# Autoregresné modely: AR(p) model, stacionarita a Woldova reprezentácia

Beáta Stehlíková

Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

# Motivácia - prečo nestačí AR(1)

# Prečo nestačí AR(1) - niekoľko pohľadov

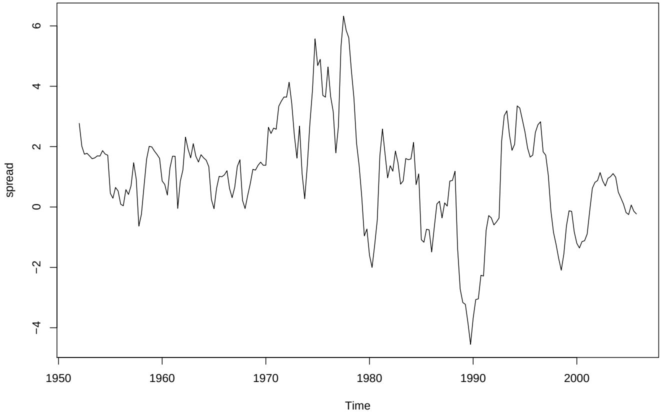
- Celkom prirodzene môžeme očakávať, že na dobré popísanie vývoja $x_t$ nám nebude stačiť $x_{t-1}$ , ale budeme potrebovať aj $x_{t-2}$ (prípadne aj $x_{t-3}$ a $x_{t-4}$ a pod.)
- AR(1) proces má dosť obmedzené možnosti pri zachytení priebehu ACF - napríklad neumožňuje modelovať periodický charakter
- Niekedy to nemusí byť dopredu zrejmé z dát, ani z odhadnutej ACF, ale AR(1) nebude vyhovovať kvôli rezíduám - *toto uvidíme na príklade*

# Príklad: Úrokové miery

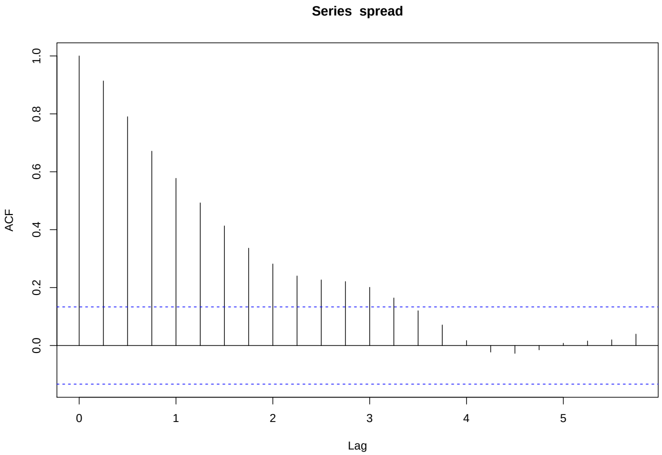
- Štvrťročné dáta, 1952Q1 - 2005Q4
- Premenné:
  - krátkodobá úroková miera (3 mesiace)
  - dlhodobá úroková miera (20 rokov)
- Budeme modelovať *spread*, teda rozdiel dlhodobej a krátkodobej úrokovej miery

Mills, Markellos: *The Econometric Modelling of Financial Time Series.* Cambridge University Press, 2008

# Príklad: Úrokové miery - priebeh dát



# Príklad: Úrokové miery - odhadnutá ACF




Podobá sa na AR(1) proces s kladným parametrom $\alpha$.

