SARIMA modely: modelovanie sezónnych časových radov

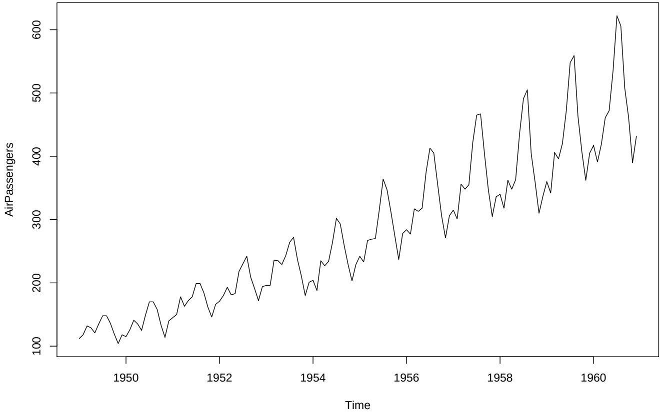
Beáta Stehlíková

Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Obsah

- Modelovanie sezónnych dát: kvartálny HDP (sezónne neočistený), mesačný prietok riek, mesačný počet návštevníkov v turistických oblastiach



- Niekoľko teoretických príkladov so sezónnymi členmi: aký priebeh ACF a PACF môžeme pri nich očakávať
- Sezónne diferencovanie
- SARIMA modely

Príklady ARMA procesov so sezónnymi členmi, ich ACF PACF

Príklad 1: $x_t = \alpha x_{t-12} + u_t$

- Stacionarita: $(1 - \alpha L^{12})x_t = u_t \Rightarrow \alpha < 1$
- Prenásobíme x_{t-s} a spravíme strednú hodnotu $\rightarrow$ rovnice pre autokovariancie:

$$\gamma(s) = \alpha\gamma(s-12), \;\; (s > 0)$$
$$\gamma(0) = \alpha\gamma(12) + \sigma^2$$

- Riešenie:

$$\text{disperzia: } \gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$$
$$\gamma(12k) = \alpha^k\gamma(0), \text{ ostatné } \gamma(s) = 0$$

- ACF:

$$\rho(12k) = \alpha^k, \text{ ostatné } \rho(s) = 0$$

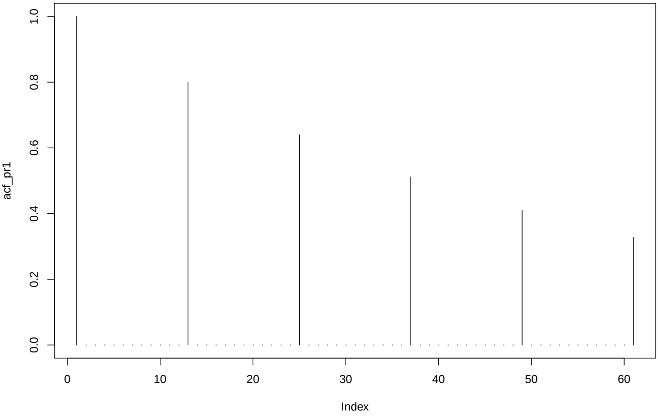
Proces $x_t = \alpha x_{t-12} + u_t$ v R-ku

Máme vlastne AR(12) proces s mnohými nulovými koeficientami:

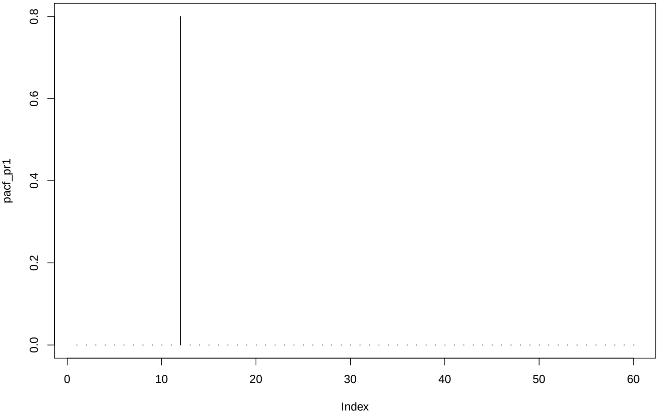
$$\begin{aligned} x_t &= \alpha x_{t-12} + u_t \\ x_t &= 0\, x_{t-1} + \ldots 0\, x_{t-11} + \alpha x_{t-12} + u_t \end{aligned}$$

```
# ACF
acf_pr1 <- ARMAacf(ar = c(rep(0, 11), 0.8), lag.max = 60)
plot(acf_pr1, type = "h")

# PACF
pacf_pr1 <- ARMAacf(ar = c(rep(0, 11), 0.8), lag.max = 60,
                    pacf = TRUE)
plot(pacf_pr1, type = "h")
```

