Jednotkový koreň (unit root), diferencovanie časového radu, ADF test na testovanie jednotkového koreňa

Beáta Stehlíková

2-PMS-102 Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Obsah

- Čo je jednotkový koreň, prečo neumožňuje použiť ARMA metodológiu a ako ho odstrániť
- Ako z dát zistiť, či má proces jednotkový koreň alebo nie $\rightarrow$ testy jednotkového koreňa (unit root testy)
- Ako spraviť tento test v R-ku

Časť 1: Čo je jednotkový koreň, prečo neumožňuje použiť ARMA metodológiu a ako ho odstrániť

Príklad 1

Majme proces

$$y_t = y_{t-1} + u_t$$

resp. po zápise pomocou operátora posunu

$$(1 - L)y_t = u_t$$

- je to nestacionárny AR(1) proces
- polynóm $1 - L$ má koreň $L = 1$, t. j. **jednotkový koreň**
- keď hovoríme o jednotkovom koreni, ide nám koreň $L = 1$ autoregresného polynómu - spôsobuje nestacionaritu
- pre diferencie tohto procesu $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ platí $\Delta y_t = u_t$
- teda diferencie Δy_t sú stacionárne

Príklad 2

- Majme nestacionárny proces s jednotkovým koreňom

$$(1-\frac{1}{2}L)(1-L)y_t = 1 + (1-\frac{1}{3}L)u_t$$

- Potom pre diferencie tohto procesu

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1-L)y_t$$

  platí $(1-\frac{1}{2}L)\Delta y_t = 1 + (1-\frac{1}{3}L)u_t$
- Teda diferencie Δy_t sú stacionárne

Príklad 3

- Majme nestacionárny proces s dvojnásobným jednotkovým koreňom

$$(1 - \frac{1}{2}L)(1 - L)^2 y_t = 1 + (1 - \frac{1}{3}L)u_t$$

- Potom pre druhé diferencie tohto procesu

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = (1 - L)(1 - L)y_t = (1 - L)^2 y_t$$

  platí $(1 - \frac{1}{2}L)\Delta^2 y_t = 1 + (1 - \frac{1}{3}L)u_t$
- Teda druhé diferencie Δy_t sú stacionárne

Vo všeobecnosti

- Majme proces s jednotkovým koreňom násobnosti k , pričom ostatné korene sú mimo jednotkového kruhu
- Potom k-te diferencie procesu sú stacionárne

ARIMA modely, terminológia

- Ak treba proces k krát diferencovať, aby sme z neho dostali stacionárny proces, nazýa sa integrovaný proces rádu k a označuje sa $I(k)$

Canarella, G., Gupta, R., Miller, S. M., & Pollard, S. K. (2019). **Unemployment rate hysteresis and the great recession: exploring the metropolitan evidence.** Empirical Economics, 56(1), 61-79.

Abstract Standard unit-root tests of the hysteresis hypothesis specify a unit root under the null against the stationary alternative of the natural-rate hypothesis, making the two theories of unemployment mutually exclusive over the sample period. In this paper, we allow switches between hysteresis and natural-rate theory using the Kejriwal, Perron, and Zhou test. The null hypothesis of the test is that the unemployment rate is I(1) throughout the sample, and the alternative hypothesis is that the unemployment rate changes persistence [i.e., switches between I(0) and I(1) regimes]. We apply the test to the unemployment rate of 20 metropolitan statistical areas (MSAs) and the USA. We use monthly observations over the period 1990:1–2016:12 and apply the test to seasonally unadjusted and seasonally adjusted data.

