

Autoregresné modely: PACF, určovanie rádu $AR(p)$ modelu

Beáta Stehlíková

Časové rady

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Parciálna autokorelačná funkcia

Základná myšlienka

- ▶ Parciálna autokorelačná funkcia bude slúžiť na odlíšenie AR procesov rôzneho rádu
- ▶ Uvažujme nejaký náhodný proces x_t s nulovou strednou hodnotou a modelujme jeho hodnotu pomocou k predchádzajúcich hodnôt:

$$x_t = \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \cdots + \beta_k x_{t-k} + v_t$$

pričom koeficienty sa určia tak, aby sme dosiahli čo najlepšiu aproximáciu.

- ▶ Budeme to opakovať postupne pre $k = 1, 2, 3, \dots$
- ▶ Ak máme napríklad AR(2) proces, tak koeficienty pri $x_{t-3}, x_{t-4}, \dots$ budú nulové (pomocou x_{t-1}, x_{t-2} získame presne náš proces)

Definícia PACF

- ▶ Označme Φ_{ki} koeficient pri x_{t-i} , ak sme celkovo použili k starších hodnôt procesu.
- ▶ Teda (člen v_t je vždy iný proces)

$$x_t = \Phi_{11}x_{t-1} + v_t$$

$$x_t = \Phi_{21}x_{t-1} + \Phi_{22}x_{t-2} + v_t$$

$$x_t = \Phi_{31}x_{t-1} + \Phi_{32}x_{t-2} + \Phi_{33}x_{t-2} + v_t$$

...

$$x_t = \Phi_{k1}x_{t-1} + \Phi_{k2}x_{t-2} + \dots + \Phi_{kk}x_{t-k} + v_t$$

- ▶ Ak x je AR(p) proces, tak $\Phi_{kk} = 0$ pre $k > p$
- ▶ Koeficient Φ_{kk} sa nazýva **parciálna autokorelácia rádu k**
- ▶ Postupnosť $\Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{33}, \dots$ sa nazýva **parciálna autokorelačná funkcia (PACF)**

Výpočet hodnôt PACF

- Vychádzame z modelu

$$x_t = \Phi_{k1}x_{t-1} + \Phi_{k2}x_{t-2} + \dots + \Phi_{kk}x_{t-k} + v_t$$

- Koeficienty sú optimálne, zabezpečujúce najlepšiu aproximáciu, z čoho vyplýva $\mathbb{E}(x_{t-i}v_t) = 0$ pre $i = 1, \dots, k$
- Rovnakým postupom ako pri odvodení Yule-Wolkerových rovníc dostaneme

$$\rho(1) = \Phi_{k1} + \Phi_{k2}\rho(1) + \dots + \Phi_{kk}\rho(k-1)$$

$$\rho(2) = \Phi_{k1}\rho(1) + \Phi_{k2} + \dots + \Phi_{kk}\rho(k-2)$$

...

$$\rho(k) = \Phi_{k1}\rho(k-1) + \Phi_{k2}\rho(k-2) + \dots + \Phi_{kk}$$

- Sústava lineárnych rovníc s neznámymi $\Phi_{k1}, \Phi_{k2}, \dots, \Phi_{kk}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{k1} \\ \Phi_{k2} \\ \dots \\ \Phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \dots \\ \rho(k) \end{pmatrix}$$

- Zaujíma nás len Φ_{kk}

- Často sa v literatúre stretneme s tvarom získanom pomocou Cramerovho pravidla:

$$\Phi_{kk} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(k) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(k-2) \\ & & \dots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}}$$

Príklad: AR(1) proces

- Postupne počítame:

$$\begin{aligned}\Phi_{11} &= \rho(1) \\ \Phi_{22} &= \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2} = 0\end{aligned}$$

- Nulová hodnota Φ_{22} bola jasná už z definície PACF. Rovnako $\Phi_{kk} = 0$ aj pre $k = 3, 4, \dots$