Autokorelačná funkcia:



Parciálna autokorelačná funkcia:



Príklad 2: x_t = 0.8 x_{t-12} - 0.3 x_{t-24} + u_t

- Stacionarita:

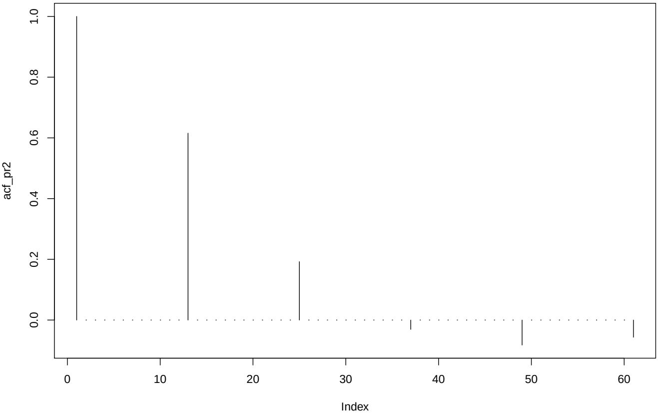
$$(1 - 0.8L^{12} + 0.3L^{24})x_t = u_t$$

  substitúcia $L^{12} = y$ → overujeme korene polynómu $1 - 0.8y + 0.3y^2$ (z každej hodnoty y dostaneme 12 koreňov L, pre ktoré $|L|^{12} = |y|$)

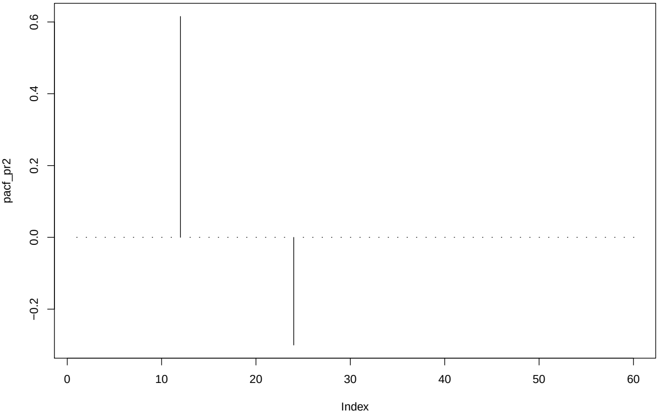
- Koeficienty do výpočtu ACF a PACF

```
ar_koef <- c(rep(0, 11), 0.8, rep(0, 11), -0.3)
acf_pr2 <- ARMAacf(ar = ar_koef, lag.max = 60)
pacf_pr2 <- ARMAacf(ar = ar_koef, lag.max = 60, pacf = TRUE
```

Autokorelačná funkcia:



Parciálna autokorelačná funkcia:



Príklad 3: $(1 - 0.5L)(1 + 0.8L^{12})x_t = u_t$

- V SARIMA modeloch sa budú klasické a sezónne polynómy **násobiť**
- Máme teraz:

$$(1 - 0.5L)(1 + 0.8L^{12}) = 1 - 0.5L + 0.8L^{12} - 0.4L^{13},$$

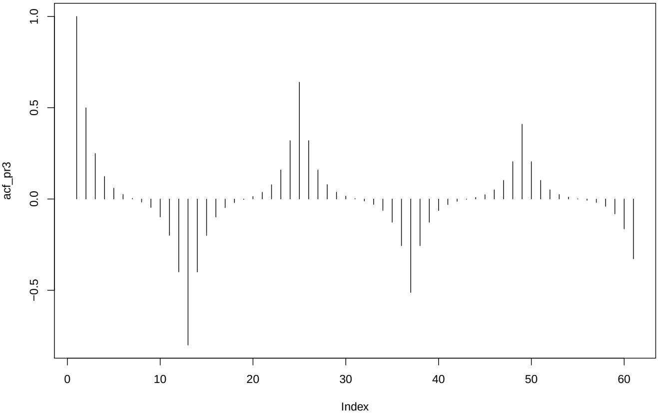
proces teda je

$$x_t = 0.5x_{t-1} - 0.8x_{t-12} + 0.4x_{t-13} + u_t$$

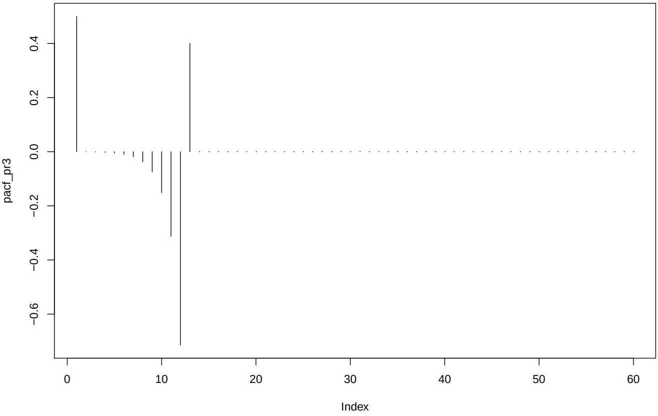
- Koeficienty do výpočtu ACF a PACF

```
ar_koef <- c(0.5, rep(0, 10), -0.8, 0.4)
acf_pr3 <- ARMAacf(ar = ar_koef, lag.max = 60)
pacf_pr3 <- ARMAacf(ar = ar_koef, lag.max = 60, pacf = TRU
```

Autokorelačná funkcia:



Parciálna autokorelačná funkcia:

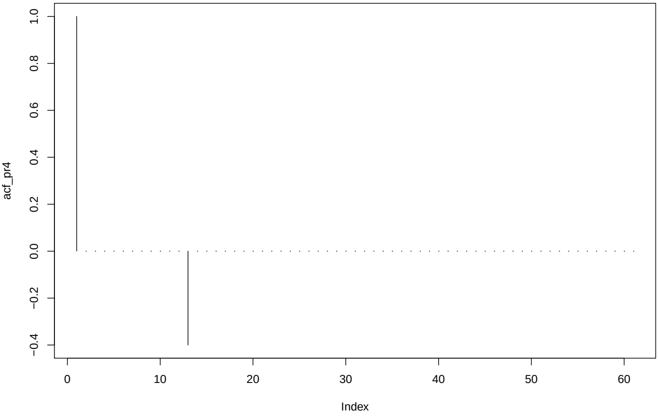


Príklad 4: $x_t = u_t - 0.5u_{t-12}$

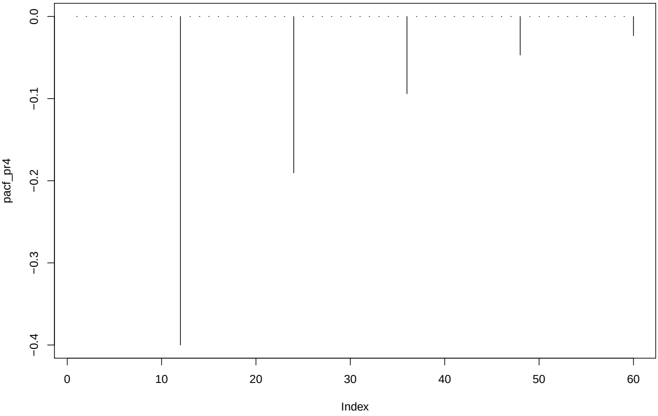
- Teoretická ACF: jediná nenulová hodnota je pre lag 12
- Koeficienty do výpočtu ACF a PACF

```
ma_koef <- c(rep(0, 11), -0.5)
acf_pr4 <- ARMAacf(ma = ma_koef, lag.max = 60)
pacf_pr4 <- ARMAacf(ma = ma_koef, lag.max = 60, pacf = TRUE
```

