Autoregresné modely: PACF, určovanie rádu AR(p) modelu

Beáta Stehlíková

Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Parciálna autokorelačná funkcia

Základná myšlienka

- Parciálna autokorelačná funkcia bude slúžiť na odlíšenie AR procesov rôzneho rádu
- Uvažujme nejaký náhodný proces x_t s nulovou strednou hodnotou a modelujme jeho hodnotu pomocou k predchádzajúcich hodnôt:

$$x_t = \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \cdots + \beta_k x_{t-k} + v_t$$

  pričom koeficienty sa určia tak, aby sme dosiahli čo najlepšiu aproximáciu.
- Budeme to opakovať postupne pre $k = 1, 2, 3, \ldots$
- Ak máme napríklad AR(2) proces, tak koeficienty pri $x_{t-3}, x_{t-4}, \ldots$ budú nulové (pomocou x_{t-1}, x_{t-2} získame presne náš proces)

Definícia PACF

- Označme Φ_{ki} koeficient pri x_{t-i}, ak sme celkovo použili k starších hodnôt procesu.
- Teda (člen v_t je vždy iný proces)

$$
\begin{aligned}
x_t &= \Phi_{11}x_{t-1} + v_t \\
x_t &= \Phi_{21}x_{t-1} + \Phi_{22}x_{t-2} + v_t \\
x_t &= \Phi_{31}x_{t-1} + \Phi_{32}x_{t-2} + \Phi_{33}x_{t-2} + v_t \\
& \quad \ldots \\
x_t &= \Phi_{k1}x_{t-1} + \Phi_{k2}x_{t-2} + \ldots \Phi_{kk}x_{t-k} + v_t
\end{aligned}
$$

- Ak x je AR(p) proces, tak $\Phi_{kk} = 0$ pre $k > p$
- Koeficient Φ_{kk} sa nazýva parciálna autokorelácia rádu k
- Postupnosť $\Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{33}, \ldots$ sa nazýva parciálna autokorelačná funkcia (PACF)

Výpočet hodnôt PACF

- Vychádzame z modelu

$$x_t = \Phi_{k1}x_{t-1} + \Phi_{k2}x_{t-2} + \dots \Phi_{kk}x_{t-k} + v_t$$

- Koeficienty sú optimálne, zabezpečujúce najlepšiu aproximáciu, z čoho vyplýva $\mathbb{E}(x_{t-i}v_t) = 0$ pre $i = 1, \dots, k$
- Rovnakým postupom ako pri odvodení Yule-Wolkerových rovníc dostaneme

$$\begin{aligned}
\rho(1) &= \Phi_{k1} + \Phi_{k2}\rho(2) + \dots + \Phi_{kk}\rho(k-1) \\
\rho(2) &= \Phi_{k1}\rho(1) + \Phi_{k2} + \dots \Phi_{kk}\rho(k-2) \\
&\dots \\
\rho(k) &= \Phi_{k1}\rho(k-1) + \Phi_{k2}\rho(k-2) + \dots \Phi_{kk}
\end{aligned}$$

- Sústava lineárnych rovníc s neznámymi $\Phi_{k1}, \Phi_{k2}, \ldots, \Phi_{kk}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \ldots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \ldots & \rho(k-2) \\ & & \ldots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{k1} \\ \Phi_{k2} \\ \ldots \\ \Phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \ldots \\ \rho(k) \end{pmatrix}$$

- Zaujíma nás len Φ_{kk}

- Často sa v literatúre stretneme s tvarom získanom pomocou Cramerovho pravidla:

$$\Phi_{kk} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}}$$

Príklad: AR(1) proces

- Postupne počítame:

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \rho(1) \\ \Phi_{22} &= \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2} = 0 \end{aligned}$$

- Nulová hodnota Φ_{22} bola jasná už z definície PACF. Rovnako $\Phi_{kk} = 0$ aj pre $k = 3, 4, \ldots$