Výpočet v R-ku

- ▶ Funkcia `ARMAacf`, ktorú sme už používali na výpočet autokorelačnej funkcie
- ▶ Pridaním parametra `pacf = TRUE` (defaultná hodnota je `FALSE`, vtedy sa počíta ACF) sa vypočíta parciálna autokorelačná funkcia
- ▶ Napríklad pre proces $x_t = 0.5x_{t-1} + 0.2x_{t-2} + u_t$:

```
# ACF
```

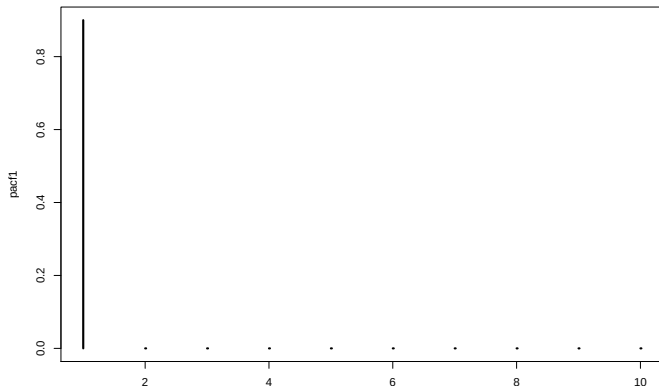
```
ARMAacf(ar = c(0.5, 0.2), lag.max = 10)
```

```
# PACF
```

```
ARMAacf(ar = c(0.5, 0.2), lag.max = 10, pacf = TRUE)
```

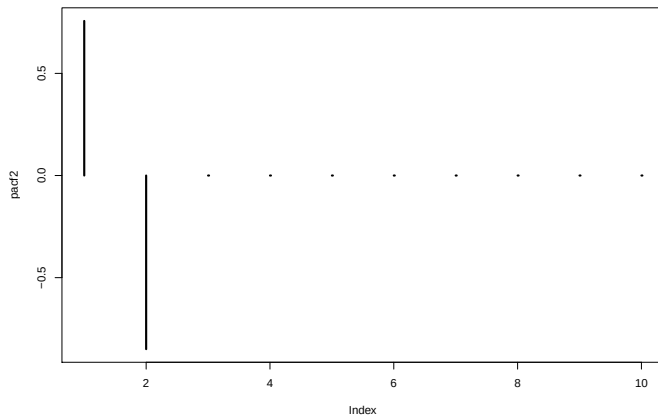
Príklad 1: AR(1) proces

```
pacf1 <- ARMAacf(ar = c(0.9), lag.max = 10, pacf = TRUE)  
plot(pacf1, type = "h", lwd = 3)
```



