Konštrukcia predikcií

Beáta Stehlíková

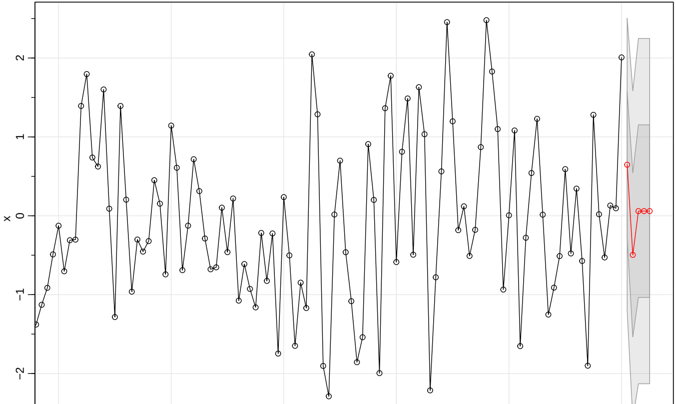
Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Motivácia

Opakovanie: Nekonštantné predikcie v MA modeloch

```
set.seed(1)
x <- arima.sim(model = list(ma = c(0.5, -0.3)), n = 200)
sarima.for(x, n.ahead = 5, 0, 0, 2)
```



- Odhadnuté koeficienty

```
ma2 <- sarima(x, 0, 0, 2, details = FALSE)
ma2$fit$coef
```

```
##         ma1         ma2       xmean
##  0.50319674 -0.36724704  0.05911811
```

- Model je

$$x_t = 0.0591 + u_t + 0.503u_{t-1} - 0.367u_{t-2}$$

- Ak v čase t predikujeme hodnotu x_{t+k}, tak predikujeme

$$x_{t+k} = 0.0591 + u_{t+k} + 0.503u_{t+k-1} - 0.367u_{t+k-2}$$

$\rightarrow$ prečo to nie je vždy 0.0591? (Teda že biele šumy nahradíme nulou.)

Základná myšlienka

- Predikujme v čase t hodnotu x_{t+1}, tak predikujeme

$$x_{t+1} = 0.0591 + u_{t+1} + 0.503u_t - 0.367u_{t-1}$$

  - Hodnota v u_{t+1} je hodnota bieleho šumu v budúcnosti
  - Ale hodnoty u_t, u_{t-1} už boli realizované (aj keď ich nevieme pozorovať, musíme ich nejako odhadnúť)

Predikcie - všeobecný princíp

- Sme v čase t, chceme predikciu hodnoty $x_{t+\tau}$, t. j. hodnotu procesu o τ období.
- Označme túto predikciu $\hat{x}_t(\tau)$, teda
  - index t označuje čas, v ktorom konštruujeme predikciu
  - argument τ označuje, na koľko období táto predikcia je
- Predikciou bude očakávaná hodnota procesu v tom čase, pri danej informácii, ktorú máme k dispozícii:

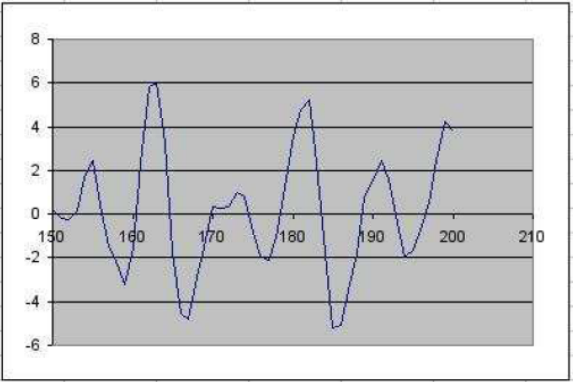
$$\hat{x}_t(\tau) = \mathbb{E}_t(x_{t+\tau})$$

(index t vo výraze $\mathbb{E}_t$ znamená, že strednú hodnotu počítame v čase t)

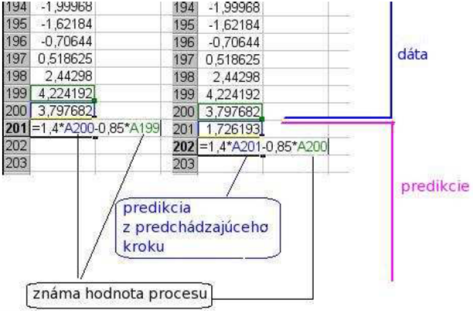
Predikcie v AR modeloch

- Majme proces $x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$ a dáta:

183	2,297308
184	-1,79321
185	-5,19365
186	-5,04636
187	-3,5133
188	-1,78753
189	0,706783
190	1,534983
191	2,447012
192	1,593168
193	-0,39105
194	-1,99968
195	-1,62184
196	-0,70644
197	0,518625
198	2,44298
199	4,224192
200	3,797682
201	
202	

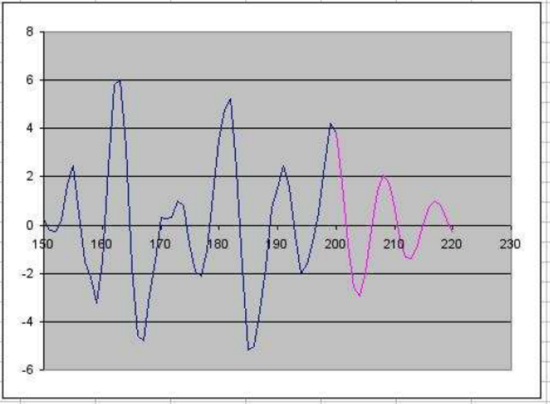


- Chceme predikcie pre hodnoty v nasledujúcich časoch
- Intuitívne:
  - do diferenčnej rovnice dosadzujeme známe hodnoty procesu a keď už k dispozícii nie sú, dosadzujeme predikcie
  - biely šum nahradíme nulou