Výpočet v R-ku

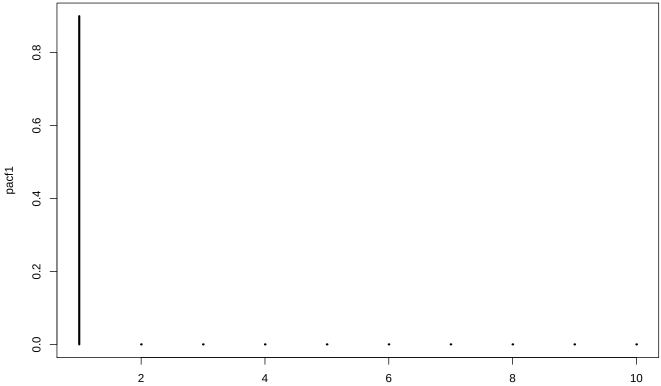
- Funkcia `ARMAacf`, ktorú sme už používali na výpočet autokorelačnej funkcie
- Pridaním parametra `pacf = TRUE` (defaultná hodnota je `FALSE`, vtedy sa počíta ACF) sa vypočíta parciálna autokorelačná funkcia
- Napríklad pre proces $x_t = 0.5x_{t-1} + 0.2x_{t-2} + u_t$:

```
# ACF
ARMAacf(ar = c(0.5, 0.2), lag.max = 10)

# PACF
ARMAacf(ar = c(0.5, 0.2), lag.max = 10, pacf = TRUE)
```

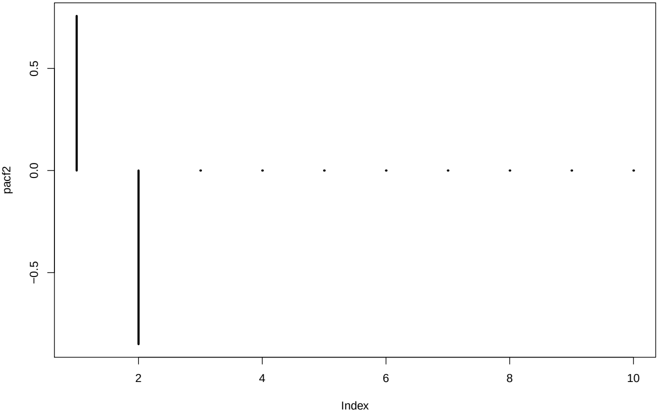
Príklad 1: AR(1) proces

```
pacf1 <- ARMAacf(ar = c(0.9), lag.max = 10, pacf = TRUE)
plot(pacf1, type = "h", lwd = 3)
```



