ARMA modely

Beáta Stehlíková

Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

ARMA procesy, motivácia ku kombinácii AR a MA členov

ARMA procesy

- ARMA procesy
  - obsahujú autoregresné (AR) členy typu $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots$
  - obsahujú *moving average* (MA) členy typu $u_{t-1}, u_{t-2}, \dots$
- ARMA(p,q) má tvar

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \dots - \beta_q u_{t-q}$$

- Odhadovanie v balíku `astsa`:

```
sarima(data, p, 0, q) # ARMA(p,q) pre data
sarima(data, p, k, q) # ARMA(p,q) pre k-te diferencie
```

Ukážka použitia ARMA modelov

D. Rawat et al.: Modeling of rainfall time series using NAR and ARIMA model over western Himalaya, India. Arabian Journal of Geosciences, 15(23), 2022.

Himachal Pradesh	
Month/season/year	Model
Jan	ARIMA (1, 1, 1)
Feb	ARIMA (3, 1, 1)
Mar	ARIMA (2, 1, 4)
April	ARIMA (1, 1, 1)
May	ARIMA (1, 1, 1)
June	ARIMA (1, 1, 1)
July	ARIMA (4, 1, 0)
Aug	ARIMA (2, 1, 1)
Sep	ARIMA (1, 1, 1)
Oct	ARIMA (1, 1, 1)

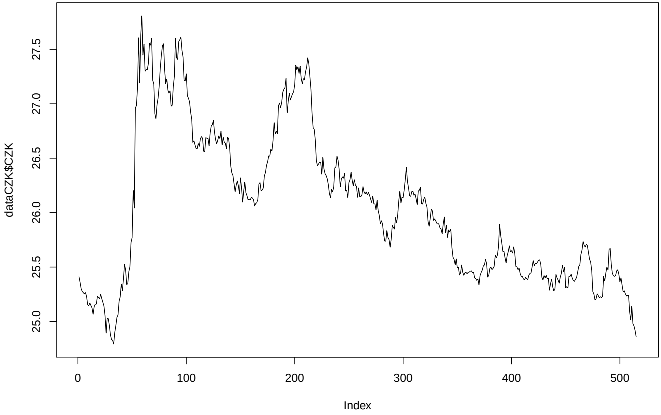
Reálne dáta: výmenné kurzy

- Dáta o výmenných kurzoch z prednášky o MA procesoch
- Zoberieme výmenný kurz s CZK v rokoch 2020-2021.
- Znovu modelujeme diferencie logaritmov

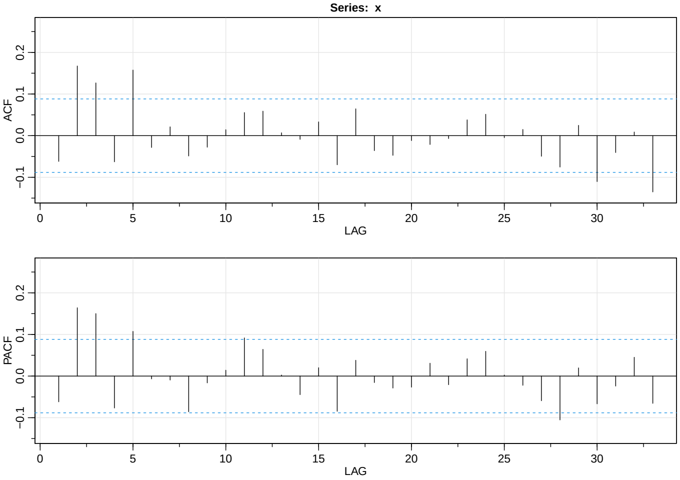
```
library(astsa)
load("ARMAprednaska.Rdata")
head(dataCZK)
```

```
##           Date    CZK
## 946 2020-01-02 25.411
## 945 2020-01-03 25.360
## 944 2020-01-06 25.301
## 943 2020-01-07 25.276
## 942 2020-01-08 25.265
## 941 2020-01-09 25.253
```

```
plot(dataCZK$CZK, type = "l")
```



```r
x <- diff(log(dataCZK$CZK))
acf2(x)
```