Časť 2: Ako testovať prítomnosť jednotkového koreňa v dátach - simulácie

Cieľ

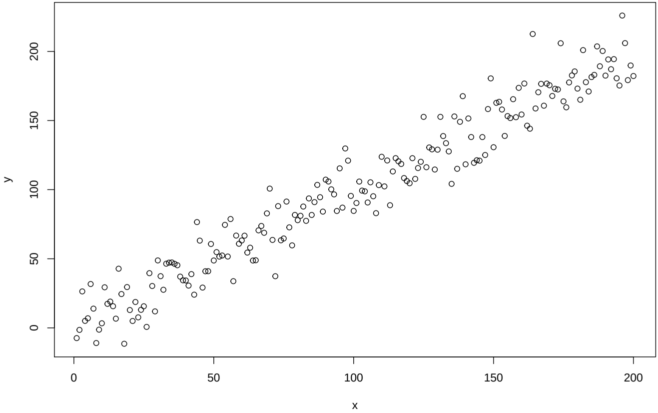
- Uvažujme najskôr AR(1) proces $x_t = \delta + \rho x_{t-1} + u_t$
- Chceme:
  - testovať hypotézu o jednotkovom koreni (vtedy je proces nestacionárny), teda $H_0 : \rho = 1$
  - zistiť, či sa dá zamietnuť v prospech stacionarity, teda $H_0 : \rho < 1$
- Skúsme použiť testovanie hypotéz o koeficientoch regresného modelu známe z ekonometrie.
  - spravíme simulácie
  - uvidíme, že tento postup bude treba upraviť

Simulácia 1: klasická regresia a t-štatistika

Štandardný postup - vieme spraviť:

- Majme vektor `x <- 1:200`
- Vygenerujeme `y <- x + rnorm(200) * sigma`
- Odhadneme model $y = c + \rho x + \varepsilon$
- Zaznamenávame:
  - odhad parametra ρ
  - hodnotu t-štatistiky zodpovedajúcej hypotéze $H_0 : \rho = 1$ (ktorá platí)
- Zopakujeme 10^5 krát a vykreslíme histogram

- Ukážka dát:



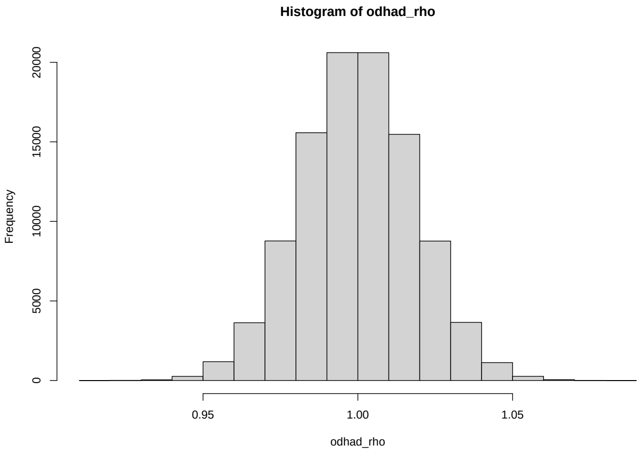
- Výstup z regresie:

```
summary(lm(y ~ x))$coefficients
```

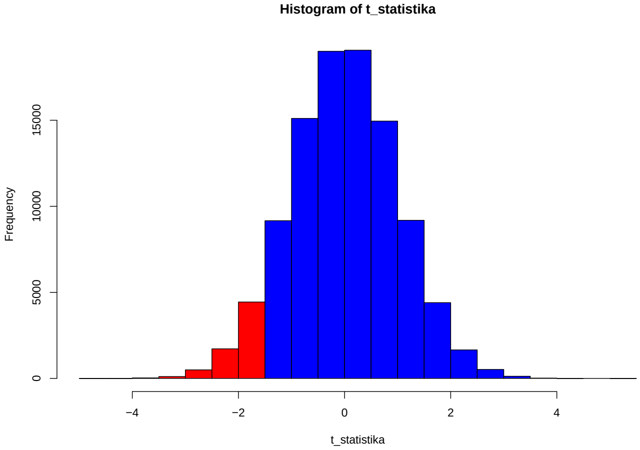
```
##                Estimate Std. Error    t value      Pr(>|t
## (Intercept) 1.0330020 2.01108356  0.5136544  6.080663e-0
## x           0.9884422 0.01735144 56.9660036 9.490913e-12
```