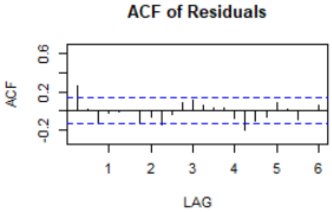
# Príklad: Úrokové miery - parametre AR(1) modelu

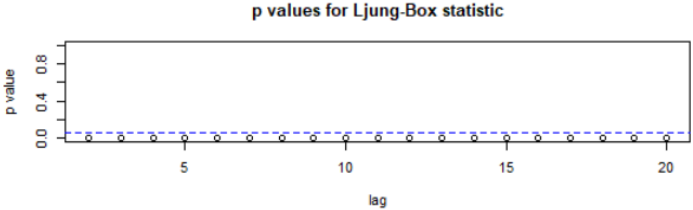
Parameter $\alpha$ AR(1) modelu (vo výstupe označený ako `ar1`) je medzi -1 a 1, teda získaný proces je stacionárny - toto je ok.

```
##        Estimate     SE t.value p.value
## ar1      0.9156 0.0266 34.4589  0.0000
## xmean    1.0473 0.5491  1.9075  0.0578
```

# Príklad: Úrokové miery - rezíduá AR(1) modelu

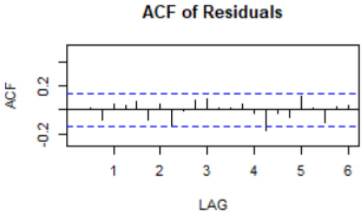
Rezíduá sa nesprávajú ako biely šum, model je nevyhovujúci.

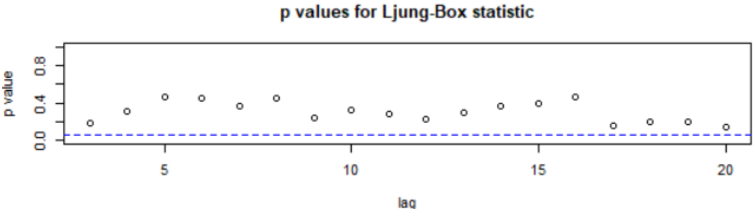


# Príklad: Úrokové miery - rezíduá AR(2) modelu

Rezíduá AR(2) modelu sú v poriadku:



# Príklad: Úrokové miery - parametre AR(2) modelu

- Potrebujeme ešte odvodiť podmienku stacionarity AR(2), teda ako zistiť, že toto je stacionárny model:

```
##        Estimate     SE t.value p.value
## ar1      1.1809 0.0650 18.1566  0.0000
## ar2     -0.2886 0.0651 -4.4321  0.0000
## xmean    1.0449 0.4212  2.4807  0.0139
```

- Potom pre $\alpha_1 =$ ar1, $\alpha_2 =$ ar2, $\mu = \mathbb{E}(x_s) =$ xmean platí:

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + u_t \quad / \mathbb{E}().$$

$$\mu = \delta + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu \Rightarrow \delta = \mu(1 - \alpha_1 - \alpha_2)$$

- Model je $x_t = 0.1125 + 1.1809 x_{t-1} - 0.2886 x_{t-2} + u_t$

# Proces vyššieho rádu, ukážka stacionárneho a nestacionárneho procesu, operátor posunu

# AR(2) a všeobecný AR(p) proces

- **AR(2) proces** modeluje $x_t$ pomocou $x_{t-1}$ a $x_{t-2}$:

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + u_t$$

- Analogicky, **AR(p) proces** modeluje $x_t$ pomocou $p$ predchádzajúcich hodnôt $x_{t-1}, \ldots, x_{t-p}$:

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + u_t$$

- Odhadovanie AR(p) modelu pre k-te diferencie v R-ku:

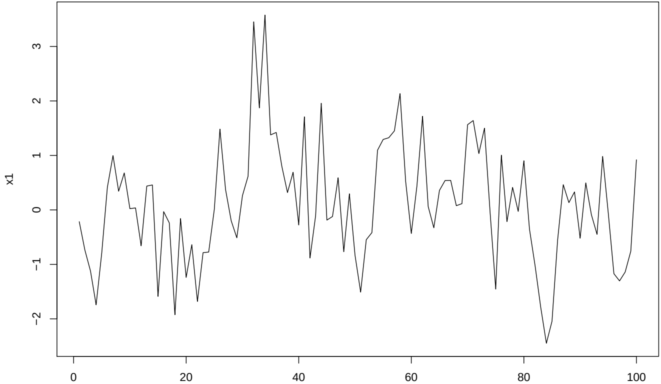
```
sarima(data, p, k, 0)
```

- Budeme sa teraz zaoberať AR(2) modelom (podstatný rozdiel oproti AR(1)), potom AR(p) už bude analogický AR(2).