Autokorelačná funkcia:



Parciálna autokorelačná funkcia:



Príklad 5: $x_t = 0.8x_{t-12} + u_t - 0.5u_{t-1}$

Cvičenie. Odvoďte ACF pre všeobecný model tohto tvaru:

Example 3.47 A Mixed Seasonal Model

Consider an ARMA$(0,1) \times (1,0)_{12}$ model

$$x_t = \Phi x_{t-12} + w_t + \theta w_{t-1},$$

where $|\Phi| < 1$ and $|\theta| < 1$. Then, because x_{t-12}, w_t, and w_{t-1} are uncorrelated, and x_t is stationary, $\gamma(0) = \Phi^2\gamma(0) + \sigma_w^2 + \theta^2\sigma_w^2$, or

$$\gamma(0) = \frac{1+\theta^2}{1-\Phi^2}\,\sigma_w^2.$$

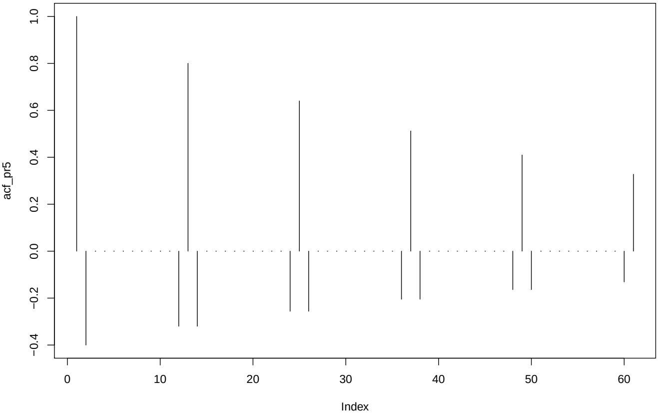
In addition, multiplying the model by x_{t-h}, $h > 0$, and taking expectations, we have $\gamma(1) = \Phi\gamma(11) + \theta\sigma_w^2$, and $\gamma(h) = \Phi\gamma(h-12)$, for $h \ge 2$. Thus, the ACF for this model is

$$\begin{aligned}
\rho(12h) &= \Phi^h \quad h = 1, 2, \ldots \\
\rho(12h-1) = \rho(12h+1) &= \frac{\theta}{1+\theta^2}\Phi^h \quad h = 0, 1, 2, \ldots, \\
\rho(h) &= 0, \quad \text{otherwise.}
\end{aligned}$$

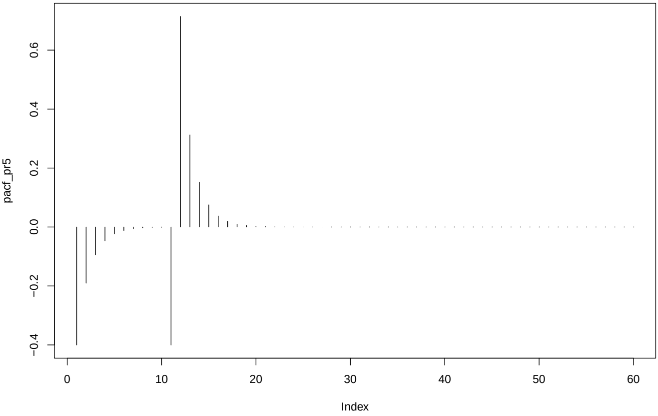
Shumaway, Stoffer: Time Series Annalysis and its Applications with R Examples (2017)

```r
# x_t = 0.8 x_{t-12} + u_t - 0.5 u_{t-1}

acf_pr5 <- ARMAacf(ar = c(rep(0, 11), 0.8),
                   ma = c(-0.5),
                   lag.max = 60)

pacf_pr5 <- ARMAacf(ar = c(rep(0, 11), 0.8),
                   ma = c(-0.5),
                   lag.max = 60,
                   pacf = TRUE)
```