Čo v takejto situácii:

- Odhadneme ACF a PACF z dát a nepodobajú sa ani na AR, ani na MA proces
- Žiadny z AR a MA modelov nepripúšťa možnosť, že sa ani ACF, ani PACF nevynuluje po konečnom počte členov

Konkrétne v našom prípade:

- Tu by sme odhadovali AR(5) alebo MA(5)
- Otázka je, či by sa nedal nájsť model v inom tvare s menším počtom členov

- Pripomeňme si:

	AR(p)	MA(q)
ACF(k)	nenulová	nulová pre $k > q$
PACF(k)	nulová pre $k > p$	nenulová
MA(∞) - Wold	nekonečná suma	konečná suma
AR(∞)	konečná suma	nekonečná suma

- Žiadny z týchto modelov nepripúšťa možnosť, že ani ACF, ani PACF sa nevynuluje po konečnom počte členov
- Na to by sme potrebovali proces s nekonečnou AR aj MA reprezentáciou
- Uvidíme, že túto vlastnosť majú zmiešané ARMA modely (zmiešané = AR aj MA členy)

- Pre naše dáta - testujeme rezíduá Ljung-Boxovým testom:
  - AR(1), AR(2), AR(3), AR(4) majú zlé rezíduá
  - AR(5) je v poriadku
  - MA(1), MA(2), MA(3), MA(4) majú zlé rezíduá
  - MA(5) je v poriadku
  - ARMA(3,1) je tiež dobrý model
- Porovnáme Bayesovo informačné kritérium → **ARMA(3,1) je najlepší**

```
BICkrit <- c(sarima(x, 5, 0, 0, details = FALSE)$BIC,
             sarima(x, 0, 0, 5, details = FALSE)$BIC,
             sarima(x, 3, 0, 1, details = FALSE)$BIC)
names(BICkrit) <- c("AR(5)", "MA(5)", "ARMA(3,1)")
sort(BICkrit, decreasing = TRUE)
```

```
##     AR(5)     MA(5) ARMA(3,1)
## -8.320808 -8.325124 -8.330932
```

- Odhadnuté koeficienty:

```
arma31 <- sarima(x, 3, 0, 1, details = FALSE)
arma31$fit$coef
```

```
##           ar1           ar2           ar3           ma1
## -7.533214e-01  1.361270e-01  2.511709e-01  7.051347e-01
```

- Ak predpokladáme stacionaritu (podmienky odvodíme neskôr), odhadnutý model je

$$x_t = \delta - 0.753x_{t-1} + 0.136x_{t-2} + 0.251x_{t-3} + u_t + 0.705u_{t-1},$$

pričom δ je taká, aby platilo, že $\mathbb{E}(x_t) = -0.753$

Model ARMA(1,1)

Definícia

- Nech u_t je biely šum, definujme ARMA(1,1) proces ako

$$x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1},$$

pričom $\alpha \neq \beta$ (k tej podmienke sa ešte vrátime)

- Zápis pomocou operátora L:

$$(1 - \alpha L) x_t = \delta + (1 - \beta L)$$

Woldova reprezentácia a stacionarita

- Vyjadríme proces x_t:

$$\begin{aligned}(1-\alpha L)x_t &= \delta + (1-\beta L)u_t \\ x_t &= (1-\alpha L)^{-1}\delta + (1-\alpha L)^{-1}(1-\beta L)u_t,\end{aligned}$$

- Inverzný operátor $(1-\alpha L)^{-1}$ existuje pre $|\alpha| < 1$ (podmienka stacionarity pre AR(1) proces), v tom prípade

$$(1-\alpha L)^{-1} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots$$

- Podmienka stacionarity ARMA(1,1) procesu
  - je teda rovnaká ako pre AR(1) proces
  - je ňou nerovnosť $|\alpha| < 1$
  - to sa dá zapísať aj tak, že koreň polynómu $1-\alpha L$ je mimo jednotkového kruhu