# Simulácie AR(2) procesov

**Príklad 1.** Proces $x_t = 0.5x_{t-1} + 0.2x_{t-2} + u_t$

```
x1 <- arima.sim(model = list(ar = c(0.5, 0.2)), n = 100)
```



**Príklad 2.** Proces $x_t = 0.5x_{t-1} + 0.6x_{t-2} + u_t$ spôsobí chybu - nie je stacionárny

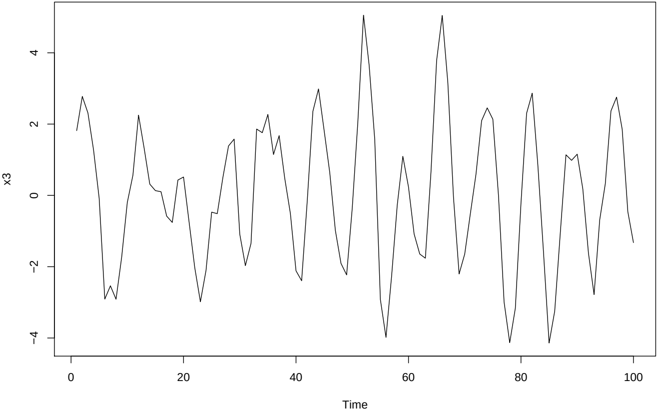
```
> x2 <- arima.sim(model = list(ar = c(0.5, 0.6)), n = 100, sd = 1)
Error in arima.sim(model = list(ar = c(0.5, 0.6)), n = 100, sd = 1) :
  'ar' part of model is not stationary
```

- NEPLATÍ teda "zovšeobecnenie" z AR(1) prípadu, že ak je $\alpha_1, \alpha_2$ v absolútnej hodnote menej ako 1, tak je proces $x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + u_t$ stacionárny.

**Príklad 3.** Proces $x_t = 1.2x_{t-1} - 0.8x_{t-2} + u_t$ chybu nespôsobí - je stacionárny

- NEPLATÍ teda ani také "zovšeobecnenie", že ak je niektorá z hodnôt $\alpha_1, \alpha_2$ v absolútnej hodnote väčšia ako 1, tak je proces $x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + u_t$ nestacionárny.

```
x3 <- arima.sim(model = list(ar = c(1.2, -0.8)), n = 100)
plot(x3)
```



# Stratégia pre odvodenie podmienky stacionarity

- **Proces prepíšeme inak, aby sa s ním lepšie pracovalo** $\rightarrow$ definujeme tzv. **operátor posunu**.
- Operátor posunu (lag operator) $L$ - vráti hodnotu procesu o jedno pozorovanie dozadu:

$$Lx_t = x_{t-1}$$

- **Dôležité,** budeme ho používať v mnohých odvodeniach

# Operátor posunu

- Zopakovanie definície: $Lx_t = x_{t-1}$
- Niektoré vlastnosti:
  - dajú sa robiť mocniny: $L^2 x_t = L(Lx_t) = x_{t-2}$, $L^3 x_t = x_{t-3}$ a pod.
  - počítanie s mocninami: $L^2(L^3) = L^5$
  - $L^0 = 1$ je identita
  - násobenie: $(1 - 0.5L)(1 + 0.2L) = 1 - 0.3L - 0.1L^2$
  - konštanta je vlastne konštatný proces, posunom sa nezmení: $(1 - 0.2L + 0.3L^2)c = c - 0.2c + 0.3c = 1.1c$
- **Príklad.** AR(3) proces

$$x_t = 10 + 0.3x_{t-1} + 0.2x_{t-2} - 0.1x_{t-3} + u_t$$

sa dá zapísať ako

$$x_t = 10 + 0.3Lx_t + 0.2L^2 x_t - 0.1L^3 x_t + u_t$$

$$(1 - 0.3L - 0.2L^2 + 0.1L^3)x_t = 10 + u_t$$

# Podmienka stacionarity pre AR(2)

# Podmienka stacionarity: odvodenie

- Máme proces:

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + u_t$$

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2) x_t = \delta + u_t$$

- Potrebujeme ho **zapísať v tvare Woldovej reprezentácie**.
- Chceli by sme teda spraviť:

$$x_t = (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)^{-1} \delta + (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)^{-1} u_t$$

- Treba teda zistiť, kedy existuje inverzný operátor $(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)^{-1}$ a čomu sa rovná

- Použijeme **metódu neurčitých koeficientov**:

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)^{-1} = \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots$$

- Z toho:

$$1 = (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots)$$

- Porovnáme koeficienty pri $L^j$ na oboch stranách:

$$\psi_0 = 1, \psi_1 = \alpha_1$$

$$\psi_k - \alpha_1 \psi_{k-1} - \alpha_2 \psi_{k-2} = 0$$

- Woldova reprezentácia obsahuje podmienku $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^2 < \infty$ (zabezpečí existenciu potrebného inverzného operátora)

- Rekurentne počítané $\psi_k$ pre dve dvojice parametrov $\alpha_1, \alpha_2$ (zo stacionárneho a nestacionárneho procesu):

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | alpha_1 | | 0,5 | 1,2 |
| 2 | alpha_2 | | 0,6 | -0,8 |
| 3 | | | | |
| 4 | phi_0 = 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | phi_1 = alpha_1 | 2 | 0,5 | 1,2 |
| 6 | phi_k = alpha_1 phi_{k-1} + alpha_2 phi_{k-2} | 3 | 0,85 | 0,64 |
| 7 | | 4 | 0,725 | -0,192 |
| 8 | | 5 | 0,8725 | -0,7424 |
| 9 | | 6 | | =D$1*D8+D$2*D7 |
| 10 | | 7 | 0,959125 | -0,290816 |
| 11 | | 8 | 1,0023125 | 0,2408448 |
| 12 | | 9 | 1,07663125 | 0,52166656 |
| 13 | | 10 | 1,139703125 | 0,433324032 |
| 203 | | 200 | 148555,43 | -1,71356E-10 |
| 204 | | 201 | 158054,2172 | -2,71857E-10 |
| 205 | | 202 | 168160,3666 | -1,89143E-10 |
| 206 | | 203 | 178912,7136 | -9,48602E-12 |
| 207 | | 204 | 190352,5768 | 1,39931E-10 |

- Riešenie rovnice $\psi_k - \alpha_1\psi_{k-1} - \alpha_2\psi_{k-2} = 0$ hľadáme v tvare $\psi_k = \lambda^k$.
- Dosadením dostaneme, že nenulové $\psi_k$ je riešením práve vtedy, ak

$$\lambda^2 - \alpha_1\lambda - \alpha_2 = 0.$$

- Ak má táto kvadratická rovnica dva korene (reálne alebo komplexné), máme dve riešenia a všeobecné riešenie je

$$\psi_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k.$$

- Ak je koreň dvojnásobný, druhé riešenie je $k\lambda^k$ a všeobecné riešenie

$$\psi_k = c_1\lambda^k + c_2 k\lambda^k.$$

- Konštanty $c_1, c_2$ zo začiatočných podmienok $\psi_0, \psi_1$

# Podmienka stacionarity: záver

- Podmienka stacionarity:Kvôli splneniu podmienky $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ musia byť korene charakteristickej rovnice

$$\lambda^2 - \alpha_1 \lambda - \alpha_2 = 0$$

  v absolútnej hodnote menšie ako 1.
- Inak povedané (obvyklá formulácia v súvislosti s časovými radmi): korene rovnice

$$1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 = 0$$

  musia byť v absolútnej hodnote väčšie ako 1, teda mimo jednotkového kruhu
- Všimnime si, že to isté vyšlo pre AR(1) proces $\alpha(L)x_t = \delta + u_t$, kde $\alpha(L) = 1 - \alpha L$ - koreň polynómu $\alpha(L)$ musí byť mimo jednotkového kruhu

