpha\beta}$

Parciálna autokorelačná funkcia

- Dosadzujeme korelácie do všeobecných vzťahov pre ACF
- UPOZORNENIE: **NEPLATÍ,** že $ACF(k) = 0$ pre $k > q$ a $PACF(k) = 0$ pre $k > p$ (v minulých rokoch častá chyba pri komentovaní ACF a PACF)
- Napríklad pre nasledovný ARMA(2, 2) proces:

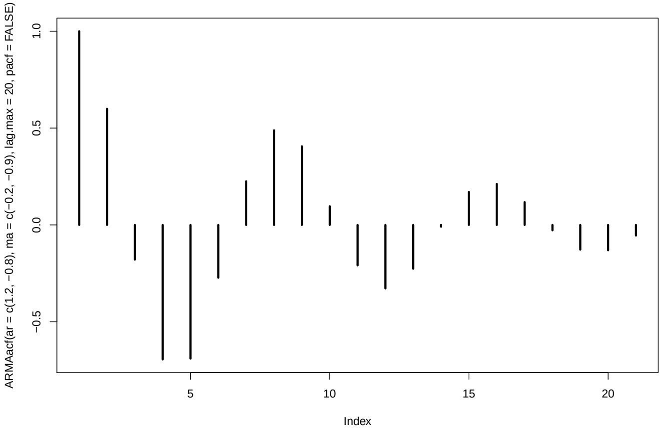
```
ARMAacf(ar = c(1.2, -0.8), ma = c(-0.2, -0.9),  lag.max = 4
```

```
##          0          1          2          3          4
##  1.0000000  0.5996344 -0.1791590 -0.6946984 -0.6903108
```

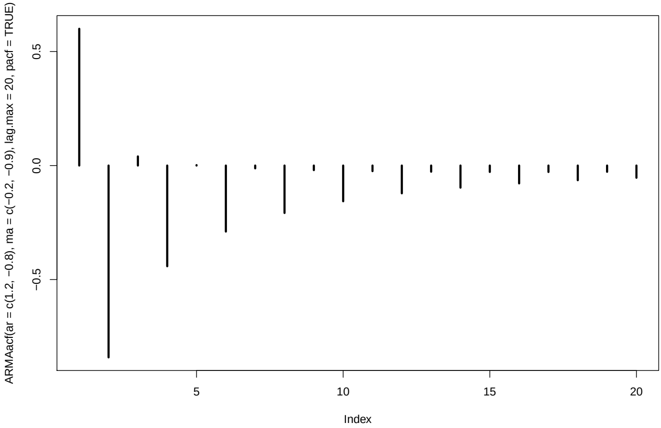
```
ARMAacf(ar = c(1.2, -0.8), ma = c(-0.2, -0.9), lag.max = 4,
```

```
## [1]  0.5996344 -0.8411742  0.0400243 -0.4416171
```

```
# ACF
plot(ARMAacf(ar = c(1.2, -0.8), ma = c(-0.2, -0.9),
             lag.max = 20, pacf = FALSE), type = "h", lwd =
```



```r
# PACF
plot(ARMAacf(ar = c(1.2, -0.8), ma = c(-0.2, -0.9),
             lag.max = 20, pacf = TRUE), type = "h", lwd =
```

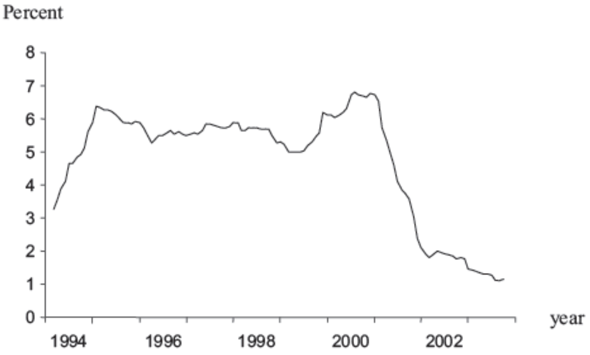


Príklad: Reálne dáta

Dáta

Prebraté z učebnice *Kirchgässner & Wolters*, example 2.15

- USA, marec 1994 - august 2003
- USR_t je trojmesačná úroková miera



a) New York three months money market rate,

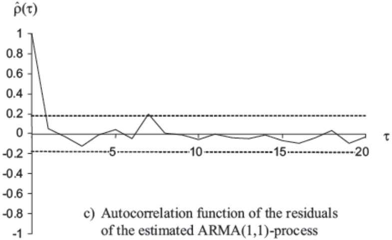
Odhadnutý model

The following ARMA(1,1) model has been estimated for this time series:

$$\Delta USR_t = \underset{(-0.73)}{-0.006} + \underset{(10.91)}{0.831}\,\Delta USR_{t-1} + \hat{u}_t - \underset{(-3.57)}{0.457}\,\hat{u}_{t-1},.$$

$$\bar{R}^2 = 0.351,\quad SE = 0.166,\quad Q(10) = 7.897\ (p = 0.639).$$

The AR(1) as well as the MA(1) terms are different from zero at the 0.1 percent significance level. The autocorrelogram of the estimated residuals, which is also given in *Figure 2.10*, as well as the Box-Ljung Q statistic, which is calculated for this model with 12 autocorrelation coefficients (i.e. with 10 degrees of freedom), do not provide any evidence of a higher order process.