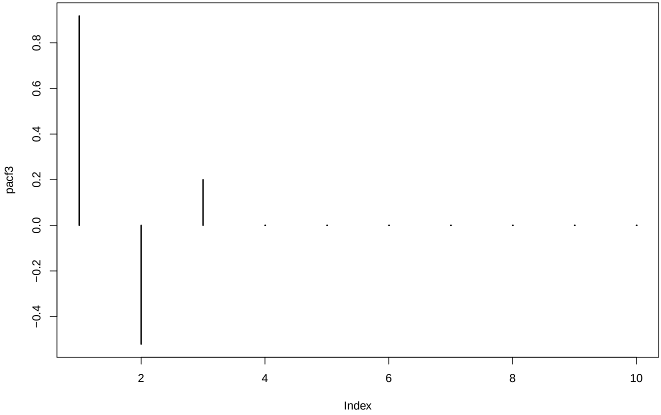
Príklad 2: AR(2) proces

- AR(2) proces $x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_T$



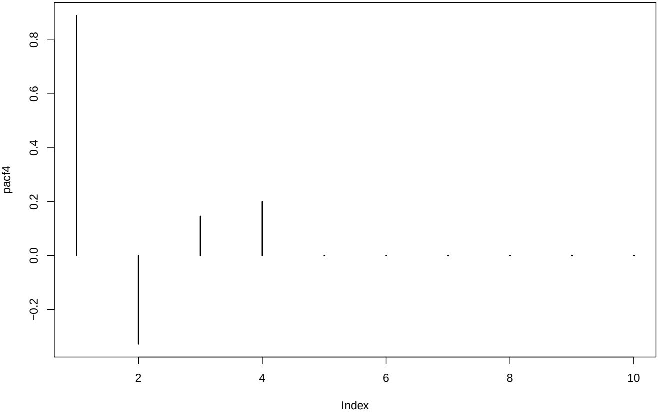
Príklad 3: AR(3) proces

- AR(3) proces $x_t = 1.5x_{t-1} - 0.8x_{t-2} + 0.2x_{t-3} + u_t$



Príklad 4: AR(4) proces

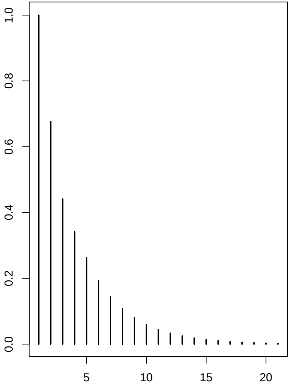
- AR(4) proces $x_t = 1.2x_{t-1} - 0.4x_{t-2} - 0.1x_{t-3} + 0.2x_{t-4}u_t$

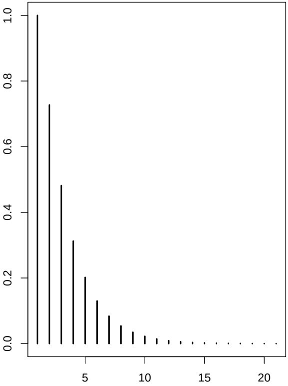


Príklad 5: porovnanie AR(2) a AR(3)

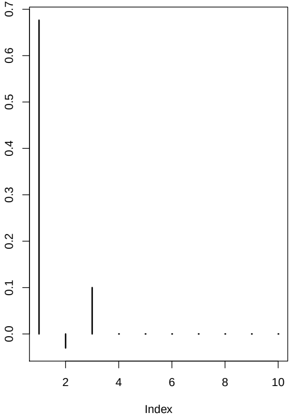
Pripomeňme si:

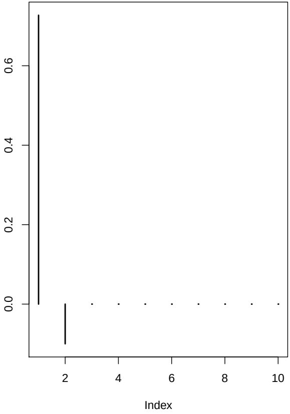
- ACF - jedna pre AR(2), druhá pre AR(3) - nevieme ich rozlíšiť





- Zobrazíme PACF týchto procesov
- Je jasné, že vľavo je AR(3) a vpravo AR(2)





Odhadovanie PACF z dát

- Za teoretické autokorelácie v predpise pre PACF dosadíme ich konzistentné odhady → dostaneme konzistentný odhad $\hat{\Phi}_{kk}$
- Pre AR(p) proces je $\Phi_{kk} = 0$ pre $k > p$, pre tieto k asymptoticky platí

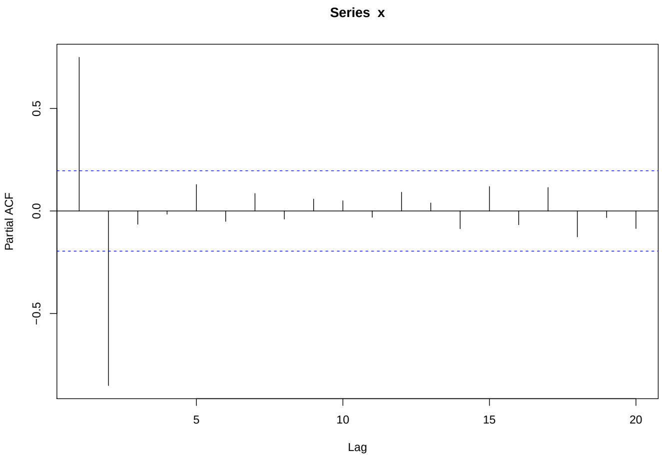
$$\mathbb{D}(\hat{\Phi}_k k) \approx \frac{1}{T}$$