- Výsledok:

189	0,706783
190	1,534983
191	2,447012
192	1,593168
193	-0,39105
194	-1,99968
195	-1,62184
196	-0,70644
197	0,518625
198	2,44298
199	4,224192
200	3,797682
201	1,726193
202	-0,81136
203	-2,60317
204	-2,95478
205	-1,924
206	-0,18203
207	1,38055
208	2,087499
209	1,749031
210	0,67427
211	-0,5427
212	-1,33291
213	[illegible]



- Vzťah $\hat{x}_t(\tau) = \mathbb{E}_t(x_{t+\tau})$ sa zhoduje s touto intuíciou.
- Majme AR(p) proces

$$x_t = \delta + \alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + u_t.$$

- Potom:

$$\begin{aligned} x_{t+\tau} &= \delta + \alpha_1 x_{t+\tau-1} + \cdots + \alpha_p x_{t+\tau-p} + u_{t+\tau}, \\ \underbrace{\mathbb{E}_t(x_{t+\tau})}_{\hat{x}_t(\tau)} &= \delta + \alpha_1 \mathbb{E}_t(x_{t+\tau-1}) + \cdots + \alpha_p \mathbb{E}_t(x_{t+\tau-p}) + \underbrace{\mathbb{E}_t(u_{t+\tau})}_{0} \end{aligned}$$

pričom

$$\mathbb{E}_t(x_{t+s}) = \begin{cases} \hat{x}_t(s), & \text{pre } s > 0 \\ x_{t+s}, & \text{pre } s \leq 0 \end{cases}$$

Predikcie v MA modeloch

- Majme MA(1) proces

$$x_t = \mu + u_t - \beta u_{t-1}$$

a počítajme predikcie $\hat{x}_t(\tau)$:

$$\begin{aligned} x_{t+s} &= \mu + u_{t+s} - \beta u_{t+s-1}, \\ \underbrace{\mathbb{E}_t(x_{t+s})}_{\hat{x}_t(s)} &= \mu + \underbrace{\mathbb{E}_t(u_{t+s})}_{0} - \beta \underbrace{\mathbb{E}_t(u_{t+s-1})}_{u_t \text{ pre } s=1, \text{ inak} 0}, \end{aligned}$$

Teda:

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t, & \text{pre } s = 1 \\ \mu, & \text{pre } s = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- *Cvičenie:* Dokážte, že pre MA(q) model je $\hat{x}_t(s) = \mu$ pre $s > q$ a že pre $s \leq q$ predikcie obsahujú realizované hodnoty bieleho šumu u

- Predikcie pre MA(1) model teda sú:

$$\hat{x}_t(s) = \begin{cases} \mu - \beta u_t, & \text{pre } s = 1 \\ \mu, & \text{pre} s = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Obsahujú teda hodnotu bieleho šumu u_t - tá už v čase konštrukcie predikcií bola realizovaná, nie sme však schopní ju pozorovať.
- Cvičenie z predch. slajdu - podobná situácia nastáva pre ľubovoľný MA(q) proces
- *Ako teda prakticky počítať predikcie?* Myšlienka: vyjadríme u_t pomocou hodnôt procesu x.
- Tento výpočet si ukážeme pre MA(1) model.

Predikcie v MA(1) modeli

- Pre $t = 0$:

$$\hat{x}_0(1) \stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_0 \tag{1}$$

- Pre $t = 1$:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1(1) &\stackrel{(1)}{=} \mu - \beta u_1 \\
&\stackrel{(2)}{=} \mu - \beta \left[x_1 - \hat{x}_0(1)\right] \\
&\stackrel{(3)}{=} \mu - \beta \left[x_1 - (\mu - \beta u_0)\right] \\
&= \mu(1+\beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0
\end{aligned} \tag{2}$$

- Pre $t = 2$:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_2(1) &\overset{(1)}{=} \mu - \beta u_2 \\
&\overset{(2)}{=} \mu - \beta \left[x_2 - \hat{x}_1(1)\right] \\
&\overset{(4)}{=} \mu - \beta \left[x_2 - (\mu(1+\beta) - \beta x_1 - \beta^2 u_0\right] \\
&= \mu(1+\beta+\beta^2) - \beta x_2 - \beta^2 x_1 - \beta^3 u_0 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

- Pre všeobecné t:

$$\begin{aligned}\hat{x}_t(1) &= \mu(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^t) \\ &\quad -\beta x_t - \beta^2 x_{t-1} - \cdots - \beta^t x_1 - \beta^{t+1} u_0\end{aligned}$$

- Pripomeňme si podmienku invertovateľnosti $|\beta| < 1$.
- Jediný nepozorovateľná hodnota v predikcii je u_0, ale vplyv člena $\beta^{t+1} u_0$ ide k nule pre $t \to \infty$ (t je počet dát) $\Rightarrow$ zanedbáme ho a dostaneme predpis pre predikcie obsahujúci len pozorovateľné hodnoty