

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

APLIKÁCIA METÓDY ZDRUŽENÝCH  
ASYMPTOTICKÝCH ROZVOJOV VO FINANČNEJ  
MATEMATIKE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



**APLIKÁCIA METÓDY ZDRUŽENÝCH  
ASYMPTOTICKÝCH ROZVOJOV VO FINANČNEJ  
MATEMATIKE**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

Študijný program: Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: Doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2016

**Bc. Jozef JANOČKO**



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE


**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Jozef Janočko  
**Študijný program:** ekonomicko-finančná matematika a modelovanie  
(Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický

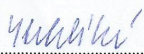
**Názov:** Aplikácia metódy združených asymptotických rozvojev vo finančnej matematike  
*Application of matched asymptotic expansions method in financial mathematics*

**Cieľ:** Metóda združených asymptotických rozvojev je jednou z asymptotických metód, ktoré sa dajú použiť na konštrukciu aproximácie riešenia (okrem iného) parciálnych diferenciálnych rovníc. Cieľom práce je naštudovať a vysvetliť túto metódu najskôr na ilustračných príkladoch a potom ju aplikovať na vybraný problém z finančnej matematiky.

**Vedúci:** RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.  
**Katedra:** FMFLKAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 10.02.2015

**Dátum schválenia:** 11.02.2015  
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

  
.....  
študent

  
.....  
vedúci práce

## Čestné prehlásenie

Čestne vyhlasujem, že som diplomovú prácu s názvom *Aplikácia metódy združených asymptotických rozvojev vo finančnej matematike* vypracoval samostatne pod vedením školiteľa a s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 15.07.2016

.....

## Pod'akovanie

Touto cestou sa chcem poďakovať najprv svojej vedúcej diplomovej práce Doc. RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD, za možnosť zahĺbiť sa do tajov tejto komplikovanej ale i tak krásnej oblasti finančnej matematiky, a za všetky potrebné rady a usmerenia, ktoré mi výrazne pomohli pri písaní tejto práce. Okrem toho z pedagogického zboru ešte zvlášť ďakujem aj Doc. RNDr. Petrovi Gubovi, PhD za odborné rady a poskytnutie viacerých odborných materiálov využitých pri písaní práce. Ďakujem však aj celému pedagogickému zboru a vedeniu fakulty Matematiky, Fyziky a Informatiky za možnosť študovať odbor Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie, ktorej finálnym výstupom je táto diplomová práca.

Ďalej som vďačný mojej rodine a priateľom, ktorý ma pri písaní práce v náročných podmienkach súbežného druhého magisterského štúdia na univerzite vo Viedni realizovaným za účelom prehĺbenia znalostí z finančnej matematiky a štatistiky neustále podporovali a povzbudzovali.

V neposlednom rade však ako veriaci človek svoju vďaku vyjadrujem Bohu, ktorého darom sú moje talenty využité pri písaní tejto diplomovej práce a ktorý mi do cesty poslal všetkých diplomovej práci nápomocných ľudí spomínaných vyššie.

## Abstrakt

JANOČKO, Jozef: Aplikácia metódy združených asymptotických rozvojev vo finančnej matematike [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD, 2016, 93 s.

Predložená diplomová práca sa zaoberá metódou združených asymptotických rozvojev a jej využitím vo finančnej matematike. Jej cieľom je túto metódu vysvetliť, ukázať jej využiteľnosť v praxi na konkrétnych finančných modeloch a získané výsledky využiť na fitovanie a predikovanie cien opcií pomocou reálnych trhových dát. Prvé štyri kapitoly práce sú viac teoreticky ladené, uvádzajú nás do matematického kontextu tejto metódy, a metódu vysvetľujú aplikovaním na riešenie problémov, pričom pomocou nej získavame ich asymptotické aproximácie. Najprv sa rieši jednoduchý problém z oblasti obyčajných diferenciálnych rovníc, potom reálne finančné modely: Black-Scholesov model a jeho zdokonalenie Constant Elasticity of Variance (CEV) model. Pre prvé dva spomínané problémy uvádzame aj explicitné riešenie. Ďalšie dve kapitoly sú praktickejšie ladené. Nami odvodené aproximatívne riešenie CEV modelu porovnávame s explicitným riešením Black-Scholesovho modelu využívajúc fakt, že originálny CEV model by pri vhodných parametroch (parameter  $\gamma = 2$ ) mal byť totožný s Black-Scholesovým modelom. Následne nami odvodené aproximatívne riešenie CEV modelu aplikujeme na fitovanie a predikovanie cien opcií využitím reálnych trhových dát, pričom uvádzame viaceré racionálne zdôvodnené výskumné hypotézy, ktorými chceme posúdiť kvalitu odhadnutých cien. Výsledkom práce je vysvetlenie a využitie metódy združených asymptotických rozvojev na reálnych problémoch z finančnej matematiky a načrtnutie praktického využitia získaných výsledkov na pozorovanie kvality fitovania a predikcie cien opcií využitím reálnych trhových dát. Hoci sa nám viaceré naše výskumné hypotézy nepotvrdili, takéto výsledky zdôvodnili a podali ich ako podnety k ďalšiemu výskumu.

**Kľúčové slová:** Metóda združených asymptotický rozvojev, singulárny perturbačný problém, asymptotická aproximácia, Black-Scholesov model, CEV model

## Abstract

JANOČKO, Jozef: Application of matched asymptotic expansions method in financial mathematics [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics, Supervisor: Doc. RNDr. Beáta Stehlíková, PhD, 2016, 93 p.

The master thesis is concerned with method of matched asymptotic expansions and its application in financial mathematics. The purpose of the thesis is to explain this method, to show its applicability in practice for specific financial models, and obtained results use for fitting and predicting of option prices by means of real market data. First four chapters are theoretically oriented. They introduce the mathematical context of this method, and they explain this method by application on problem solving where we get as a results asymptotic approximations. In the first place the simple problem from area of ordinary differential equations is solved, then real financial models: Black-Scholes model and its improvement Constant Elasticity of Variance (CEV) model. For the first two their explicit solutions are introduced. The subsequent two chapters are practically oriented. Approximative solution of the CEV model is compared to the explicit solution of the Black-Scholes model where we use the fact that for suitable parameters (parameter  $\gamma = 2$ ) the original CEV model and Black-Scholes model should be identical. Then we utilize approximative solution of the CEV model which we derived earlier for fitting and predicting option prices by the means of real market data where we introduce several rationally reasoned research hypotheses by which we want to assess the quality of estimated prices. The result of the thesis is explanation and application of method of matched asymptotic expansions for real problems from area of financial mathematics and sketch practical application of obtained results for assessing the quality of the fitting and the predicting of option prices by the means of real market data. Even though some of our research hypotheses were not confirmed we explained such results and putting them as incentive for further research.

**Keywords:** Method of matched asymptotic expansions, singular perturbation problem, asymptotic approximation, Black-Scholes model, CEV model

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>10</b>
<b>1 Historický a matematický kontext</b>	<b>11</b>
1.1 Historický kontext . . . . .	11
1.2 Perturbačné problémy . . . . .	11
1.2.1 Regulárne Perturbačné problémy . . . . .	12
1.2.2 Singulárne Perturbačné problémy . . . . .	12
1.3 Všeobecný postup . . . . .	13
1.4 Pojmy . . . . .	13
<b>2 Riešenie príkladu z ODR</b>	<b>18</b>
2.1 Rozbor explicitného riešenia . . . . .	18
2.2 Asymptotická aproximácia . . . . .	21
2.2.1 Vonkajšia oblasť . . . . .	21
2.2.2 Vnútoraná oblasť . . . . .	23
2.2.3 Hľadanie rovnováh . . . . .	24
2.2.4 Združenie aproximácií . . . . .	27
2.2.5 Princíp asymptotickej zhody . . . . .	28
2.2.6 Finálna aproximácia . . . . .	30
2.2.7 Grafické znázornenie . . . . .	31
<b>3 Využitie metódy - B-S model</b>	<b>33</b>
3.1 Základné pojmy . . . . .	33
3.2 Explicitné riešenie . . . . .	34
3.2.1 Predpoklady modelu . . . . .	34
3.2.2 Idey odvodenia rovnice . . . . .	35
3.2.3 Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica . . . . .	36
3.2.4 Idey explicitného riešenia Black-Scholesovej rovnice . . . . .	36
3.2.5 Vzorec explicitného riešenia Black-Scholesovej rovnice . . . . .	38
3.2.6 Zavedenie parametra $\Gamma$ . . . . .	38
3.3 Aproximatívne riešenie B-S rovnice . . . . .	39