Autokorelačná funkcia:



Parciálna autokorelačná funkcia:



Sezónne diferencovanie

Vzorový príklad

- Predstavme si model pre časový rad x_t:

$$x_t = S_t + u_t$$

  so sezónnou zložkou S_t a bielym šumom u_t
- Sezónnu zložku modelujeme ako

$$S_t = S_{t-12} + w_t,$$

  kde w je biely šum nezávislý od u
- Potom náš proces x je

$$\begin{aligned}
x_t &= S_t + u_t = (S_{t-12} + w_t) + u_t \\
&= (x_{t-12} - u_{t-12} + w_t) + u_t \\
(1 - L^{12})x_t &= w_t + u_t - u_{t-12}
\end{aligned}$$

- Náš proces teda nie je stacionárny kvôli jednotkovému koreňu
- Polynóm $1 - L^{12}$ má okrem $L = 1$ ešte ďalších 11 koreňov s absolútnou hodnotou 1.
- Vizuálne na ACF: hodnoty pre násobky 12 klesajú príliš pomaly
- V takomto prípade zoberieme **sezónne diferencie** $x_t - x_{t-12}$
- V R-ku `diff(x, lag = 12)`

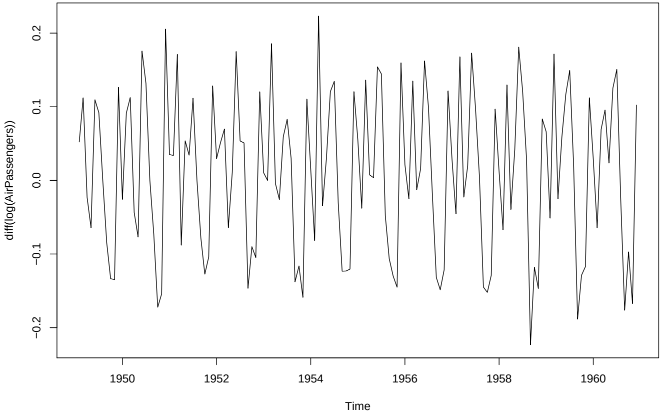
Príklad sezónneho diferencovania I.

- Zoberieme dáta o počte cestujúcich aerolinkami od Boxa a Jenkinsa
- Zlogaritmujeme, aby sme odstránili rastúcosť disperzie
- Zdiferencujeme kvôli trendu

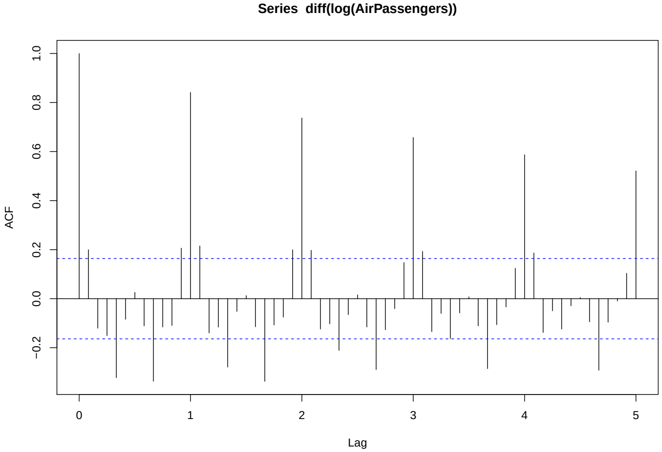
Pozrieme sa pre tieto diferencie na:

- priebeh dát
- výberovú ACF
- ADF test

```r
plot(diff(log(AirPassengers)))
```



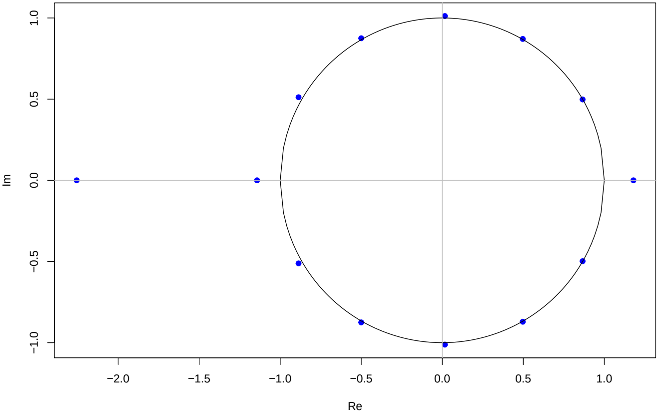
```
acf(diff(log(AirPassengers)), lag.max = 60)
```



```r
library(urca)
# kriticke hodnoty: -3.46 -2.88 -2.57
ur.df(diff(log(AirPassengers)),
      type = "drift", lags = 13, selectlags = "BIC")
```

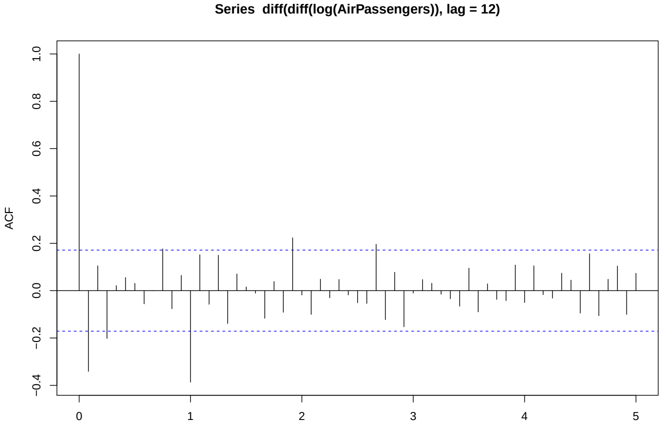
```
##
## ###############################################################
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root / Cointegration
## ###############################################################
##
## The value of the test statistic is: -3.0152 4.5457
```

Korene polynómu AR procesu vyplývajúceho z predchádzajúcej regresie:



- P-hodnota medzi 0.05 a 0.01
- Tieto dáta sú už stacionárne, vizuálne aj ADF testom

```
acf(diff(diff(log(AirPassengers)), lag = 12), lag.max = 60)
```

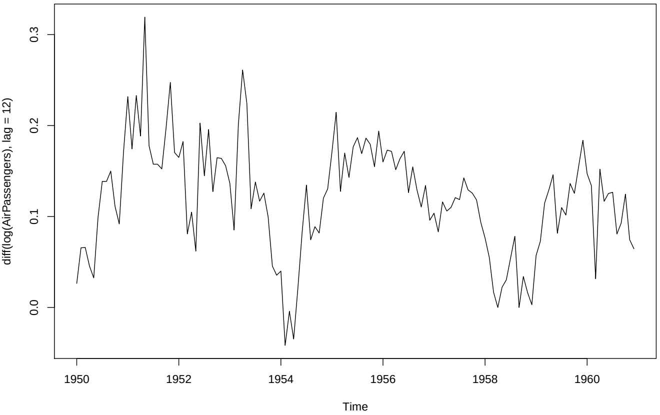


Príklad sezónneho diferencovania II.

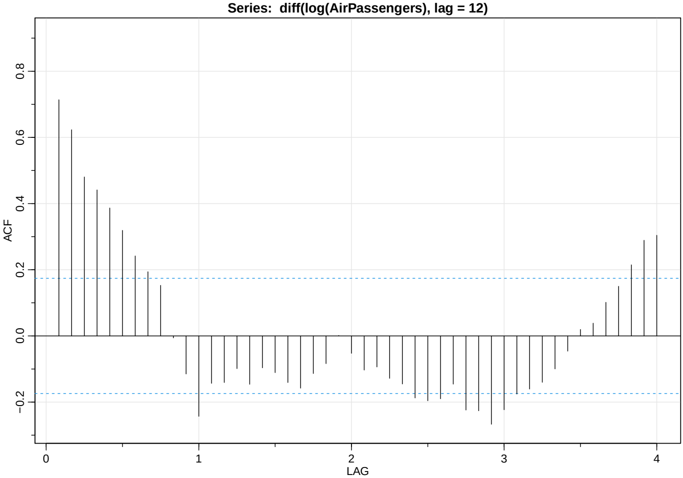
Tie isté dáta, iný postup:

- Zoberieme dáta o počte cestujúcich aerolinkami od Boxa a Jenkinsa
- Zlogaritmujeme, aby sme odstránili rastúcosť disperzie
- S cieľom zbaviť sa trendu tiež spravíme diferencie, ale tentokrát sezónne, budeme sa teda pozerať na medziročné zmeny (čo má interpretáciu)

```
plot(diff(log(AirPassengers), lag = 12))
```


diff(log(AirPassengers), lag = 12)
0.0
0.1
0.2
0.3
1950
1952
1954
1956
1958
1960
Time

```
acf1(diff(log(AirPassengers), lag = 12))
```



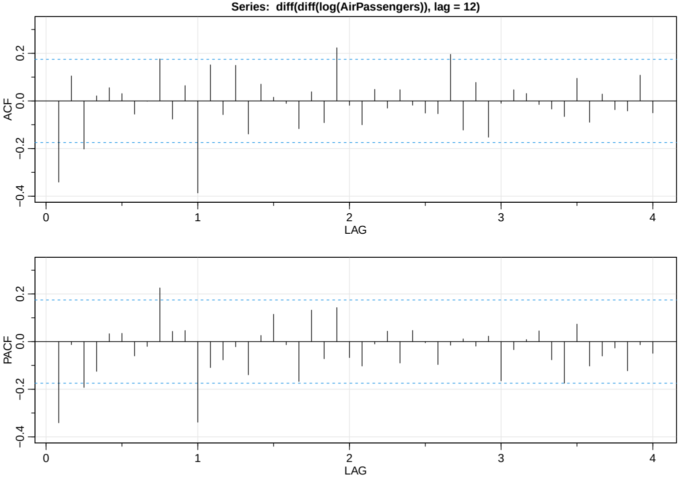

```
## [1] 0.71 0.62 0.48 0.44 0.39 0.32 0.24 0.19 0.
```

```
# kriticke hodnoty -3.46 -2.88 -2.57
ur.df(diff(log(AirPassengers), lag = 12),
      type = "drift", lag = 5, selectlags = "BIC")
```

```
##
## ##############################################################
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root / Cointegratio
## ##############################################################
##
## The value of the test statistic is: -3.2637 5.3267
```

- V dátach je ešte možno jednotkový koreň (p medzi 0.01 a 0.05, ACF klesá pomaly)
- Po zdiferencovaní dostaneme tie isté dáta na hľadanie modelu ako predtým

```r
library(astsa)
acf2(diff(diff(log(AirPassengers)), lag = 12))
```



SARIMA modely

- Dáta môžu byť klasicky a/alebo sezónne diferencované
- AR členy
  - klasické, napr. $(1-\alpha_1 L)x_t, (1-\alpha_1 L - \alpha_2 L^2)x_t, \dots$
  - sezónne, napr. $(1-\phi_1 L^{12})x_t, (1-\phi_1 L^{12} - \phi_2 L^{24})x_t, \dots$
  - vynásobia sa
- MA členy
  - klasické, napr.$(1-\beta_1 L)u_t, (1-\beta_1 L - \beta_2 L^2)u_r, \dots$
  - sezónne, napr. $(1-\theta_1 L^{12})u_t, (1-\theta_1 L^{12} - \theta_2 L^{24})u_t, \dots$
  - vynásobia sa