- Odhadnutý koeficient ρ je 0.98844.
- T-štatistika k hypotéze $\rho = 1$ sa počíta ako $\frac{0.98844-1}{0.01735}$

- Výsledok zo simulácií: odhad parametra ρ (normálne rozdelenie)



- Výsledok zo simulácií: t-štatistika (Studentovo rozdelenie, vyznačený 5% kvantil tohto rozdelenia)

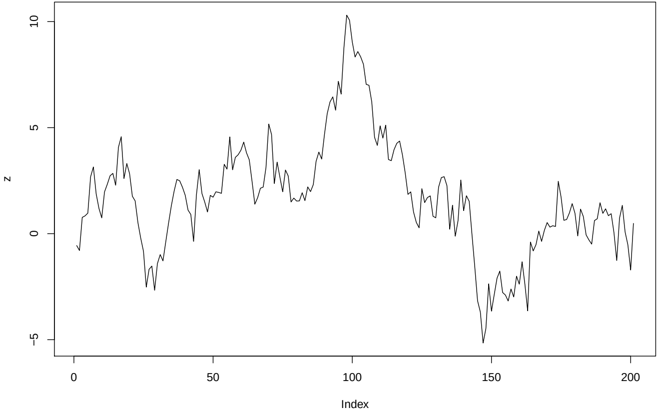


Simulácia 2: jednotkový koreň a t-štatistika

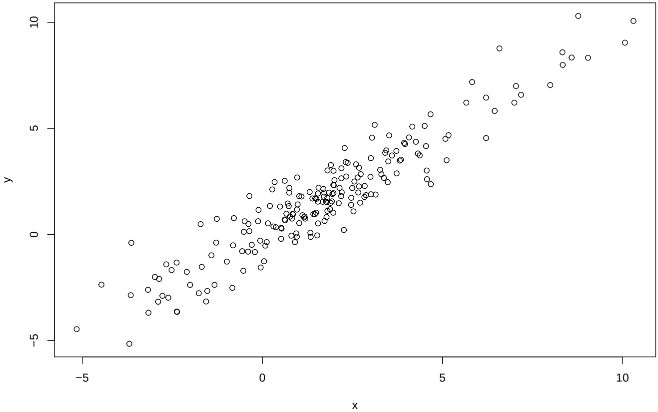
Druhá simulácia:

- Majme vektor `z` vygenerovaný ako $z_t = z_{t-1} + \varepsilon_t$
- Zoberieme `x <- z[1:200]`, `y <- z[2:201]`, teda $x_t = z_{t-1}$, $y_t = z_t$
- Odhadneme model $y = c + \rho x + \varepsilon$, teda $z_t = c + \rho z_{t-1} + \varepsilon_t$
- Zaznamenávame:
  - odhad parametra ρ
  - hodnotu t-štatistiky zodpovedajúcej hypotéze $H_0 : \rho = 1$ (ktorá platí)
- Zopakujeme 10^5 krát a vykreslíme histogram

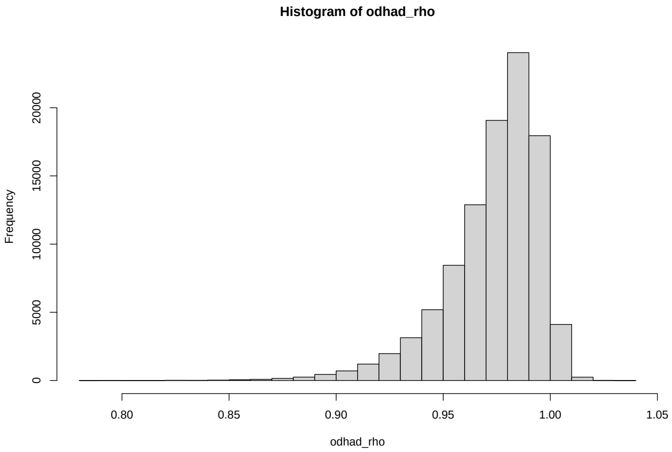
- Ukážka vygenerovaných dát: proces z_t do regresie $z_t = c + \rho z_{t-1} + \varepsilon_t$)