---

3.3.1	Prvotné úpravy . . . . .	40
3.3.2	Vonkajší problem . . . . .	41
3.3.3	Vonkajše riešenie . . . . .	43
3.3.4	Vnútorňy problém . . . . .	44
3.3.5	Hľadanie rovnováh . . . . .	45
3.3.6	Sformulovaný problém na vnútornej oblasti . . . . .	46
3.3.7	Vnútorňé riešenie . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Využitie metódy - CEV model</b>	<b>49</b>
4.1	Predstavenie modelu . . . . .	49
4.2	Odvedenie rovnice CEV modelu . . . . .	50
4.2.1	CEV parciálna diferenciálna rovnica . . . . .	51
4.3	Aproximatívne riešenie CEV rovnice . . . . .	51
4.3.1	Vonkajší problém . . . . .	52
4.3.2	Vnútorňy problém . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Porovnanie modelov - aproximácia CEV a presný Black-Scholes</b>	<b>55</b>
<b>6</b>	<b>Aplikácia na trhové dáta</b>	<b>61</b>
6.1	Trhové dáta . . . . .	62
6.2	Výskumné hypotézy . . . . .	64
6.3	Jednomaturitné optimalizácie . . . . .	65
6.4	Testovanie jednomaturitných dát . . . . .	66
6.5	Testy a predikcie viacmaturitných dát . . . . .	72
6.6	Zodpovedanie výskumných hypotéz . . . . .	78
	<b>Záver</b>	<b>82</b>
	<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>84</b>
	<b>Príloha A</b>	<b>86</b>
	<b>Príloha B</b>	<b>91</b>

## Úvod

Od doby, kedy v roku 1973 Black, Scholes a Merton odvodili základný, tzv. lognormálny model na oceňovanie finančných derivátov, ubehlo už vyše 40 rokov. Výhodou tohto modelu je explicitný vzorec na riešenie, nevýhodou sú mnohé veľmi silné predpoklady. Za tento čas sa vyvinulo množstvo nových modelov, ktoré sa s rozhodli priblížiť k reálnemu svetu zoslabením predpokladov a výstupom sú zväčša realistickejšie ceny opcií. Ich explicitné riešenie však už nie je také jednoduché a v mnohých prípadoch ani neexistuje. Hoci je možné modely riešiť numericky, je tu snaha hľadať vhodné analytické aproximácie, odhaľujúce zásadné kvalitatívne vlastnosti riešenia.

Naša práca sa zameriava na vysvetlenie a aplikovanie takejto aproximačnej metódy - metódou združených asymptotických rozvojev. Práca je rozdelená na šesť kapitol, pričom prvé štyri majú skôr teoretický a ďalšie dve aplikačný charakter. V prvej kapitole uvádzame historický a matematický kontext - singulárne perturbačné problémy, na ktorých riešenie sa využíva, schematický postup ich riešenia, no aj potrebný teoretický základ z oblasti perturbačnej teórie. V druhej kapitole rozoberáme explicitné riešenie problému z oblasti ODR a následne ho aproximatívne riešime nami skúmanou metódou, pričom toto riešenie podrobne vysvetľujeme. Nakoniec výsledky porovnávame. V ďalších dvoch kapitolách už metódu aplikujeme na základný finančné modely. V úvode tretej kapitoly najprv uvádzame základné pojmy z teórie spojitaj finančnej matematiky, potom predstavujeme Black-Scholesov model, ktorý možno považovať za základný finančný model. Uvádzame explicitné riešenie, opäť hľadáme aproximáciu nami skúmanou metódou a takisto ju aj vysvetľujeme. Vo štvrtej kapitole uvádzame alternatívny finančný model - „Constant elasticity of Variance (CEV) model a získame jeho aproximáciu nami skúmanou metódou. V piatej kapitole využívame istú príbuznosť Black-Scholesovho a CEV modelu pri vhodných parametroch, a pri nich našu CEV aproximáciu vizuálne porovnávame s explicitným riešením Black-Scholesovho modelu. V poslednej kapitole využívame nami odvodené aproximatívne riešenie CEV modelu prakticky a analyzujeme fitovanie a predikcie cien reálnych trhových dát.

Cieľom práce je čitateľovi vysvetliť metódu združených asymptotických rozvojev a ukázať jej využiteľnosť na finančných modeloch - to jednak hľadaním aproximatívneho riešenia niektorých z nich a jednak jeho využitím pri aplikácii na reálne trhové dáta.

# 1 Historický a matematický kontext

## 1.1 Historický kontext

Podľa zdroja [10] sa počiatky tejto metódy datujú do roku 1904, kedy prebehol tretí medzinárodný kongres matematikov v Heidelbergu, na ktorom Ludwig Prandtl hovoril o toku kvapaliny s malým trením. Práve fyzikálne problémy s trením boli motiváciou na vývin tejto teórie, pretože dovedajší aparát takmer neumožňoval rátať s trením kvôli obrovským matematickým komplikáciám spôsobujúcim, že získané výsledky v zložitej forme boli prakticky nepoužiteľné. Prandtlova idea však spočívala v predpoklade, že okrem tenkej vrstvy pri pevnom okraji sa kvapalina pohybuje bez trenia a na väčšinovej oblasti možno toto trenie pri riešení zanedbať. S týmto predpokladom mohli byť v mnohých prípadoch prekonané dovedajšie matematické ťažkosti a odvodené uspokojivé riešenia problémov.

Problémy, kde sa úloha správa inak na malej hraničnej vrstve, nazývame singulárne perturbačné problémy a nimi, respektíve metódou určenou na ich riešenie, sa v práci budeme zaoberať.

## 1.2 Perturbačné problémy

Teraz si zo širšia rozoberieme perturbačnú teóriu, aby sme poukázali na matematický kontext, v ktorom je naša metóda ukotvená.<sup>1</sup> Perturbačná teória sa zaoberá úlohami, v ktorých sa vyskytuje malý parameter - zvyčajne  $\varepsilon$ , pričom chceme zistiť, ako sa úloha správa, keď sa tento malý parameter blíži k nule ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Vyskytujú sa zvyčajne v algebraických a diferenciálnych rovniciach, pričom v našej práci sa budeme zameriavať práve na druhú menovanú oblasť.

Tieto problémy delíme na *Regulárne* a *Singulárne* podľa toho, či sa nám pre  $\varepsilon = 0$  rád riešenej rovnice znižuje. Tak sa deje pri singulárnych perturbačných problémoch a práve na ich riešenie sa využíva metóda združených asymptotických rozvojev.

Na tomto mieste v práci nasledujú krátke popisy a ukážky týchto problémov v ODR.

---

<sup>1</sup>Nasledovný rozbor teórie čerpáme najmä zo zdrojov [5] a [2].

### 1.2.1 Regulárne Perturbačné problémy

Riešia sa spôsobom, že sa najprv vyrieši jednoduchý problém, ktorý vznikne, keď  $\varepsilon = 0$ , nakoľko tento problém je rovnakej povahy, ako perturbovaný problém.<sup>2</sup> Po vyriešení tohto problému sa k riešeniu pridáva perturbačný člen.

Príklad takéhoto problému v ODR:<sup>3</sup>

$$u'' + \varepsilon u' = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq \varepsilon \ll 1$$

$$u(0, \varepsilon) = 0; u(1, \varepsilon) = 1$$

### 1.2.2 Singulárne Perturbačné problémy

Nedajú sa riešiť spôsobom, že sa problém najprv vyrieši pre  $\varepsilon = 0$ , nakoľko tento problém nie je rovnakej povahy, ako perturbovaný problém<sup>4</sup>, preto je potrebné využiť alternatívne metódy riešenia.