- Woldova reprezentácia potom je

$$
\begin{aligned}
x_t &= \frac{\delta}{1-\alpha} + (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 \dots)(1 - \beta L) u_t \\
&= \frac{\delta}{1-\alpha} + u_t + (\alpha - \beta) u_{t-1} + \alpha(\alpha - \beta) u_{t-2} + \dots
\end{aligned}
$$

teda jej koeficienty sú

$$
\phi_0 = 1, \phi_1 = \alpha - \beta, \phi_2 = \alpha(\alpha - \beta), \dots, \phi_k = \alpha^{k-1}(\alpha - \beta)
$$

O podmienke $\alpha \neq \beta$

- Máme Woldovu reprezentáciu

$$x_t = \frac{\delta}{1-\alpha} + u_t + (\alpha - \beta)u_{t-1} + \alpha(\alpha - \beta)u_{t-2} + \dots$$

- Ak by bolo $\alpha = \beta$, tak máme

$$x_t = \frac{\delta}{1-\alpha} + u_t$$

a teda náš proces by bol iba biely šum posunutý o konštantu.

Invertovateľnosť

- Vyjadríme z proces u_t, aby sme dostali proces x_t vyjadrený pomocou jeho starších hodnôt a aktuálnej hodnoty bieleho šumu

$$\begin{aligned} (1-\alpha L)x_t &= \delta + (1-\beta L)u_t \\ -\delta + (1-\alpha L)x_t &= (1-\beta L)u_t \\ -(1-\beta L)^{-1}\delta + (1-\beta L)^{-1}(1-\alpha L)x_t &= u_t \end{aligned}$$

- Vieme, že podmienkou pre existenciu $(1-\beta L)^{-1}$ je nerovnosť $|\beta| < 1$
- Táto podmienka invertovateľnosti sa dá zapísať aj tak, že koreň polynómu $1-\beta L$ musí byť mimo jednotkového kruhu

Zhrnutie

- Uvažujeme proces

$$(1 - \alpha L)x_t = \delta + (1 - \beta L)u_t$$

- Podmienka *stacionarity*
  - koreň polynómu $1 - \alpha L$ mimo jednotkového kruhu
  - *závisí teda iba od AR časti*
- Podmienka *invertovateľnosti*
  - koreň polynómu $1 - \beta L$ mimo jednotkového kruhu
  - *závisí teda iba od MA časti*

Cvičenie 1. Odvoďte (t. j. spravte všetky kroky odvodenia, nedosadzujte do. získaných všeobecných výsledkov) Woldovu reprezentáciu ARMA(1,1) procesu

$$x_t = 2 + 0.5x_{t-1} + u_t - 0.7u_{t-1}$$

Model ARMA(p,q)

Definícia

- Nech u_t je biely šum, definujme ARMA(p,q) proces ako

  $$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \cdots - \beta_q u_{t-q},$$

  teda v operátorovom tvare

  $$(1 - \alpha_1 L - \ldots \alpha_p L^p) x_t = \delta + (1 - \beta_1 L - \cdots - \beta_q L^q) u_t,$$

  resp. po označení polynómov

  $$\alpha(L) x_t = \delta + \beta(L) u_t$$

- Požadujeme, aby polynómy $\alpha(L), \beta(L)$ nemali spoločné korene (k tejto podmienke sa vrátime, ide o zovšeobecnenie podmienky $\alpha \neq \beta$ z ARMA(1,1) procesu)