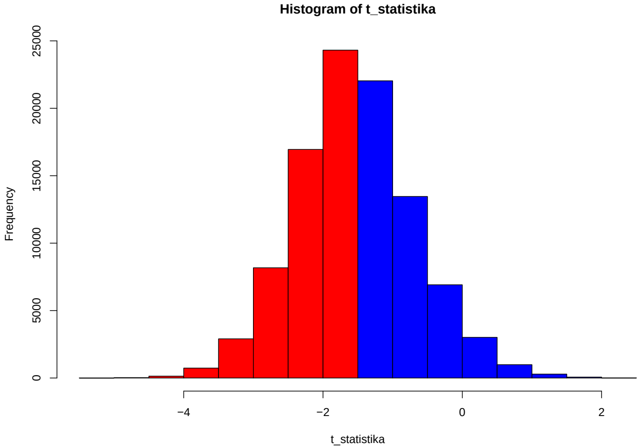
- Ukážka vygenerovaných dát: dáta do regresie



- Výsledok zo simulácií: odhad parametra ρ (nemá normálne rozdelenie)



- Výsledok zo simulácií: "t-štatistika" (nemá Studentovo rozdelenie, vyznačený 5% kvantil tohto rozdelenia)



Časť 3: Ako testovať prítomnosť jednotkového koreňa v dátach - ADF test

Základná myšlienka:

- Ponecháme výpočet testovacej štatistiky
- Ale budeme používať **iné kritické hodnoty**
- Približne aké by mali byť kritické hodnoty (podľa našich simulácií):

```
quantile(t_statistika, 0.05)
```

```
##        5%
## -2.888873
```

```
quantile(t_statistika, 0.01)
```

```
##        1%
## -3.471761
```

Testovanie jednotkového koreňa pre AR(1)

- AR(1) proces
$$y_t = \rho y_{t-1},$$
jednotkový koreň znamená, že $\rho = 1$
- Ekvivalentne:
$$\Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + u_t$$
a zaujíma nás **t-štatistika zo signifikancie koeficienta pri** y_{t-1}, ale **s inou kritickou hodnotou**
- Bolo zistené, že tá kritická hodnota
  - závisí od počtu dát
  - zmení sa, ak proces obsahuje konštantu a/alebo lineárny trend
- Vo všeobecnosti: $\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1)y_{t-1} + u_t$

Testovanie jednotkového koreňa pre AR(p)

- AR(p) proces

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \alpha_p \dots y_{t-p} + u_t$$

- Prepíšeme pomocou posunu

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p) y_t = u_t$$

- To, že $L = 1$ je koreňom, znamená:

$$1 - \alpha_1 1 - \alpha_2 1^2 - \dots - \alpha_p 1^p = 0$$

- Jednotkový koreň teda predstavuje podmienku

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p = 1$$

- Máme teda AR(p) proces
  $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \alpha_p \dots y_{t-p} + u_t$
- Upravíme ho do tvaru

$$y_t = \rho y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-2} + \theta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t,$$

  kde $\rho = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j, \theta_i = -\sum_{j=i+1}^{p} \alpha_j$ pre $i = 1, \dots, p-1$
- Teda na pravej strane je:
  - predchádzajúca hodnota procesu y_{t-1} s koeficientom $\alpha_1 + \dots + \alpha_p$
  - diferencie v starších časoch $\Delta y_{t-1}, \Delta y_{t-2}, \dots, \Delta y_{t-p+1}$