---

<sup>2</sup>Ako môžeme vidieť v nasledujúcom príklade - ODR druhého rádu si zachová svoj rád, takže budeme schopní zaistiť splnenie oboch okrajových podmienok.

<sup>3</sup>Nakoľko sa na tomto mieste práce vyskytuje prvá rovnica, je vhodné napísať čosi o spôsobe ich značenia v rámci práce. Značenie rovníc je robené nasledovne:

**Neznačené** - tie rovnice a vzorce ktoré nemajú špeciálny význam a ani sa na ne v práci ďalej neodvolávame.

**ÚX** - zadania úloh (X je nahradené príslušným poradovým číslom).

**RX** - riešenia úloh (X je nahradené príslušným poradovým číslom).

**SRX** - systém rovníc (X je nahradené príslušným poradovým číslom).

**Osobitné** - ak má daná rovnica, vzorec alebo typ rovníc vlastný zaužívaný názov, tak značenie uvádza jeho schematické vyjadrenie, príklad: Black-Scholesová parciálna diferenciálna rovnica má značenie (*B – S PDR*).

<sup>4</sup>Ako môžeme vidieť v nasledujúcom príklade - ODR druhého rádu sa nám zredukuje na ODR prvého rádu, takže pri riešení pre  $\varepsilon = 0$  kvôli nedostatku voľnosti nebudeme schopní zaistiť splnenie oboch okrajových podmienok.

Príklad takéhoto problému v ODR:

$$\varepsilon u'' + u' = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq \varepsilon \ll 1$$

$$u(0, \varepsilon) = 0; u(1, \varepsilon) = 1$$

### 1.3 Všeobecný postup riešenia DR pomocou metódy združených asymptotických aproximácií

Na tomto mieste uvádzame všeobecný, schematický postup, ako riešiť DR metódou, ktorú v práci rozoberáme.<sup>5</sup>

Na aplikáciu tejto metódy je potrebné vykonať štyri kroky:

1. Skonstruuje sa asymptotický rozvoj funkcie na vonkajšej oblasti, zvyčajne v tvare regulárneho radu, a pomocou neho nájdeme asymptotické riešenie na tejto oblasti.
2. Analyzuje sa hraničná vrstva, pre ňu sa tiež nájde asymptotické riešenie pomocou asymptotického rozvoja funkcie, tentoraz nie nutne v tvare regulárneho radu.
3. Využije sa podmienka, že tieto dve riešenia sa musia zhodovať na ich hranici na dourčenie zostávajúcich konštánt.
4. Napokon sa kombináciou týchto riešení vytvorí finálne riešenie. Je to asymptotická aproximácia, teda nie je úplne zhodná s explicitným riešením, no pre akúkoľvek toleranciu viem vypočítať dostatočne veľa členov rozvoja a zvolím  $\varepsilon$  tak, aby bola táto aproximácia dostatočne presná.<sup>6</sup>

### 1.4 Základné pojmy perturbačnej teórie

V tejto teórii sa vyskytuje viacero pojmov, ktoré chceme neskôr počas práce používať bez ďalšieho vysvetlenia, preto ich podrobne rozoberieme v tejto časti. Tieto definície sledujú vysvetlenia týchto pojmov z [13, s. 2-9], pokiaľ nie je pri danom pojme explicitne uvedené inak.

<sup>5</sup>Kombinujeme popis postupov zo zdrojov [5, 2].

<sup>6</sup>Táto posledná veta sa v zdrojoch nevyskytuje, vychádza však z našej skúsenosti z riešenia úloh.

**Definícia 1.1** (Taylorov rozvoj).

Nech je funkcia  $f(x)$  nekonečne diferencovateľná v bode  $x = x_0$ , potom ju môžeme vyjadriť vo forme nekonečného mocninového radu výrazu  $(x - x_0)$ , a to nasledovne:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

kde

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad n \in \mathbb{N}_0$$

**Definícia 1.2** (Funkcie miery<sup>7</sup>).

Nech je daná premenná  $\varepsilon > 0$ . Predpokladajme, že pre funkciu  $f(\varepsilon)$  existuje limita v bode  $\varepsilon = 0$ <sup>8</sup>, potom nastáva jeden z troch nasledovných prípadov:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |f(\varepsilon)| = \begin{cases} 0 \\ A, & 0 < A < \infty \\ \infty \end{cases}$$

Za účelom špecifikovania rýchlosti, akou funkcia  $|f(\varepsilon)|$  konverguje k nule alebo diverguje do nekonečna, porovnávame túto rýchlosť s rýchlosťami známych funkcií, ktoré tiež konvergujú k nule, respektíve divergujú do nekonečna - tie za týmto účelom nazývame funkcie miery. Triedu takýchto funkcií zvyčajne označujeme  $\delta(\varepsilon)$ . Jednotlivých členov tejto triedy označujeme  $\delta_n(\varepsilon)$   $n \in \mathbb{N}_0$ .<sup>9</sup>

Najjednoduchšie triedy funkcií mier sú:

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2 \dots$$

$$\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-3} \dots$$

pričom jednotlivé funkcie ako členy daných tried pre  $\varepsilon$  blízke 0 spĺňajú nerovnosti:

$$1 > \varepsilon > \varepsilon^2 > \dots$$

$$\varepsilon^{-1} < \varepsilon^{-2} < \varepsilon^{-3} < \dots$$

<sup>7</sup>z AJ originálu „Gauge functions“, kvôli jednoduchosti pojmu sme si zvolili tento preklad, miera tu spomenutá však nemá nič spoločné s teóriou miery vo všeobecnosti.

<sup>8</sup>Napríklad funkcia  $\sin(\frac{1}{\varepsilon})$  to nespĺňa

<sup>9</sup>Symbolom  $\delta$ , respektíve  $\delta(\varepsilon)$ , označujeme aj reprezentanta triedy funkcie miery  $\delta_1(\varepsilon)$ . Pre prvú triedu funkcií mier z nadchádzajúcej poznámky dostávame  $\delta = \delta_1(\varepsilon) = \varepsilon^1 = \varepsilon$ .

Teda možno vidieť, že prvú triedu funkcií - celočíselné kladné mocniny  $\varepsilon$ , možno používať na odhad rýchlosti konvergenzie funkcie  $f(\varepsilon)$  k nule a druhá zasa vzhľadom na divergenciu do  $\pm\infty$ .

*Poznámka:* Pokiaľ by sme chceli, aby sa rýchlosť konvergenzie presne rovnala rýchlosti konvergenzie niektorej funkcie miery  $\delta_n(\varepsilon)$   $n \in \mathbb{N}_0$  z danej triedy funkcií miery  $\delta(\varepsilon)$ , tak musí platiť<sup>10</sup>:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)} = A, \quad A \in \mathbb{R} \setminus 0$$

**Definícia 1.3** ( $O(\varepsilon)$  = Rád funkcie vzhľadom na  $\varepsilon$ ).

Majme  $f(\varepsilon)$  a  $g(\varepsilon)$  definované na nejakom okolí bodu  $\varepsilon = 0$ . Píšeme

$$f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon)) \quad \text{pri } \varepsilon \rightarrow 0$$

ak existuje taká kladná konštanta  $M$ , že platí

$$|f(\varepsilon)| \leq M|g(\varepsilon)| \quad , \quad \text{ekvivalentne, že výraz } \left| \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right| \text{ je ohraničený.}$$

pre všetky  $\varepsilon$  z nejakého okolia bodu  $\varepsilon = 0$ .

*Poznámka:* Podľa zdroja [6, str. 5] možno pre  $g(\varepsilon) \neq 0$  na okolí bodu  $\varepsilon = 0$  túto definíciu prepísať nasledovne

Ak

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = L,$$

kde  $-\infty < L < \infty$ , potom  $f = O(\varepsilon)$  pri  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Definícia 1.4** ( $o(\varepsilon)$  = funkcia je dominovaná druhou vzhľadom na  $\varepsilon$ ).