# Podmienka stacionarity v R-ku

- Funkcia `polyroot`:

A polynomial of degree *n* - *1*,

*p(x)* = *z1* + *z2* * *x* + ... + *z[n]* * *x^(n-1)*

is given by its coefficient vector `z[1:n]`. `polyroot` returns the *n-1* complex zeros of *p(x)*

# Podmienka stacionarity v R-ku: príklad

Overíme stacionaritu procesu

$$x_t = 1.2 + 0.3x_{t-1} - 0.8x_{t-2} + u_t,$$

teda

$$(1 - 0.3L + 0.8L^2)x_t = 1.2 + u_t$$

Je stacionárny, lebo všetky absolútne hodnoty sú väčšie ako 1:

```
polyroot(c(1, -0.3, 0.8)) # korene
```

```
## [1] 0.1875+1.1022i 0.1875-1.1022i
```

```
abs(polyroot(c(1, -0.3, 0.8))) # abs. hodnoty
```

```
## [1] 1.118034 1.118034
```

# AR(2) model pre spread: stacionarita

- Pripomeňme si výstup:

```
##          Estimate     SE t.value p.value
## ar1        1.1809 0.0650 18.1566  0.0000
## ar2       -0.2886 0.0651 -4.4321  0.0000
## xmean      1.0449 0.4212  2.4807  0.0139
```

- Teda model je

$$x_t = \delta + 1.1809 x_{t-1} - 0.2886 x_{t-2} + u_t$$

parameter $\delta$ je taký, aby platilo $\mathbb{E}(x_t) = 1.0449$

- Prepíšeme pomocou polynómu v $L$:

$$(1 - 1.1809L + 0.2886L^2) x_t = \delta + u_t$$

# AR(2) model pre spread: stacionarita

- Nájdeme presné hodnoty koeficientov modelu
$$(1 - 1.1809L + 0.2886L^2)x_t = \delta + u_t :$$

- Pripomeňme si štruktúru objektu `ar2` pomocou `str(ar2)`,potrebujeme vytiahnuť hodnoty koeficientov:

```
ar2$fit$coef
```

```
##        ar1        ar2      xmean
##  1.1808724 -0.2885893  1.0449355
```

```
polyroot(c(1, -1.1809, 0.2886))    # priblizne
polyroot(c(1, -ar2$fit$coef[1:2])) # presne
```

# AR(2) model pre spread: stacionarita

- Rozdiel pri použití približných a presných koeficientov je malý, ale druhý postup sa dá používať automaticky, bez kopírovania výstupu

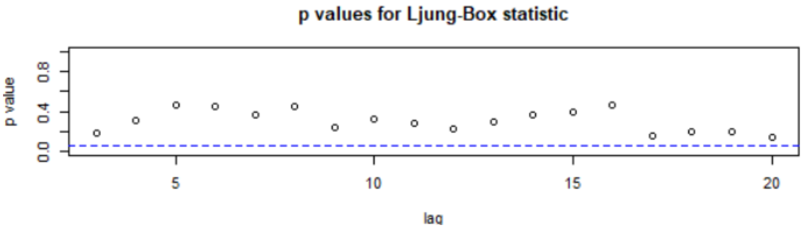
```
abs(polyroot(c(1, -ar2$fit$coef[1:2])))
```

```
## [1] 1.196978 2.894901
```