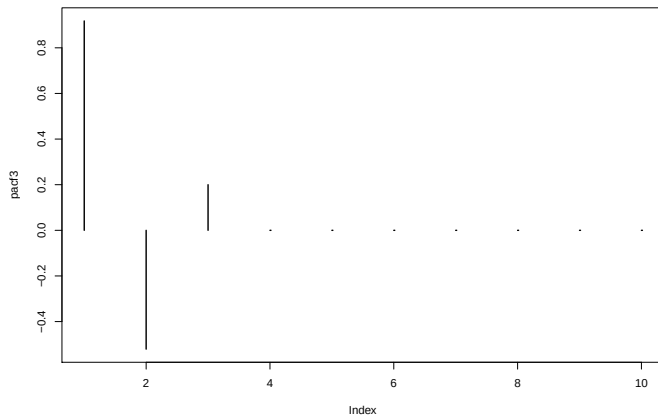
Príklad 2: AR(2) proces

- AR(2) proces $x_t = 1.4x_{t-1} - 0.85x_{t-2} + u_t$



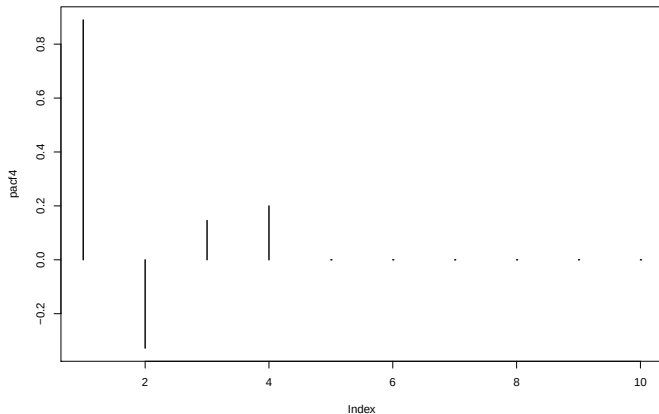
Príklad 3: AR(3) proces

- AR(3) proces $x_t = 1.5x_{t-1} - 0.8x_{t-2} + 0.2x_{t-3} + u_t$



Príklad 4: AR(4) proces

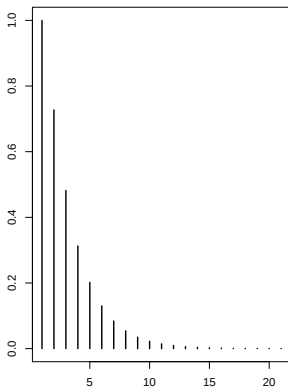
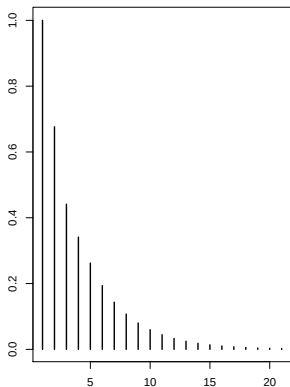
- AR(4) proces $x_t = 1.2x_{t-1} - 0.4x_{t-2} - 0.1x_{t-3} + 0.2x_{t-4}u_t$



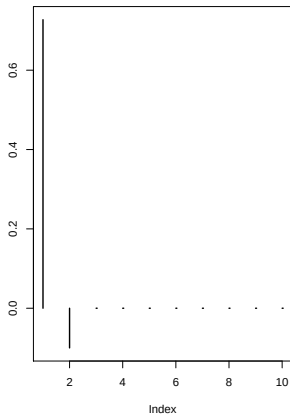
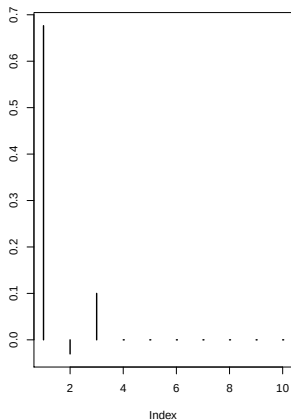
Príklad 5: porovnanie AR(2) a AR(3)

Pripomeňme si:

- ▶ ACF - jedna pre AR(2), druhá pre AR(3) - nevieme ich rozlíšiť



- ▶ Zobrazíme PACF týchto procesov
- ▶ Je jasné, že vľavo je AR(3) a vpravo AR(2)



Odhadovanie PACF z dát

- ▶ Za teoretické autokorelácie v predpise pre PACF dosadíme ich konzistentné odhady $\rightarrow$ dostaneme konzistentný odhad $\hat{\Phi}_{kk}$
- ▶ Pre AR(p) proces je $\Phi_{kk} = 0$ pre $k > p$, pre tieto k asymptoticky platí