Majme  $f(\varepsilon)$  a  $g(\varepsilon)$  definované na nejakom okolí bodu  $\varepsilon = 0$ . Píšeme

$$f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \quad \text{pri } \varepsilon \rightarrow 0$$

ak

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right| = 0$$

---

<sup>10</sup>analogicky s divergenciou

*Poznámka:* Laicky teda môžeme tieto dva pojmy -  $o(g(\varepsilon))$  a  $O(g(\varepsilon))$  rozlíšiť tak, že prvý je limita spomenutá v jeho definícii vždy nula, no pre druhý by mohla táto limita vyjsť nenulová a konečná. V takom prípade vravíme, že funkcie  $f$  a  $g$  sú rovnakého rádu vzhľadom na  $\varepsilon$ .

Zdroj [6] však upozorňuje, že termín  $O(f(\varepsilon)) = O(g(\varepsilon))$ <sup>11</sup> má dvojaké využitie, okrem toho, ktorý bol zadefinovaný vyššie v práci, ním aj označujeme fakt, že daná funkcia má presne rovnaký rád ako druhá funkcia, teda formálne (podľa predošlých definícií)  $f(\varepsilon) \in O(g(\varepsilon))$  ale zároveň  $f(\varepsilon) \notin o(g(\varepsilon))$ .

Tu si môžeme aj uvedomiť význam funkcií miery - určujú, akou rýchlosťou funkcia konverguje, resp. diverguje a za určitých okolností (spomenutých v jednej z predchádzajúcich poznámok) nám presne určia rád funkcie vzhľadom na  $\varepsilon$ .

**Definícia 1.5** (Asymptotická aproximácia).<sup>12</sup>

*Nech sú dané funkcie  $f(\varepsilon)$  a  $\phi(\varepsilon)$ . Vravíme, že  $\phi(\varepsilon)$  je asymptotickou aproximáciou funkcie  $f(\varepsilon)$  pri  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ak  $f = \phi + o(\phi)$  pri  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Píšeme  $f \sim \phi$  pri  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

**Definícia 1.6** (Asymptotická postupnosť).

*Postupnosť  $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$  nazývame asymptotickou postupnosťou, ak platí*

$$\phi_{n+1}(\varepsilon) = o(\phi_n(\varepsilon)) \quad \text{pri } \varepsilon \rightarrow 0.$$

**Definícia 1.7** (Asymptotický rozvoj).<sup>13</sup>

*Ak  $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$  je asymptotická postupnosť, potom má  $f(\varepsilon)$  asymptotický rozvoj do  $n$  členov vzhľadom na túto postupnosť, práve vtedy keď*

$$f = \sum_{k=1}^m a_k \phi_k + o(\phi_m) \quad \text{pri } \varepsilon \rightarrow 0.$$

*Poznámka:* V zdroji [6] sa funkcie použité v tomto rozvoji definujú ako funkcie miery, ktoré sme si v práci zadefinovali alternatívne, čerpajúc zo zdroja [13].

Okrem toho môžeme všeobecne podotknúť, že doteraz zmienené definície sa dajú priamočiaro aplikovať na funkcie viacerých premenných, nakoľko stále vyžadujeme splnenie iba jednorozmerných limít vzhľadom na  $\varepsilon$ , s postačuje, aby doteraz spomenuté konštanty boli konštantami iba vzhľadom na premennú  $\varepsilon$ .

<sup>11</sup>Alebo ekvivalentne popisom, že funkcia  $f$  je rovnakého rádu vzhľadom na  $\varepsilon$  ako funkcia  $g$ .

<sup>12</sup>Táto definícia je podľa [6, str. 8]

<sup>13</sup>Táto definícia je podľa [6, str. 10]



Podľa zdroja [17, s. 31], s miernou úpravou pre účely práce, ešte zdefinujeme regulárny rad, ako asymptotický rozvoj, kde za  $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$  vystupujú funkcie miery  $\delta_n(\varepsilon)$ , ktoré sú mocniny  $\varepsilon$  teda napríklad  $\delta_n(\varepsilon) = \{\varepsilon^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ , ale okrem toho ešte aj  $\delta_n(\varepsilon) = \{\varepsilon^{(n-1)+\nu}\}_{n=1}^{\infty}$   $\nu \in \mathbf{R}$ . Teda pre funkciu  $\psi(\varepsilon, x)$  a  $\nu = 0$  tento rozvoj vyzerá nasledovne:

$$\psi(\varepsilon, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(x) \quad (\text{reg. rad})$$

## 2 Riešenie príkladu z ODR

Hlavným zdrojom tejto kapitoly je pre nás zdroj [5]. Nadväzujeme v nej na úvodnú kapitolu tým, že v nej najprv explicitne a neskôr aproximatívne využitím metódy združených asymptotických rozvojev riešime ukázkový singulárny perturbačný problém z časti 1.2.2, teda sa jedná o úlohu v znení:

$$\varepsilon u'' + u' = \frac{1}{2} \quad \text{Ú1}$$

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq \varepsilon \ll 1$$

$$u(0; \varepsilon) = 0; u(1; \varepsilon) = 1$$

### 2.1 Rozbor explicitného riešenia signulárneho perturbačného problému

Na lepšie predstavenie problematiky sme sa rozhodli uviesť explicitné riešenie a ukázať, ako sa správa pre  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pričom pri tejto ukážke uvedieme niektoré ďalšie pojmy perturbačnej teórie<sup>14</sup>.

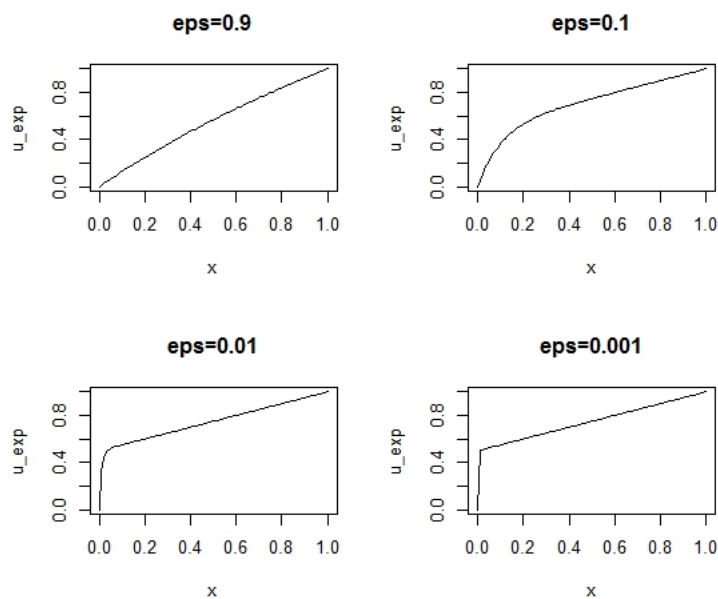
Riešenie vyzerá nasledovne:

$$u = -\frac{1}{2(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}})} e^{-\frac{1}{\varepsilon}x} + \frac{1}{2(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}})} + \frac{1}{2}x \quad \text{R0}$$

Pre  $\varepsilon = 0$  môžeme vidieť, že riešenie sa nám redukuje na riešenie triviálneho systému  $u' = \frac{1}{2}$ , a že toto však nekorešponduje s povahou riešenia pre  $\varepsilon$  blízko nule, nakoľko pre nenulovú hodnotu tohto parametra ešte stále máme ODR druhého rádu a sme schopní splniť obe okrajové podmienky. Predsa len sa však pre malé  $\varepsilon$  bude riešenie na väčšinom intervale správať ako riešenie spomínaného triviálneho systému, ako budeme môcť vidieť na obrázku na strane 19 hore.<sup>15</sup>

<sup>14</sup>Aj tieto čerpáme zo zdroja [5], samotný výpočet sa dá urobiť podľa klasických postupov v zdrojoch [3, 9].

<sup>15</sup>Tie obrázky, pri ktorých v práci neprikladáme zdroj v ich popise, sme vytvorili sami pomocou štatistického programovacieho jazyka R v programe R studio. Zväčša sú však inšpirované podobnými obrázkami nachádzajúcimi sa v hlavných zdrojoch daných kapitôl, v prípade tejto kapitoly teda zdrojom [5].