- Absolútne hodnoty sú všetky väčšie ako 1 $\rightarrow$ **stacionarita**

# AR(2) model pre spread: rezíduá

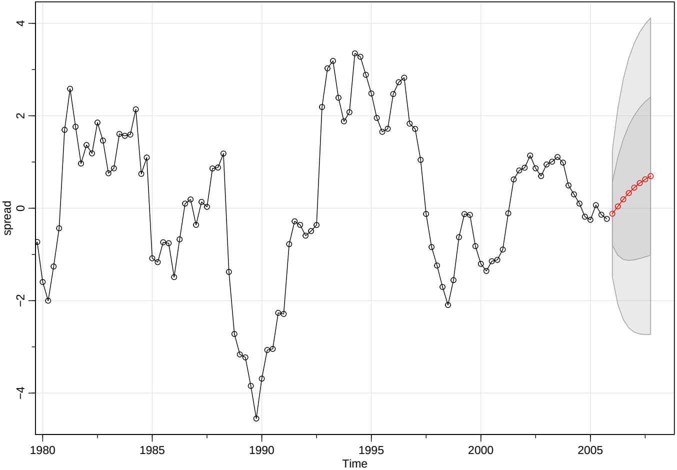
- Pripomeňme si dobré rezíduá:




- Všimnime si, že LB štatistika začína od lagu 3
- Počet stupňov voľnosti je počet testovaných korelácií mínus 2 (tá 2 pochádza z toho, že máme AR(2) model)

# AR(2) model pre spread: predikcie na 2 roky

```
sarima.for(spread, 8, 2, 0, 0) # kvartalne -> 8 hodnot
```



# Cvičenia

**Cvičenie 1.** Uvažujme proces $x_t = 5 - 0.4x_{t-1} + 0.1x_{t-2} + u_t$

- Ukážte, že je stacionárny.
- Odvoďte diferenčnú rovnicu a začiatočné podmienky pre koeficienty Woldovej reprezentácie. Vypočítajte rekurentne niekoľko prvých členov. Potom odvoďte explicitný predpis pre všeobecný člen.

```
# na kontrolu Woldova reprezentacia z R-ka
ARMAtoMA(ar = c(-0.4, 0.1), lag.max = 5)
```

```
## [1] -0.40000  0.26000 -0.14400  0.08360 -0.04784
```

**Cvičenie 2.** Zopakujte pre proces $x_t = 5 + 0.4x_{t-1} - 0.1x_{t-2} + u_t$

```
# na kontrolu Woldova reprezentacia z R-ka
ARMAtoMA(ar = c(0.4, -0.1), lag.max = 5)
```

```
## [1]  0.40000  0.06000 -0.01600 -0.01240 -0.00336
```

- Zo začiatočných podmienok a rekurentného vzťahu je jasné, že hodnoty $\psi_k$ . Upravte do predpis pre $\psi_k$ do tvaru, ktorý neobsahuje imaginárne čísla.
- Výsledok z predchádzajúceho bodu budeme ešte potrebovať pri analýze autokorelačnej funkcie.

# Definícia a podmienka stacionarity pre AR(p)

- AR($p$) proces:
$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + u_t, \tag{1}$$
teda $\alpha(L)x_t = \delta + u_t$, kde $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \cdots - \alpha_p L^p$
- Woldova reprezentácia a stacionarita:
$$x_t = \alpha(L)^{-1}(\delta + u_t),$$
inverzný operátor $\alpha(L)^{-1}$ hľadáme v tvare
$$\alpha(L)^{-1} = 1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \dots$$
- Pre koeficienty $\phi_j$ dostaneme diferenčnú rovnicu
$$\phi_k - \alpha_1 \phi_{k-1} - \cdots - \alpha_p \phi_{k-p} = 0$$
$\Rightarrow$ kvôli konvergencii $\sum \phi_j^2$ musia byť **korene polynómu** $\alpha(L)$ **mimo jednotkového kruhu**

# Príklad 1

- Proces $x_t = 0.2x_{t-1} + 0.3x_{t-1} - 0.6x_{t-3} + u_t$
- Je stacionárny, všetky korene $1 - 0.2L - 0.3L^2 + 0.6L^3$ sú mimo jednotkového kruhu

```
abs(polyroot(c(1, -0.2, -0.3, 0.6)))
```