- Napríklad pre AR(3):

$$
\begin{aligned}
y_t &= \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \alpha_3 y_{t-3} + u_t \\
&= \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + (-\alpha_3)(y_{t-2} - y_{t-3}) + \alpha_3 y_{t-2} + u_t \\
&= \alpha_1 y_{t-1} + (\alpha_2 + \alpha_3) y_{t-2} + (-\alpha_3)(y_{t-2} - y_{t-3}) + u_t \\
&= \alpha_1 y_{t-1} + (-\alpha_2 - \alpha_3)(y_{t-1} - y_{t-2}) + (-\alpha_3)(y_{t-2} - y_{t-3}) \\
&\quad + (\alpha_2 + \alpha_3) y_{t-1} + u_t \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) y_{t-1} + (-\alpha_2 - \alpha_3)(y_{t-1} - y_{t-2}) \\
&\quad + (-\alpha_3)(y_{t-2} - y_{t-3}) + u_t \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) y_{t-1} + (-\alpha_2 - \alpha_3)\Delta y_{t-1} + (-\alpha_3)\Delta y_{t-2} \\
&\quad + u_t
\end{aligned}
$$

- AR(p) proces v tvare

$$y_t = \rho y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-2} + \theta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t,$$

sa dá ekvivalentne zapísať ako

$$\Delta y_t = (\rho - 1) y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-2} + \theta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t$$

a zaujíma nás potom t-štatistika z koeficienta pri y_{t-1}.
- Vo všeobecnosti: proces môže obsahovať konštantu a/alebo lineárny trend

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1) y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-2} + \theta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t$$

Augmented Dickey-Fuller test (ADF)

- Wayne A. Fuller (1976), David A. Dickey, Wayne A. Fuller (1979, 1981)
- Odhadujeme model

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1) y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \theta_k \Delta y_{t-k} + u_t,$$

  pričom musíme
  - rozhodnúť, či zahrnúť konštantu α a lineárny trend βt (podľa toho, či ich obsahuje proces y)
  - určiť k (podľa informačných kritérií)
- Zaujíma nás potom t-štatistika zo sigifikancie koeficienta pri y_{t-1}, ale so správnymi kritickými hodnotami

ADF test - kritické hodnoty

- James G. MacKinnon (1991) - dostupné ako súčasť doplnenej verzie z roku 2010: http://ideas.repec.org/p/qed/wpaper/1227.html
- Simulačne získané hodnoty:

Table 1. Response Surface Estimates of Critical Values

N	Variant	Level	Obs.	β_∞	(s.e.)	β_1	β_2
1	no constant	1%	600	−2.5658	(0.0023)	−1.960	−10.04
		5%	600	−1.9393	(0.0008)	−0.398	
		10%	560	−1.6156	(0.0007)	−0.181	
1	no trend	1%	600	−3.4336	(0.0024)	−5.999	−29.25
		5%	600	−2.8621	(0.0011)	−2.738	−8.36
		10%	600	−2.5671	(0.0009)	−1.438	−4.48
1	with trend	1%	600	−3.9638	(0.0019)	−8.353	−47.44
		5%	600	−3.4126	(0.0012)	−4.039	−17.83
		10%	600	−3.1279	(0.0009)	−2.418	−7.58

ADF test - kritické hodnoty

- Ak v regresii použijeme T dát, kritická hodnota je $\beta_\infty + \beta_1/T + \beta_2/T^2$
- V našom prípade zo simulácií: konštanta bez trendu, $T = 200$:

N	Variant	Level	Obs.	β_∞	(s.e.)	β_1	β_2
1	no trend	1%	600	$\boxed{-3.4336}$	(0.0024)	$\boxed{-5.999}$	$\boxed{-29.25}$
		5%	600	$\boxed{-2.8621}$	(0.0011)	$\boxed{-2.738}$	$\boxed{-8.36}$
		10%	600	-2.5671	(0.0009)	-1.438	-4.48