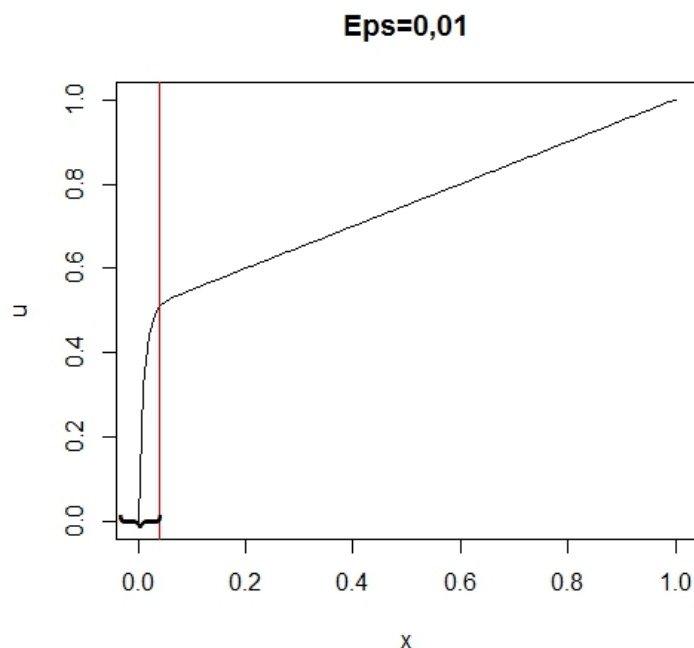
**Obr. 1:** Správanie riešenia pre meniace sa  $\epsilon$ .

Môžeme si všimnúť, že pri  $\epsilon \rightarrow 0$  sa nám riešenie stále viac diferencuje na dve podoblasti, až sa napokon pre veľmi malé  $\epsilon$  javí nehladké, čo je však len dôsledok nedostatočnej precíznosti vykresľovania. Metóda združených asymptotických rozvojev je založená na myšlienke nájsť riešenie pre každú z týchto podoblastí zvlášť a potom ich vhodne prepojiť. Za účelom vysvetlenia tejto idey si rozoberieme podrobnejšie tretí obrázok (tj. pre  $\epsilon = 0,01$ ), je zobrazený zvlášť na strane 20 hore.

Ako si na ňom môžeme všimnúť, funkcia sa správa rozdielne na dvoch oblastiach vzhľadom na definičný obor premennej  $x$  - pre  $x$  blízke nule a pre  $x$  ďalej od nuly, tieto oblasti sme si približne rozdelili červenou čiarou, hoci v skutočnosti plynule prechádzajú jedna do druhej.

Oblasť napravo by zodpovedala riešeniu, keby sme  $\epsilon$  poslali do nuly a riešili tento problém ODR. Nazýva sa *vonkajšia oblasť* a na nej má člen v rovnici obsahujúci druhú deriváciu násobenú malým parametrom  $\epsilon$  malú, ba priam zanedbateľnú váhu. Dalo by sa povedať, že riešenie na tejto oblasti nezávisí od  $\epsilon$ , formálne môžeme písať  $x \in O(\epsilon^0) \Leftrightarrow x \in O(1)$ . Interpretačne, podľa spomínaného príkladu toku kvapaliny s nízkym trením, by sa jednalo o oblasť, kde možno toto malé trenie zanedbať.

Oblasť naľavo, označená aj svorkou, sa zvykne nazývať *vnútorná oblasť* alebo *hraničná vrstva*. V tejto oblasti nám riešenie zjavne závisí od člena obsahujúceho druhú



**Obr. 2:** Rozdielne správanie funkcie na dvoch oblastiach.

deriváciu, nakoľko na tomto úseku riešenia „dobieha“ do druhej okrajovej podmienky, ktorú by ODR prvého rádu vo všeobecnosti nemohla splniť (za predpokladu, že už spĺňa okrajovú podmienku na druhom konci). Ako uvidíme neskôr, na tejto oblasti nám riešenie závisí od  $\varepsilon$ , člen s ním už nemožno nijakým spôsobom zanedbať a v riešení sa prejaví tak, že vyjadríme  $x$  ako funkciu od  $\varepsilon$ , formálne môžeme písať  $x \in O(\varepsilon^1) \Leftrightarrow x \in O(\varepsilon)$ . Interpretáčne, podľa spomínaného príkladu toku kvapaliny s nízkym trením, by sa jednalo o oblasť, kde toto trenie, hoci malé, nemožno zanedbať.

Tento rozklad riešenia na dve podoblasti nazývame *Asymptotická dekompozícia oblasti  $x$* , nakoľko tieto oblasti nemožno exaktne rozdeliť a samostatné riešenie na každej oblasti je iba asymptotické, pričom je tým menej presné, čím viac sa blíži ku kraju v ktorom susedí s druhou oblasťou. Kvôli tomu sa samostatné riešenia na jednotlivých oblastiach nepovažujú za konečné riešenie, ale až ich vhodné prepojenie. A rovnako tak sa tieto oblasti niekedy zvyknú nazývať aj *asymptotická vnútorná oblasť* a *asymptotická vonkajšia oblasť*.

## 2.2 Asymptoticky aproximatívne riešenie singulárneho perturbáčného problému.

V tejto časti kapitoly spomenutý problém ODR aproximatívne vyriešime pomocou metódy združených asymptotických rozvojev. Podrobne vykonáme štyri kroky načrtnuté v predošlej kapitole - sekcia 1.3, a pri každom z nich si vysvetlíme potrebnú teóriu.

### 2.2.1 Asymptotické riešenie na vonkajšej oblasti

Na tejto oblasti platí že  $x \in O(1)$ <sup>16</sup> pre  $\varepsilon \rightarrow 0$ , teda zodpovedá oblasti, kde  $x$  nezávisí od  $\varepsilon$ . Predpokladáme riešenie v tvare regulárneho radu<sup>17</sup>:

$$u^o(x; \varepsilon) \stackrel{!}{=} u_0^o(x)\varepsilon^0 + u_1^o(x)\varepsilon^1 + u_2^o(x)\varepsilon^2 + \dots$$

Kde horný index „O“ označuje riešenie na vonkajšej oblasti<sup>18</sup> a dolný index „i“ funkcií  $u_i$  značí funkciu od  $x$ , ktorá násobí  $\varepsilon^i$  v tomto rozvoji. Funkcie  $u_i^o$  sú neznáme, ktoré chceme nájsť.

Nájdeme prvú a druhú deriváciu tejto funkcie  $u^o(x; \varepsilon)$  podľa  $x$  (využívame, že derivácia súčtu sa rovná súčtu derivácií):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(u^o(x; \varepsilon)) &= \frac{d}{dx}(u_0^o(x)\varepsilon^0 + u_1^o(x)\varepsilon^1 + u_2^o(x)\varepsilon^2 + \dots) = \\ &= u_0^{o'}(x) + u_1^{o'}(x)\varepsilon^1 + u_2^{o'}(x)\varepsilon^2 + \dots \\ \frac{d^2}{dx^2}(u^o(x; \varepsilon)) &= \frac{d^2}{dx^2}(u_0^o(x)\varepsilon^0 + u_1^o(x)\varepsilon^1 + u_2^o(x)\varepsilon^2 + \dots) = \\ &= u_0^{o''}(x) + u_1^{o''}(x)\varepsilon^1 + u_2^{o''}(x)\varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

Následne derivácie dosadíme do rovnice (Ú1) a dostaneme nekonečný systém diferenciálnych rovníc (hraničné podmienky nespomíname zámerne, lebo o nich píšeme podrobne neskôr):

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^0) : \quad & u_0^{o'} = \frac{1}{2} \\ O(\varepsilon^1) : \quad & u_0^{o''} + u_1^{o'} = 0 \quad \rightarrow u_1^{o'} = u_0^{o''} \\ O(\varepsilon^2) : \quad & u_1^{o''} + u_2^{o'} = 0 \quad \rightarrow u_2^{o'} = u_1^{o''} \\ & \vdots \end{aligned} \tag{SR1}$$

<sup>16</sup>pre lepšiu názornosť by sme mohli písať aj  $x \in O(\varepsilon^0)$

<sup>17</sup>Definícia na strane 17.