Woldova reprezentácia a stacionarita

- Vyjadríme proces x_t:

$$x_t = \alpha(L)^{-1}\delta + \alpha(L)^{-1}\beta(L)u_t,$$

- Potrebujeme $\alpha(L)^{-1}\beta(L)$:

$$\begin{aligned}
\alpha(L)^{-1}\beta(L) &= \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots \\
\beta(L) &= \alpha(L)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) \\
\beta(L) &= (1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p) \\
&\quad \times(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots)
\end{aligned}$$

roznásobíme a porovnáme mocniny pri L^j

- Pre koeficienty ψ_j Woldovej reprezentácie dostaneme
  - diferenčnú rovnicu $\psi_k - \alpha_1 \psi_{k-1} - \ldots \alpha_p \psi_{k-p} = 0$
  - začiatočné podmienky
- Kvôli požiadavke na konvergenciu sumy $\sum \psi_j^2$ musia byť korene charakteristického polynómu $\lambda^p - \alpha_1 \lambda^{p-1} - \cdots - \alpha_{p-1}\lambda - \alpha_p$ v absolútnej hodnote menšie ako 1, teda korene polynómu $\alpha(L)$ musia byť v absolútnej hodnote väčšie ako 1

Invertovateľnosť

- Z predpisu pre ARMA proces

$$\alpha(L)x_t = \delta + \beta(L)u_t$$

potrebujeme vyjadriť u_t:

$$\beta(L)^{-1}\alpha(L)x_t = \beta(L)^{-1}\delta + u_t$$

- Analogicky ako pri odvodzovaní stacionarity dostaneme, že toto sa dá spraviť, ak korene polynómu $\beta(L)$ sú v absolútnej hodnote väčšie ako 1
- Geometricky: korene polynómu

$$\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \cdots - \beta_q L^q$$

musia byť mimo jednotkového kruhu

Cvičenie 2. Overíme stacionaritu a invertovateľnosť ARMA procesu

$$x_t = 2 + 0.5x_{t-1} - 0.15x_{t-2} + u_t - 0.35u_{t-1} + 0.6u_{t-2}$$

Riešenie: Proces prepíšeme ako

$$(1 - 0.5L + 0.15L^2)x_t = 2 + (1 - 0.35L + 0.6L^2)u_t$$

```
abs(polyroot(c(1, -0.5, 0.15))) # -> stacionarita
```

```
## [1] 2.581989 2.581989
```

```
abs(polyroot(c(1, -0.35, 0.6))) # -> invertovatelnost
```

```
## [1] 1.290994 1.290994
```

Cvičenie 3. Overte stacionaritu a invertovateľnosť modelu, ktorý sme dostali na str. 10. Spravte tieto výpočty s presnými hodnotami.

Stredná hodnota

- Zoberme stacionárny ARMA proces

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \cdots - \beta_q u_{t-q}$$

- Spravíme strednú hodnotu z oboch strán.
- Zo stacionarity vyplýva, že v každom čase s je stredná hodnota rovnaká, označme ju μ:

$$\mu = \delta + \alpha_1 \mu + \ldots \alpha_p \mu \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \alpha_1 - \ldots \alpha_p}$$

Cvičenie 4. Čomu sa rovná konštanta δ v modeli pre dáta výmenných kurzov (str. 10)?

Disperzia, autokovariancie

- Môžeme znovu predpokladať, že $\delta = 0$ (posun procesu o konštantu nezmení disperziu ani autokovariancie)
- Proces

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \cdots - \beta_q u_{t-q}$$

vynásobíme x_{t-s} (pre $s = 0, 1, 2, \ldots$) a spravíme strednú hodnotu:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \alpha_1 \gamma(s-1) + \cdots + \alpha_p \gamma(s-p) \\ &\quad + \mathbb{E}(u_t x_{t-s}) - \beta_1 \mathbb{E}(u_{t-1} x_{t-s}) - \cdots - \beta_q \mathbb{E}(u_{t-q} x_{t-s}) \end{aligned}$$

- Pre $s > q$ sú nulové všetky stredné hodnoty

$$\mathbb{E}(u_t x_{t-s}), \mathbb{E}(u_{t-1} x_{t-s}), \ldots, \mathbb{E}(u_{t-q} x_{t-s})$$