Príklady

Príklad 1. Model pre mesačné dáta:

$$(1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2)(1-\psi L^{12})y_t=(1-\beta_1 L)(1-\theta_1 L^{12})u_t,$$

kde y_t sú diferencie pôvodných dát x_t:

$$y_t=(1-L)x_t$$

Príklad 2. Model pre kvartálne dáta:

$$(1-\alpha_1 L)(1-\psi L^4)y_t=(1-\beta_1 L)(1-\theta_1 L^4-\theta_2 L^8)u_t,$$

kde y_t vzniknú z pôvodných dát x_t diferencovaním a následným sezónnym diferencovaním:

$$y_t=(1-L^4)(1-L)x_t$$

Terminológia SARIMA modelov

- Pripomeňme si ARIMA(p, d, q) modely:
  - $p =$ počet AR členov
  - $d =$ koľkokrát dáta diferencujeme
  - $q =$ počet MA členov
- SARIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ modely majú navyše
  - $P =$ počet sezónnych AR členov (vo výstupe z R-ka `sar1`, `sar2`, ...)
  - $D =$ koľkokrát dáta sezónne diferencujeme
  - $Q =$ počet sezónnych MA členov (vo výstupe z R-ka `sma1`, `sma2`, ...)
  - $s =$ perióda dát
- SARIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ model v R-ku:

```
sarima(data, p, d, q, P, D, Q, s) #model
sarima.for(data, N, p, d, q, P, D, Q, s) # predikcie
```

Príklad 1. Model pre mesačné dáta:

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)(1 - \psi L^{12}) y_t = (1 - \beta_1 L)(1 - \theta_1 L^{12}) u_t,$$

kde y_t sú diferencie pôvodných dát x_t:

$$y_t = (1 - L) x_t$$

Je to

$$SARIMA(2,1,1) \times (1,0,1)_{12}$$

Príklad 2. Model pre kvartálne dáta:

$$(1-\alpha_1 L)(1-\psi L^4)y_t = (1-\beta_1 L)(1-\theta_1 L^4 - \theta_2 L^8)u_t,$$

kde y_t vzniknú z pôvodných dát x_t diferencovaním a následným sezónnym diferencovaním:

$$y_t = (1-L^4)(1-L)x_t$$

Je to

$$SARIMA(1,1,1)\times(1,1,2)_4$$

- Z prehľadového článku *J. Kaur et al. (2023). Autoregressive models in environmental forecasting time series: a theoretical and application review. Environmental Science and Pollution Research, 30(8), 19617-19641.*
- Aký tvar má odhadnutý model?

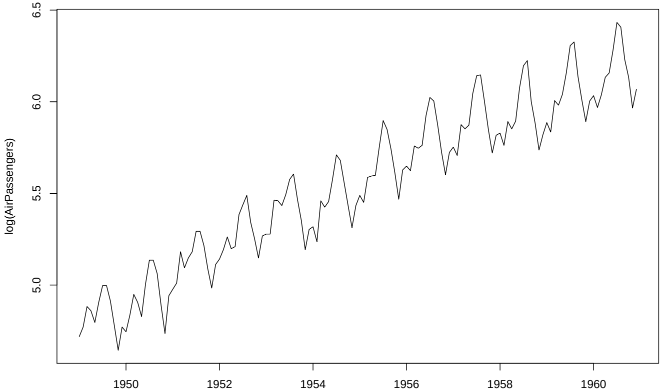
The hourly and monthly concentrations of CO spread over 7 years of data of Hong Kong were analyzed by Lau et al. (2009) using *ARIMA* modeling. Association of hourly concentration of CO with different days of the week was examined. The hourly data of CO was like traffic data. This strong association was proven by SARIMA $(0, 1, 1)\ (0, 1, 1)_{24}$ model.

Liu T, Lau AK, Sandbrink K, Fung JC (2018) Time series forecasting of air quality based on regional numerical modeling in Hong Kong. J Geophysical Res Atmos 123(8):4175–4196

Hľadanie SARIMA modelu pre zadané dáta

Príklad 1: počet cestujúcich

Dokončíme hľadanie SARIMA modelu pre `log(AirPassengers)` (zatiaľ vieme, že dáta budeme diferencovať klasicky aj sezónne, alebo aspoň jedno z týchto diferencovaní):



Príklad 2: ceny kurčiat (z balíka astsa)

Nájdite model pre mesačné ceny kurčiat:

```
plot(chicken)
```