<sup>18</sup>Z anglického „Outer“.

Môžeme si všimnúť, že pre problém rádu  $O(\varepsilon^0)$ , dostávame ODR o stupeň nižšieho rádu než v pôvodnom probléme ( $\dot{U}1$ ) (v rámci klasifikácie lineárnych ODR, teda  $u'' \rightarrow u'$ ), čo je prejav singularnosti problému. To sedí s charakterizáciou vonkajšej oblasti, ktorú práve vyšetrujeme, tu je funkcia  $u'$  výrazná,  $u''$  nie, nakoľko na tejto oblasti môžeme vplyv člena násobeného malým parametrom  $\varepsilon$  zanedbať. To sa dá prirovnať k faktu, akoby sme pôvodnú rovnicu riešili pre  $\varepsilon = 0$  kde by sme dostali rovnicu  $u' = \frac{1}{2}$ .

Teraz sa vyjadríme k hraničným podmienkam. Nakoľko vonkajšia oblasť susedí s pravým krajom intervalu, na ktorom je naša úloha definovaná, je racionálne požadovať, funkcia  $u^o(x; \varepsilon)$  spĺňala túto okrajovú podmienku, teda pre  $x = 1$ :  $u^o(1; \varepsilon) \stackrel{!}{=} 1$ .

Pokiaľ si pravú stranu poslednej rovnosti prepíšeme v tvare rozvoja mocnín  $\varepsilon$  ako  $1 = 1 \times \varepsilon^0 + 0 \times \varepsilon^1 + \dots$  dostaneme pre rovnice zo systému ( $SR1$ ) nasledujúce okrajové podmienky:

$$\begin{aligned} x = 1 : \quad u_0^o(1) &= 1 \\ u_1^o(1) &= 0 \\ u_2^o(1) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dostávame teda síce nekonečný systém diferenciálnych rovníc, tento systém však vieme zredukovať na postupné riešenie série obyčajných diferenciálnych rovníc - najprv nájdeme  $u_0^o$  vďaka prvej rovnici a príslúchajúcej okrajovej podmienke, potom túto známou funkciu dosadíme do druhej rovnice a získame ODR pre  $u_1^o$  a tak ďalej.

Tieto rovnice sú triviálne, dali by sa riešiť napríklad z využitím poznatkov z [3, 9], preto tieto kroky ich riešenia v práci vynechávame a uvádzame rovno výsledky:

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^0) : \quad u_0^o(x) &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ O(\varepsilon^1) : \quad u_1^o(x) &= 0 \\ O(\varepsilon^2) : \quad u_2^o(x) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vidíme, že v riešení neostávajú žiadne nedourčené konštanty.<sup>19</sup>

<sup>19</sup>Význam tohto pozorovania práca odhaľuje neskôr, keď nám pri riešení úlohy na vnútornej oblasti ostanú nedourčené konštanty a budeme sa s tým musieť vysporiadať.

### 2.2.2 Asymptotické riešenie na vnútornej oblasti

Vo vnútornej oblasti chceme zohľadniť význam člena z pôvodnej rovnice ( $\check{U}1$ ), ktorý je násobený malým parametrom  $\varepsilon$ , a tým je  $u''$ . Ako sme si mohli všimnúť na obrázku 1, šírka tejto oblasti sa znižuje pre  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Bolo by teda vhodné nájsť nejakú inú parametrizáciu úlohy na tejto oblasti, aby sme ju dokázali vyšetovať bez ohľadu na výber parametra  $\varepsilon$ . To docielime predpokladom, že je riešenie na tejto oblasti je závislé od parametra  $\varepsilon$  a túto závislosť vyjadríme tak, že samotnú premennú  $x$  vyjadríme ako funkciu od  $\varepsilon$  vynásobenú novou nezávislou premennou na tejto oblasti, ktorú nazveme  $\xi$ . Potom môžeme definovať funkciu  $u^t$ , ktorá popisuje rôzne parametrizácie funkcie  $u$  na rôznych oblastiach definičného oboru, nie ako funkciu od  $x$ , ale ako funkciu od novej, preškálovanej, premennej  $\xi$ , teda  $u^t = u^t(\xi; \varepsilon)$ .

Premenná  $x$  sa teda stane funkciou a bude mať tvar:

$$\begin{array}{l} x = \delta(\varepsilon)\xi \\ \text{kde} \quad \xi = O(1) \quad \text{pri} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{array}$$

Funkciu  $\delta(\varepsilon)$  nazývame miera hrúbky hraničnej vrstvy, nakoľko je pre dané  $\varepsilon$  fixná a skutočne zodpovedá hrúbke danej oblasti, pre vhodne zvolenú funkciu práve hrúbke hraničnej vrstvy. Vyjadruje aj vzťah medzi pôvodnou premennou  $x$  a transformovanou premennou  $\xi$ .

Neskôr, pomocou vhodného dourčenia konkrétneho tvaru funkcie  $\delta$ , bude jednoznačne dourčená transformácia, ktorá zodpovedá vyšetovaniu problému na vnútornej oblasti,<sup>20</sup> takto dourčenú funkciu  $u^t$  budeme potom označovať  $u^I$ .<sup>21</sup>

Potom bude dourčená funkcia  $\delta$  takisto zodpovedať reprezentantovi triedy funkcií miery. Bude to funkcia, ktorej mocniny budeme používať na asymptotický rozvoj funkcie na vnútornej oblasti.

Ďalej pomocou pravidla na derivovanie zloženej funkcie  $u^t(\xi; \varepsilon) = u^t(\frac{x}{\delta}, \varepsilon) \stackrel{!}{=} u^o(x; \varepsilon)$

<sup>20</sup>Tomu sa venujeme v podkapitole 2.2.3

<sup>21</sup>Kde horný index  $I$  zodpovedá anglickému „inner“.

odvodíme, v akom tvare dosadiť túto funkciu do rovnice pôvodnej úlohy (Ú1):<sup>22</sup>

$$u^{o'} = \frac{d u^o}{d x} = \frac{d u^t}{d \xi} \frac{d \xi}{d x} = \frac{d u^t}{d \xi} \frac{1}{\delta}$$

$$u^{o''} = \frac{d^2 u^o}{d x^2} = \frac{d}{d x} \left( \frac{d u^o}{d x} \right) = \frac{d}{d x} \left( \frac{d u^t}{d \xi} \frac{1}{\delta} \right) = \frac{d^2 u^t}{d \xi^2} \frac{1}{\delta^2}$$

Teraz vložíme tieto substitučné výrazy za  $u'$  a  $u''$  do pôvodnej úlohy (Ú1)<sup>23</sup> a vykonáme elementárne úpravy:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \frac{d^2 u^t}{d \xi^2} + \frac{1}{\delta} \frac{d u^t}{d \xi} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2 u^t}{d \xi^2} + \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{d u^t}{d \xi} = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\varepsilon}$$

Uvádžeme ešte skrátenejší zápis:

$$u^{t''} + \frac{\delta}{\varepsilon} u^{t'} = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\varepsilon} \quad \text{Ú2}$$

Vidíme však, že riešenie tejto rovnice je potenciálne nekonečne veľa v závislosti od voľby funkcie  $\delta(\varepsilon)$ . Otázkou je teda, ako túto funkciu vhodne špecifikovať.

### 2.2.3 Hľadanie rovnováh

Pre vhodne zvolenú funkciu  $\delta(\varepsilon)$  môžeme pre  $\varepsilon \rightarrow 0$  dosiahnuť stav, že dva členy z rovnice úlohy (Ú2) budú rovnakého a zároveň menšieho rádu vzhľadom na  $\varepsilon$  než tretí člen a ten budeme môcť pre veľmi malé  $\varepsilon$  zanedbať. V takom prípade hovoríme, že tieto dva členy rovnovážne dominujú na tretím členom. Budeme hľadať všetky tri možné kombinácie takýchto rovnováh a pri každej si vysvetlíme, čo pre nás znamená.