- Dostaneme:
  - pre 1 percento: $-3.4336 - 5.999/100 - 29.25/200^2 = -3.451$
  - pre 5 percent: $-2.8621 - 2.738/200 - 8.36/200^2 = -2.879$
- Porovnajme s t-rozdelením (úplne iné) a s kvantilmi zo simulácií (ok)

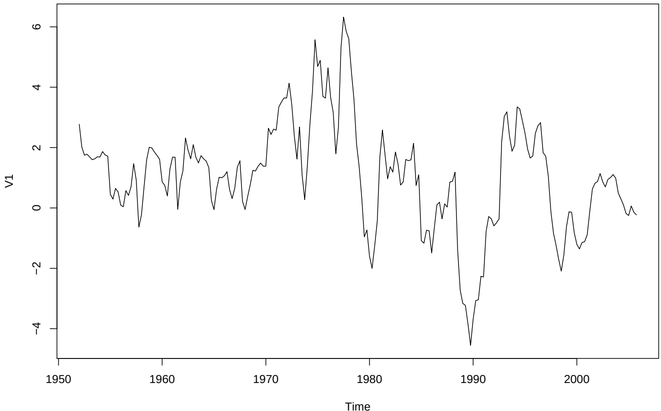
Časť 4: ADF test v R-ku

Funkcia ur.df

- Balík `urca` (**ur** = unit root, **ca** = cointegration)
- Funkcia `ur.df` (**ur** = unit root, **df** = Dickey-Fuller) s parametrami:
  - `type`: možnosti sú `drift` (konštanta bez lineárneho trendu) `trend` (konštanta aj lineárny trend) `none` (nič)
  - `lags`: maximálny počet lagov
  - `selectlags`: kritérium, podľa ktorého sa vyberá počet lagov (informačné kritériá `AIC`, `BIC`)

Príklad použitia

- Dáta `spread` z predchádzajúcich prednášok (rozdiel dlhodobej a krátkodobej úrokovej miery)



- Spravíme:

```
library(urca)
ur.df(spread,              # data
      type = "drift",      # konstanta bez trendu
      lags = 8,            # 8 lagov = 2 roky
      selectlags = "BIC" # Bayesovo kriterium
      )
```

```
##
## ##############################################################
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root / Cointegration
## ##############################################################
##
## The value of the test statistic is: -3.9112 7.6595
```

- Vypíšeme `summary`, aby sme dostali aj kritické hodnoty

```r
summary(ur.df(spread, type = "drift",
              lags = 8, selectlags = "BIC"))
```

- Odhadnutá regresia a testovacia štatistika (vo všeobecnosti je konštantný člen označený ako `Intercept` a lineárny trend `tt`):

y_{t-1} Δy_{t-1}

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.10035    0.05592   1.794 0.074240 .
z.lag.1     -0.10720    0.02741  -3.911 0.000125 ***
z.diff.lag   0.29007    0.06706   4.326 2.38e-05 ***
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.7006 on 204 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1216,    Adjusted R-squared:  0.113
F-statistic: 14.12 on 2 and 204 DF,  p-value: 1.806e-06


Value of test-statistic is: -3.9112 7.6595
```

- Testovacia štatistika a kritické hodnoty

prvá štatistika