- Vtedy platí diferenčná rovnica

$$\gamma(s) = \alpha_1 \gamma(s-1) + \cdots + \alpha_p \gamma(s-p) \tag{1}$$

- Táto diferenčná rovnica potrebuje p začiatočných podmienok
- Začiatočné podmienky sa počítajú zo sústavy rovníc
- Preto (1) budeme používať pre $s > \max(p, q)$
- Začiatočné podmienky dostaneme z rovníc získaných pre $s = 0, 1, \ldots, \max(p, q)$

Autokorelačná funkcia

- Rovnicu (1) vydelíme disperziou $\gamma(0)$ a dostaneme diferenčnú rovnicu pre autokorelácie $\rho(s)$

$$\rho(s) = \alpha_1 \rho(s-1) + \cdots + \alpha_p \rho(s-p)$$

  pre $s > \max(p, q)$
- Diferenčná rovnica pre ACF nezávisí od MA časti, od tej závisia len začiatočné podmienky

Cvičenie 5. Uvažujme proces

$$x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + u_t - \frac{1}{3}u_{t-1}$$

Odvodíme diferenčnú rovnicu pre

- autokovariancie
- autokorelácie

Cvičenie 6. Rovnakým postupom ukážte, že pre všeobecný stacionárny ARMA(1,1) proces $x_t = \delta + \alpha x_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1}$ platí:

- Jeho disperzia je $\mathbb{D}(x_t) = \frac{1+\beta^2-2\alpha\beta}{1-\alpha^2}\sigma^2$,kde σ^2 je disperzia bieleho šumu u
- ACF je daná predpisom $\rho(k) = \alpha^{k-1}\rho(1)$, pričom $\rho(1) = \frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{1+\beta^2-2\alpha\beta}$

Parciálna autokorelačná funkcia

- Dosadzujeme korelácie do všeobecných vzťahov pre ACF
- UPOZORNENIE: **NEPLATÍ**, že $ACF(k) = 0$ pre $k > q$ a $PACF(k) = 0$ pre $k > p$ (v minulých rokoch častá chyba pri komentovaní ACF a PACF)
- Napríklad pre nasledovný ARMA(2, 2) proces:

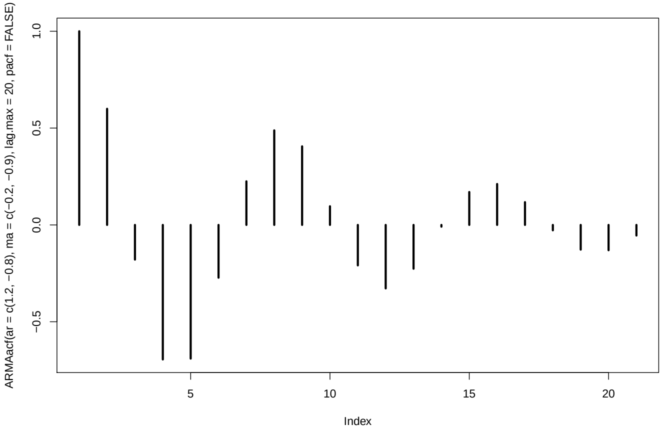
```
ARMAacf(ar = c(1.2, -0.8), ma = c(-0.2, -0.9),  lag.max = 4
```

```
##          0          1          2          3          4
##  1.0000000  0.5996344 -0.1791590 -0.6946984 -0.6903108
```