#### *Rovnováha druhého a tretieho členu*

Teraz chceme zvoliť funkciu  $\delta(\varepsilon)$ , aby druhý a tretí člen rovnovážne dominovali nad tretím členom. Chceme teda, aby ich koeficienty závislé na  $\varepsilon$  boli rovnakého rádu, nakoľko samotná funkcia  $u^t$  od  $\varepsilon$  nezávisí:

$$\frac{\delta}{\varepsilon} \sim \frac{\delta^2}{\varepsilon}$$

<sup>22</sup>Nakoľko pri tomto odvodzovaní nezavazujeme závislosť funkcie  $\delta(\varepsilon)$  od  $\varepsilon$  a vystupuje ako konštanta, budeme ju v tomto odvodzovaní a v následnom dosadzovaní označovať skrátene ako  $\delta$

<sup>23</sup>Tá je v pôvodnom znení ekvivalentná s úlohou riešenou na vonkajšej oblasti



Obe strany vynásobím  $\frac{\varepsilon}{\delta}$

$$\delta \sim 1$$

Po dosadení do rovnice (Ú2) a do predpisu transformácie premennej  $x$  však dostávame:

$$u^{t''} + \frac{1}{\varepsilon} u^{t'} = \frac{1}{2\varepsilon}$$

Kde po vynásobení oboch strán rovnice dostaneme presne rovnicu pôvodnej úlohy (Ú1), pretože  $x = \delta\xi = \xi$ , z čoho ľahko odvodíme  $u^t \equiv u^o$  pri  $\delta = 1$ . Táto „žiadna transformácia“ pôvodnej rovnice teda zodpovedá riešeniu na vonkajšej oblasti, ktoré sme už analyzovali predtým.

#### *Rovnováha prvého a tretieho členu*

Zdôvodnenie toho, čo robíme je obdobné so zdôvodnením pri hľadaní prvej rovnováhy, priamo teda prejdeme na hľadanie funkcie  $\delta(\varepsilon)$ :

$$1 \sim \frac{\delta^2}{\varepsilon}$$

Z čoho po pre násobení oboch strán  $\varepsilon$  a ich následnom odmocnení dostanem

$$\delta \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

Po dosadení tejto formy funkcie  $\delta$  do rovnice úlohy (Ú2) dostávame:

$$\underbrace{u^{t''}}_{O(1)} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} u^{t'}}_{O(\varepsilon^{-1/2})} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{O(1)}$$

A teda vidíme, že pre  $\varepsilon \rightarrow 0$  je dominantný druhý člen nad prvým a tretím, čo je v rozpore s predpokladom, ktorý sme si stanovili pri hľadaní rovnováh.

#### *Rovnováha prvého a druhého členu*

Znova zobrazujeme už len hľadanie  $\delta(\varepsilon)$  cez zrovnanie rádu koeficientov týchto členov vzhľadom na  $\varepsilon$ :

$$1 \sim \frac{\delta}{\varepsilon}$$

$$\delta(\varepsilon) \sim \varepsilon$$

Po dosadení tejto formy funkcie  $\delta$  do rovnice úlohy (Ú2) dostávame:

$$\underbrace{u^{t''}}_{O(1)} + \underbrace{u^{t'}}_{O(1)} = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon}_{O(\varepsilon)}$$

Tento výber nie je v rozpore z predpokladom rovnovážnej dominantnosti vyšetovaných dvoch členov nad tretím a navyše nám interpretačne zohľadňuje význam prvého člena z pôvodnej úlohy, preto nám práve rovnica pre takto zvolené  $\delta$  reprezentuje problém na vnútornej oblasti. Teda pre  $\delta = \varepsilon$  platí  $u^I \equiv u^t$  a problém na vnútornej oblasti vyzerá nasledovne:

$$u^{I''} + u^{I'} = \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{Ú3}$$

### Hľadanie riešenia v tvare regulárneho radu

Nakoľko nám  $\delta$  - reprezentatívna funkcia triedy funkcií miery - vyšla cez hľadanie rovnováh ekvivalentná  $\varepsilon^1$ , môžeme znova hľadať riešenie v tvare regulárneho radu a teda návrh riešenia môže vyzerat' obdobne ako na vonkajšej oblasti a síce:

$$u^I(\xi; \varepsilon) \stackrel{!}{=} u_0^I(\xi)\varepsilon^0 + u_1^I(\xi)\varepsilon^1 + u_2^I(\xi)\varepsilon^2 + \dots$$

Kde  $u_i^I(\xi)$  pre  $i = 0, 1, \dots$  sú neznáme funkcie, ktoré chceme dourčiť.

Analogicky ako v stati 2.2.1 by sme mohli tento rozvoj člen po člene derivovať jeden, respektíve dva razy a tie dosadiť do rovnice (Ú3), odkiaľ, využijúc fakt, že táto ODR musí byť plnená pre členy obsahujúce rôzne koeficienty vzhľadom na  $O(\varepsilon)$  zvlášť, dostaneme nasledovný systém rovníc :

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^0) : \quad u_0^{I''} + u_0^{I'} &= 0 \\ O(\varepsilon^1) : \quad u_1^{I''} + u_1^{I'} &= \frac{1}{2} \\ O(\varepsilon^2) : \quad u_2^{I''} + u_2^{I'} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad \text{SR2}$$

Hraničnú podmienku pre  $u(x; \varepsilon)$  z pôvodnej úlohy prináležiacu  $x = 0$  vieme na tejto oblasti pretransformovať na podmienku pre  $u^I(\xi; \varepsilon)$  prináležiacu  $\xi = 0$ , nakoľko  $x = \varepsilon \xi$  a  $\varepsilon$  sa z povahy riešenej úlohy nerovná nule. Teda  $u^I(0; \varepsilon) \stackrel{!}{=} 0$ , z čoho rozvojom vzhľadom na  $\varepsilon$  dostaneme pre systém (SR2) nasledovné okrajové podmienky:

$$\begin{aligned} u_0^I(0) &= 0 \\ u_1^I(0) &= 0 \end{aligned}$$

⋮

Nakoľko samotné riešenie je triviálne, pretože každá rovnica v systéme obsahuje iba derivácie jednej funkcie, dá sa jednoducho nájsť klasickými metódami riešenia ODR spomenutými napríklad v [3, 9]; sem uvádzame priamo výsledok:

$$\begin{aligned}
 O(\varepsilon^0) : \quad u_0^I &= \beta_0(1 - e^{-\xi}) \\
 O(\varepsilon^1) : \quad u_1^I &= \underbrace{\frac{1}{2}\xi}_{\text{Partikulárne riešenie}} + \underbrace{\beta_1(1 - e^{-\xi})}_{\text{Všobecné riešenie homogénnej časti}} \\
 O(\varepsilon^2) : \quad u_2^I &= \beta_2(1 - e^{-\xi}) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Kde  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$  sú zatiaľ nedourčené konštanty - zostali nám kvôli tomu, že každá rovnica zo systému ODR je rovnicou druhého rádu, ku každej je však definovaná len jedna okrajová podmienka. V riešení vyšších rádov vzhľadom na  $\varepsilon$  by nám zostávali ďalšie nedourčené konštanty a riešenia by mali obdobný tvar ako riešenie pre  $O(\varepsilon^2)$ .