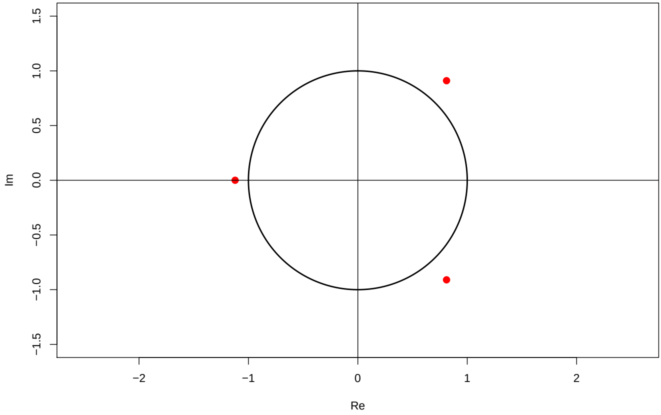
```
## [1] 1.218935 1.121728 1.218935
```

- Korene:

```
##          Re      Im    Mod
## 1  0.8109  0.9101 1.2189
## 2 -1.1217  0.0000 1.1217
## 3  0.8109 -0.9101 1.2189
```

# Príklad 1

- Grafické znázornenie koreňov



# Príklad 2

- Proces $x_t = 0.2x_{t-1} + 0.3x_{t-1} - 0.6x_{t-3} + 0.5x_{t-4} + u_t$
- Nie je stacionárny, jeden z koreňov polynómu $1 - 0.2L - 0.3L^2 + 0.6L^3 - 0.5L^4$ je vnútri jednotkového kruhu

```r
abs(polyroot(c(1, -0.2, -0.3, 0.6, -0.5)))
```

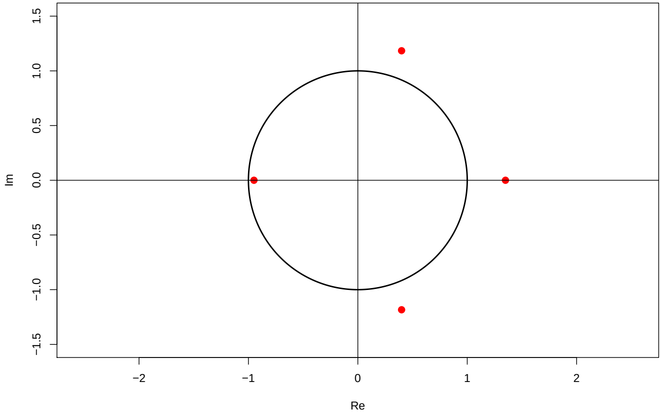
```
## [1] 1.2494352 0.9493448 1.2494352 1.3495174
```

- Korene:

```
##          Re      Im    Mod
## 1  0.3999  1.1837 1.2494
## 2 -0.9493  0.0000 0.9493
## 3  0.3999 -1.1837 1.2494
## 4  1.3495  0.0000 1.3495
```

# Príklad 2

- Grafické znázornenie koreňov:



# Užitočnosť pridávania ďalších AR členov

## Predikovanie dopytu po elektrine:

Vu, D. H., Muttaqi, K. M., Agalgaonkar, A. P., & Bouzerdoum, A. (2016). **Intra-hour and hourly demand forecasting using selective order autoregressive model.** In 2016 IEEE International Conference on Power System Technology (POWERCON) (pp. 1-6). IEEE.

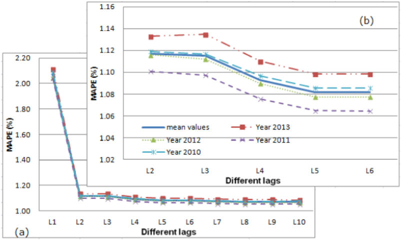



Fig. 5. Performance of the model with half hourly lags

When applying the autoregressive model given in (1) in load demand forecasting for the half hourly demand in NSW, the average performance of the model with different values of order p is recorded as shown in Fig. 5(a) and (b). It is noted that Fig. 5(b) is a zoom of Fig.5(a) from lag 2 to lag 6.

It can be seen from this Fig. 5(a) and (b) that the MAPE value reduces when adding more lag to the model until $P = 5$. After this critical value, the MAPE values get to the stationary state. Consequently, this critical value is selected as the order of the AR model for further development.