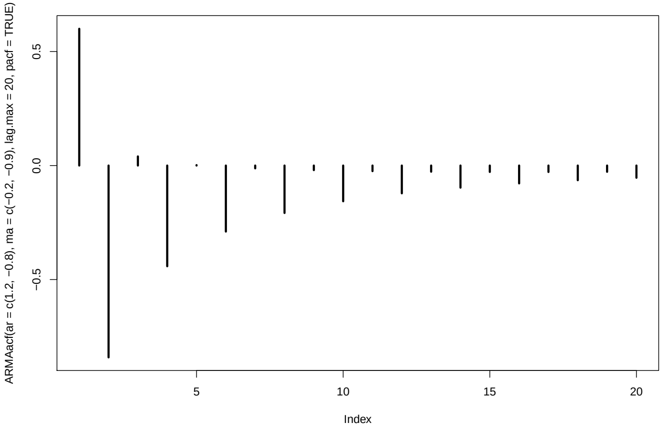
```
ARMAacf(ar = c(1.2, -0.8), ma = c(-0.2, -0.9), lag.max = 4,
```

```
## [1]  0.5996344 -0.8411742  0.0400243 -0.4416171
```

```
# ARMA model -> ACF sa nevynuluje
plot(ARMAacf(ar = c(1.2, -0.8), ma = c(-0.2, -0.9),
             lag.max = 20, pacf = FALSE), type = "h", lwd =
```



```
# ARMA model -> PACF sa nevynuluje
plot(ARMAacf(ar = c(1.2, -0.8), ma = c(-0.2, -0.9),
             lag.max = 20, pacf = TRUE), type = "h", lwd =
```

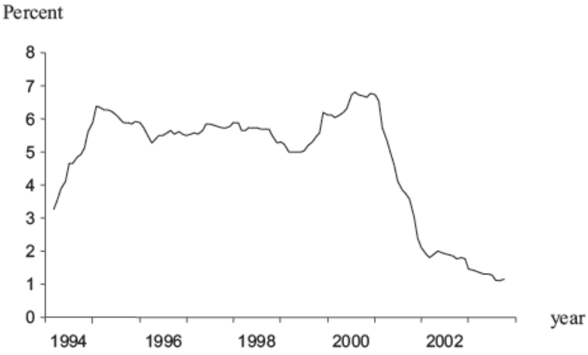


Príklad: Reálne dáta

Dáta

Prebraté z učebnice *Kirchgässner & Wolters*, example 2.15

- USA, marec 1994 - august 2003
- USR_t je trojmesačná úroková miera



a) New York three months money market rate, 1994 – 2003

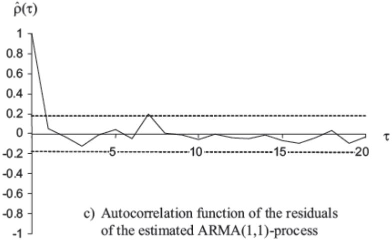
Odhadnutý model

The following ARMA(1,1) model has been estimated for this time series:

$$\Delta USR_t = \underset{(-0.73)}{-0.006} + \underset{(10.91)}{0.831}\, \Delta USR_{t-1} + \hat{u}_t - \underset{(-3.57)}{0.457}\, \hat{u}_{t-1},.$$

$$\bar{R}^2 = 0.351, \quad SE = 0.166, \quad Q(10) = 7.897 \ (p = 0.639).$$

The AR(1) as well as the MA(1) terms are different from zero at the 0.1 percent significance level. The autocorrelogram of the estimated residuals, which is also given in *Figure 2.10*, as well as the Box-Ljung Q statistic, which is calculated for this model with 12 autocorrelation coefficients (i.e. with 10 degrees of freedom), do not provide any evidence of a higher order process.



c) Autocorrelation function of the residuals of the estimated ARMA(1,1)-process with confidence intervals

Otázky k modelu

- Ukážte, že získaný model je stacionárny a invertovateľný
- Vysvetlite tvrdenie: *"The autocorrelogram of the estimated residuals (. . .) not provide any evidence of a higher order process"*
- Píše sa: *"the Box-Ljung Q statistic, which is calculated for this model with 12 autocorrelation coefficients (i.e. with 10 degrees of freedom). . . "*
  - sformulujte hypotézu, ktorá sa testuje
  - zdôvodnite počet stupňov voľnosti
  - aký je záver testu?