```
Value of test-statistic is: -3.9112 7.6595

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88 -2.57
phi1  6.52  4.63  3.81
```

prvý riadok kritických hodnôt

- Kritérium: Hypotéza o jednotkovom koreni sa zamieta, ak je štatistika menšia ako kritická hodnota
- V našom prípade
  - hypotézu o jednotkovom koreni zamietame
  - dáta teda netreba diferencovať

Diferencovanie dát pri hľadaní ARIMA modelu

ARMA modely sú modelmi pre stacionárne dáta ⇒

- čo sme už vedeli: ak majú trend, treba ich zdiferencovať
- nové: **ak majú jednotkový koreň, treba ich zdiferencovať**

Postup:

- ak treba, zdiferencujeme najskôr dáta kvôli odstráneniu trendu
- potom otestujeme prítomnosť jednotkového koreňa
- ak v dátach je jednotkový koreň, zdiferencujeme ich a znovu otestujeme na jednotkový koreň (a diferencujeme ďalej, kým nedostaneme dáta bez jednotkového koreňa)
- pre diferencie, v ktorých už nie je trend ani jednotkový koreň, hľadáme ARMA model

Ak sa dáta diferencujú, tak väčšinou len raz, výnimočne dvakrát.

Cvičenie: Interpretácia regresie z výstupu

Zadanie

- Napíšte regresiu, ktorá sa odhadla v tomto ACF teste.
- Aká hypotéza o parametroch regresie sa testuje?
- Odvoďte AR model pre dáta, ktorý regresia po úprave definuje.
- Odvoďte, že testovaná hypotéza zodpovedá jednotkovému koreňu

```
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-2.62437 -0.35488 -0.00071  0.35322  2.54618 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  0.10051    0.05552   1.810 0.071692 .  
z.lag.1     -0.10514    0.02800  -3.755 0.000225 ***
z.diff.lag1  0.29195    0.06743   4.330 2.32e-05 ***
z.diff.lag2 -0.01416    0.06898  -0.205 0.837603    
```

Riešenie

```
                    Δz_t        z_{t-1}          Δz_{t-1},Δz_{t-2},Δz_{t-3}, ... atď.
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.62437 -0.35488 -0.00071  0.35322  2.54618

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   0.10051    0.05552   1.810 0.071692 .
z_{t-1}   z.lag.1      -0.10514    0.02800  -3.755 0.000225 ***
Δz_{t-1}  z.diff.lag1   0.29195    0.06743   4.330 2.32e-05 ***
Δz_{t-2}  z.diff.lag2  -0.01416    0.06898  -0.205 0.837603
```

Pre dáta z sa odhadla regresia

$$\Delta z_t = \alpha + c_1 z_{t-1} + c_2 \Delta z_{t-1} + c_3 \Delta z_{t-2} + \varepsilon_t$$

a testujeme, že koeficient pri z_{t-1} je nulový, teda že $c_1 = 0$

- Upravujeme regresiu na tvar AR procesu pre z:

$$\begin{aligned}
\Delta z_t &= \alpha + c_1 z_{t-1} + c_2 \Delta z_{t-1} + c_3 \Delta z_{t-2} + \varepsilon_t \\
z_t - z_{t-1} &= \alpha + c_1 z_{t-1} + c_2 (z_{t-1} - z_{t-2}) + c_3 (z_{t-2} - z_{t-3}) + \varepsilon_t \\
z_t &= \alpha + (1 + c_1 + c_2) z_{t-1} + (-c_2 + c_3) z_{t-2} + (-c_3) z_{t-3} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

- Jednotkový koreň v AR modeli je práve vtedy, keď je súčet autoregresných koeficientov rovný 1, t.j.

$$\begin{aligned}
(1 + c_1 + c_2) + (-c_2 + c_3) + (-c_3) &= 1 \\
1 + c_1 &= 1 \\
c_1 &= 0
\end{aligned}$$

Zadanie II. na samostatnú prácu

Zopakujte pre nasledujúci výstup:

```
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-2.9585 -0.4996  0.2749  0.7940  3.1786

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1     -0.17906    0.09112  -1.965 0.052426 .
z.diff.lag1 -0.59969    0.11658  -5.144 1.51e-06 ***
z.diff.lag2 -0.40873    0.11889  -3.438 0.000882 ***
z.diff.lag3 -0.30658    0.10005  -3.064 0.002863 **
```