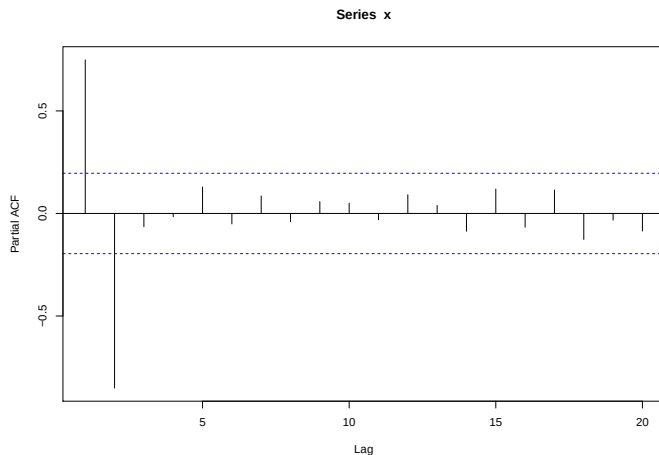
$$\mathbb{D}(\hat{\Phi}_{kk}) \approx \frac{1}{T}$$

- ▶ V R-ku:
 - ▶ funkcia `pacf`
 - ▶ alebo funkcia `acf2` z balíka `astsa`, počíta súčasne ACF aj PACF (vynechá aj lag 0 z ACF a nastaví rovnakú y-ovú os)
- ▶ Vyskúšame pre simulované dáta:

```
set.seed(123)
x <- arima.sim(model = list(ar = c(1.4, -0.85)), n = 100)
```

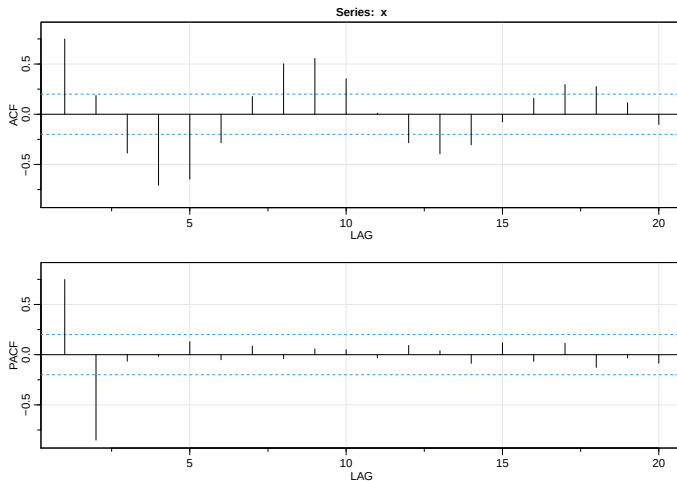
Odhadovanie PACF z dát

`pacf(x)`



Odhadovanie PACF z dát

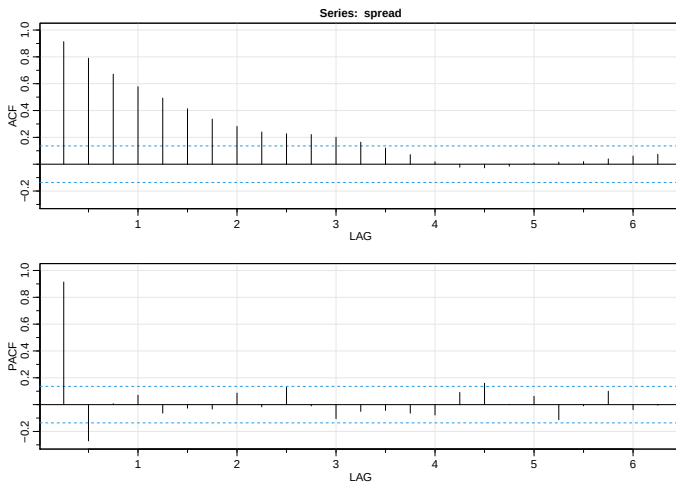
`acf2(x)`



Reálne dáta z predchádzajúcich príkladov,
určenie rádu AR modelu

Príklad 1: spread úrokových mier modelovaný AR(2)

```
acf2(spread)
```



Príklad 2: volebné preferencie a úrokové miery

► Z prechádzajúcich príkladov z učebnice:

- volebné preferencie (vľavo) - AR(1)
- úrokové miery (vpravo) - AR(2)