Spoločné korene AR a MA časti

Pripomeňme si definíciu ARMA(p,q) procesu:

- Nech u_t je biely šum, definujme ARMA(p,q) proces ako

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + u_t - \beta u_{t-1} - \cdots - \beta_q u_{t-q},$$

teda v operátorovom tvare

$$(1 - \alpha_1 L - \ldots \alpha_p L^p) x_t = \delta + (1 - \beta_1 L - \cdots - \beta_q L^q) u_t,$$

resp. po označení polynómov

$$\alpha(L) x_t = \delta + \beta(L) u_t$$

- Požadujeme, aby polynómy $\alpha(L), \beta(L)$ nemali spoločné korene
- Teraz sa pozrieme na túto podmienku na korene

- Majme "ARMA(2,2)" proces

$$(1-\alpha_1 L - \alpha L^2)x_t = \delta + (1-\beta_1 L - \beta_2 L^2)u_t$$

pričom polynómy majú tvar

$$1-\alpha_1 L - \alpha L^2 = (1-\gamma L)(1-\gamma_1 L), 1-\beta_1 L - \beta L^2 = (1-\gamma L)(1-\gamma_2 L),$$

teda majú spoločný koreň $1/\gamma$

- Potom sa proces dá písať nasledovne:

$$\begin{aligned} (1-\gamma L)(1-\gamma_1 L)x_t &= \delta + (1-\gamma L)(1-\gamma_2 L)u_t \\ (1-\gamma_1 L)x_t &= (1-\gamma L)^{-1}\delta + (1-\gamma_2 L)u_t \end{aligned}$$

- Ide teda v skutočnosti nie o ARMA(2,2), ale o ARMA(1,1) proces

Blízke korene AR a MA časti pri práci s dátami

- Ak dostaneme blízky koreň AR a MA časti, treba namiesto ARMA(p,q) modelu skúsiť ARMA(p-1, q-1)

Príklad 1:

- Vygenerujeme dáta z ARMA(1,1) procesu a budeme pre ne odhadovať ARMA(2,2) model
- Čo očakávame: malo by nám výjsť, že model treba zjednodušiť

```
set.seed(2020)
x <- arima.sim(model = list(ar = c(0.8), ma = c(0.5)),
               n = 100, sd = 1)
```

```r
library(astsa)
model <- sarima(x, 2, 0, 2, details = FALSE)
model$fit$coef
```

```
##       ar1       ar2       ma1       ma2     xmean
## 0.3521183 0.2290491 1.0511979 0.2299059 0.6243467
```

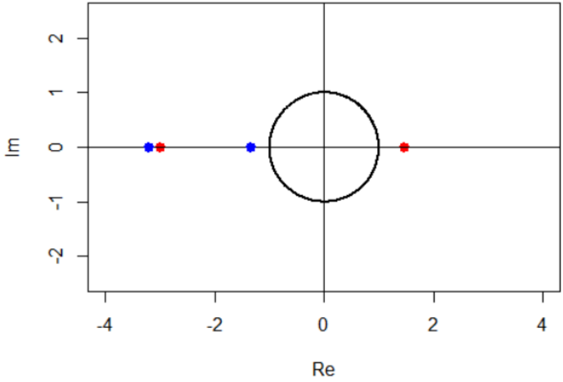
```r
ar.korene <- polyroot(c(1, -model$fit$coef[1:2]))
ma.korene <- polyroot(c(1, model$fit$coef[3:4]))
ar.korene
```

```
## [1]  1.457713-0i -2.995018+0i
```

```r
ma.korene
```

```
## [1] -1.349736-0i -3.222561+0i
```

- Červené AR korene a modré MA korene:



- Blízky AR a MA koreň → mali by sme skúsiť namiesto ARMA(2,2) odhadnúť ARMA(1,1) *(čo sedí, tak boli tie dáta generované)*

Príklad 2. ARMA(3,1) model pre dáta výmenných kurzov - AR a MA korene nie sú blízko seba