c) Autocorrelation function of the residuals of the estimated ARMA(1,1)-process with confidence intervals

Otázky k modelu

- Ukážte, že získaný model je stacionárny a invertovateľný
- Vysvetlite tvrdenie: *"The autocorrelogram of the estimated residuals (...) not provide any evidence of a higher order process"*
- Píše sa: *"the Box-Ljung Q statistic, which is calculated for this model with 12 autocorrelation coefficients (i.e. with 10 degrees of freedom)..."*
  - sformulujte hypotézu, ktorá sa testuje
  - zdôvodnite počet stupňov voľnosti
  - aký je záver testu?

Spoločné korene AR a MA časti

Pripomeňme si definíciu ARMA(p,q) procesu:

- Nech u_t je biely šum, definujme ARMA(p,q) proces ako

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \cdots - \beta_q u_{t-q},$$

teda v operátorovom tvare

$$(1 - \alpha_1 L - \ldots \alpha_p L^p) x_t = \delta + (1 - \beta_1 L - \cdots - \beta_q L^q) u_t,$$

resp. po označení polynómov

$$\alpha(L) x_t = \delta + \beta(L) u_t$$

- Požadujeme, aby polynómy $\alpha(L), \beta(L)$ nemali spoločné korene
- Teraz sa pozrieme na túto podmienku na korene

- Majme "ARMA(2,2)" proces

$$(1-\alpha_1 L - \alpha L^2)x_t = \delta + (1-\beta_1 L - \beta_2 L^2)u_t$$

pričom polynómy majú tvar

$1-\alpha_1 L-\alpha L^2 = (1-\gamma L)(1-\gamma_1 L), 1-\beta_1 L - \beta L^2 = (1-\gamma L)(1-\gamma_2 L),$

teda majú spoločný koreň $1/\gamma$

- Potom sa proces dá písať nasledovne:

$$\begin{aligned} (1-\gamma L)(1-\gamma_1 L)x_t &= \delta + (1-\gamma L)(1-\gamma_2 L)u_t \\ (1-\gamma_1 L)x_t &= (1-\gamma L)^{-1}\delta + (1-\gamma_2 L)u_t \end{aligned}$$

- Ide teda v skutočnosti nie o ARMA(2,2), ale o ARMA(1,1) proces

Blízke korene AR a MA časti pri práci s dátami

- Ak dostaneme blízky koreň AR a MA časti, treba namiesto ARMA(p,q) modelu skúsiť ARMA(p-1, q-1)
- **Príklad:**
  - Vygenerujeme dáta z ARMA(1,1) procesu a budeme pre ne odhadovať ARMA(2,2) model
  - Čo očakávame: malo by nám výjsť, že model treba zjednodušiť

```
set.seed(2020)
x <- arima.sim(model = list(ar = c(0.8), ma = c(0.5)),
               n = 100, sd = 1)
```

```r
library(astsa)
model <- sarima(x, 2, 0, 2, details = FALSE)
model$fit$coef
```

```
##       ar1       ar2       ma1       ma2     xmean
## 0.3521183 0.2290491 1.0511979 0.2299059 0.6243467
```

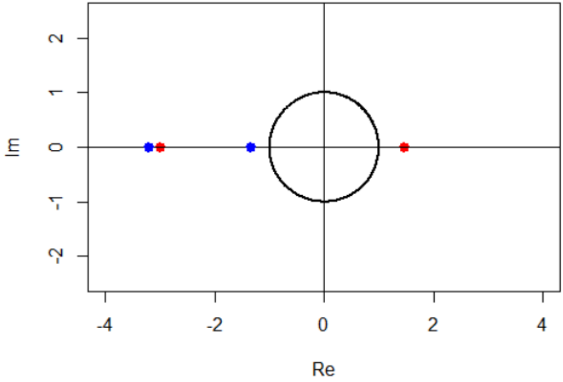
```r
ar.korene <- polyroot(c(1, -model$fit$coef[1:2]))
ma.korene <- polyroot(c(1, model$fit$coef[3:4]))
ar.korene
```

```
## [1]  1.457713-0i -2.995018+0i
```

```r
ma.korene
```

```
## [1] -1.349736-0i -3.222561+0i
```

- Červené AR korene a modré MA korene:



- Blízky AR a MA koreň → mali by sme skúsiť namiesto ARMA(2,2) odhadnúť ARMA(1,1) *(čo sedí, tak boli tie dáta generované)*