- V R-ku:
  - funkcia `pacf`
  - alebo funkcia `acf2` z balíka `astsa`, počíta súčasne ACF aj PACF (vynechá aj lag 0 z ACF a nastaví rovnakú y-ovú os)
- Vyskúšame pre simulované dáta:

```
set.seed(123)
x <- arima.sim(model = list(ar = c(1.4, -0.85)), n = 100)
```

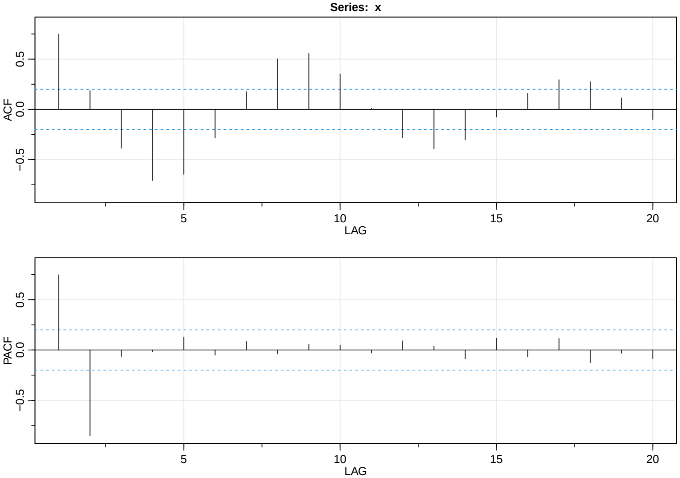
Odhadovanie PACF z dát

```r
pacf(x)
```



Odhadovanie PACF z dát

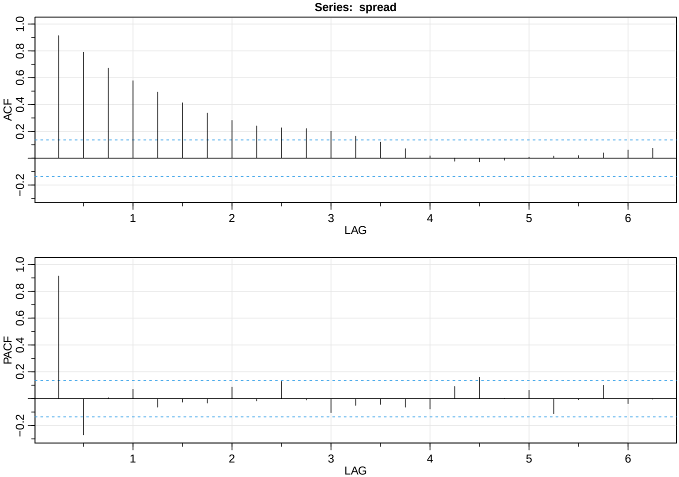
```
acf2(x)
```



Reálne dáta z predchádzajúcich príkladov, určenie rádu AR modelu

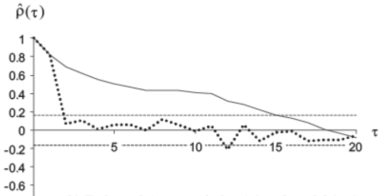
Príklad 1: spread úrokových mier modelovaný AR(2)

```
acf2(spread)
```

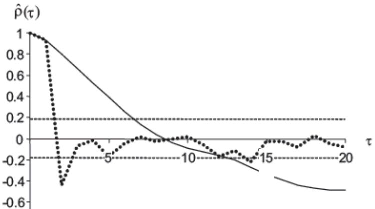


Príklad 2: volebné preferencie a úrokové miery

- Z prechádzajúcich príkladov z učebnice:
    - volebné preferencie (vľavo) - AR(1)
    - úrokové miery (vpravo) - AR(2)



b) Estimated Autocorrelation (—) and partial (·····) autocorrelation functions with confidence intervals



b) Estimated autocorrelation (—) and partial autocorrelation (·····) functions with confidence intervals

Obrázky z učebnice *Kirchgässner & Wolters*, example 2.2, 2.6