#### 2.2.4 Združenie asymptotických aproximácií

Z podkapitôl 2.2.1 a 2.2.2 máme nasledovné aproximácie hľadanej funkcie na vonkajšej, respektíve vnútornej oblasti:

$$\begin{aligned}
 u^o(x; \varepsilon) &= u_0^o(x)\varepsilon^0 + u_1^o(x)\varepsilon^1 + \dots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)\varepsilon^0 + 0\varepsilon^1 + \dots \\
 u^I(\xi; \varepsilon) &= u_0^I(\xi)\varepsilon^0 + u_1^I(\xi)\varepsilon^1 + \dots = \beta_0(1 - e^{-\xi})\varepsilon^0 + \left[\frac{1}{2}\xi + \beta_1(1 - e^{-\xi})\right]\varepsilon^1 + \dots
 \end{aligned}$$

Ako vidíme, hraničné podmienky na  $x = 0$  a  $x = 1$  sú splnené, integračné konštanty  $\beta_0$  v  $O(\varepsilon^0)$  a  $\beta_1$  v  $O(\varepsilon^1)$ , ako aj konštanty pre riešenia vyšších rádov vzhľadom na  $\varepsilon$  vo vnútornej aproximácii, sú však stále nedourčené. Determinujeme ich takým spôsobom, aby sme riešenia na týchto dvoch podoblastiach dokázali hladko prepojiť do finálneho riešenia. Za týmto účelom využijeme tzv. *princíp asymptotickej zhody*, ktorý definujeme v nasledovnej podkapitole.<sup>24</sup>

<sup>24</sup>Od tejto definície až do záveru práce využívame príležitostne pre Taylorov rozvoj skratku TR.

### 2.2.5 Definícia princípu asymptotickej zhody a jeho využitie na dourčenie zostávajúcich konštánt

**Definícia 2.1.** *Majme dva asymptotické rozvoje definované pre  $\varepsilon \rightarrow 0$ , platné pre  $x = O(1)$  a  $x = \delta(\varepsilon)\xi$ , kde  $\xi = O(1)$ , v tvare  $\sum_{n=0}^N a_n(x; \varepsilon)$  a  $\sum_{m=0}^M b_m(\xi; \varepsilon)$ . Nech tieto dva asymptotické rozvoje aproximujú funkciu na dvoch príľahlých asymptotických oblastiach.*

Vytvorme teraz nasledujúce štruktúry :

$$\sum_{n=0}^N a_n(\underbrace{\delta(\varepsilon)\xi}_x; \varepsilon) \underset{TR \text{ do rádu } M}{\sim} \sum_{m=0}^M A_m(\xi; \varepsilon) \quad \text{pri } \xi = O(1)$$

$$\sum_{m=0}^M b_m(\underbrace{\frac{x}{\delta(\varepsilon)}}_{\xi}, \varepsilon) \underset{TR \text{ do rádu } N}{\sim} \sum_{n=0}^N B_n(x; \varepsilon) \quad \text{pri } x = O(1)$$

Teda, uvažujeme vonkajšie predĺženie do vnútornej oblasti a následne takto získaný asymptotický rad Taylorovsky rozvinieme do stupňa presnosti vnútornej aproximácie. Analogicky s vnútornou aproximáciou.

Potom hovoríme, že vonkajší a vnútorný asymptotický rad sú združené<sup>25</sup>, ak platí:

$$\boxed{\sum_{m=0}^M A_m(\xi; \varepsilon) = \sum_{n=0}^N B_n(\delta(\varepsilon)\xi, \varepsilon)}$$

*Poznámka:* V príklade, ktorý práve riešime, dané asymptotické rozvoje  $\sum_{n=0}^N a_n(x; \varepsilon)$  a  $\sum_{m=0}^M b_m(\xi; \varepsilon)$  zodpovedajú asymptotickým rozvojom funkcií  $u^o(x; \varepsilon)$  a  $u^I(\xi; \varepsilon)$ . Túto dekompozíciu oblasti na vonkajšiu a vnútornú oblasť sme dokázali určiť pomocou zobrazenia explicitného riešenia<sup>26</sup>, vo všeobecnosti by pomohlo vykreslenie numerického riešenia, nakoľko explicitné riešenie nie je vždy k dispozícii.

Teraz tento princíp využijeme na dourčenie zostávajúcich konštánt. Tento postup ukazujeme len schematicky, nakoľko je pomerne rozsiahly a ak by sme ho popisovali podrobne, zabral by omnoho väčšiu časť práce, ktorá je aj tak veľmi rozsiahla.

Uvažujme situáciu s  $M = 1, N = 1$ , kde tieto konštanty zodpovedajú jednak počtu členov asymptotických rozvojev, ktoré uvažujeme, a jednak stupňu taylorovho rozvoja,

<sup>25</sup>aj „viazané“, či „zhodné“, z anglického originálu „matched“

<sup>26</sup>učinili sme tak v podkapitole 2.1 na obrázkoch 1 a 2

ktorým aproximujeme predĺženia na príľahlých oblastiach, aby sme mohli tento princíp využiť. Tie odvodíme ich nasledovne:

$$\begin{aligned} \text{Vonkajšie do } O(\varepsilon^0): & & u^o \sim u_0^o &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \varepsilon^0 \\ \text{v termínoch } x \mapsto \xi: & & &= \frac{1}{2}\varepsilon\xi + \frac{1}{2} \\ \text{TR pre } \varepsilon \rightarrow 0, \xi = O(1), \text{ do } N = 1, \text{ teda } O(\varepsilon^0): & & &= \frac{1}{2} + O(\varepsilon^1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vnútorne do } O(\varepsilon^0): & & u^I \sim u_0^I &= \beta_0(1 - e^{-\xi})\varepsilon^0 \\ \text{v termínoch } \xi \mapsto x: & & &= \beta_0(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že výraz  $e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$  z poslednej rovnosti klesá do nuly pre  $\varepsilon \rightarrow 0$  exponenciálnou rýchlosťou, preto ho v následnom Taylorovom rozvoji môžeme zanedbať. Takéto členy budeme označovať „EST“<sup>27</sup>.

$$\text{TR pre } \varepsilon \rightarrow 0, x = O(1), \text{ do } M = 1, \text{ teda } O(\varepsilon^0): \quad = \beta_0 + EST$$

Princíp teda hovorí, že:

$$\beta_0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$$

Toto úplne dourčuje problém do  $O(\varepsilon^0)$ .

Analogicky postupujeme aj vo vyšších rádoch. Konkrétne pre  $M = 2, N = 2$  procedúra dáva:

$$\begin{aligned} \text{Vonkajšie do } O(\varepsilon^1): & & u^o &\sim u_0^o + \varepsilon^1 \underbrace{u_1^o}_{=0} + O(\varepsilon^2) \\ & & &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \varepsilon^1 0 + O(\varepsilon^2) \\ x \mapsto \xi & & &= \frac{1}{2}\varepsilon\xi + \frac{1}{2} + \varepsilon^1 0 + O(\varepsilon^2) \\ & & &= \frac{1}{2} + \varepsilon^1 \underbrace{\left[\frac{1}{2}\xi\right]}_{\text{TR pre } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ do } O(\varepsilon^1)} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

<sup>27</sup>Z anglického „exponentially small term“, teda v slovenčine „exponenciálne malý člen

$$\begin{aligned}
\text{Vnútorne do } O(\varepsilon^1): \quad u^I &\sim u_0^I + \varepsilon^1 u_1^I \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}}_{\beta_0} (1 - e^{-\xi}) + \varepsilon^1 \left[ \frac{1}{2}\xi + \beta_1(1 - e^{-\xi}) \right] + O(\varepsilon^2) \\
\xi \mapsto x &= \frac{1}{2} \left( 1 - \underbrace{e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}_{EST} \right) + \varepsilon^1 \left[ \frac{1}{2}\frac{x}{\varepsilon} + \beta_1 \left( 1 - \underbrace{e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}_{EST} \right) \right] + O(\varepsilon^2) \\
\text{TR } \varepsilon \rightarrow 0, \underbrace{x = O(1)}_{x \text{ fixujem}}, \text{ do } O(\varepsilon^1) &= \frac{1}{2} + \varepsilon^1 \frac{1}{2}\frac{x}{\varepsilon} + \varepsilon^1 \beta_1 + O(\varepsilon^2) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \varepsilon^1 \beta_1 + O(\varepsilon^2) \\
\text{Návrat do } \xi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon\xi + \varepsilon^1 \beta_1 + O(\varepsilon^2) \\
&= \frac{1}{2} + \varepsilon^1 \left[ \frac{1}{2}\xi + \beta_1 \right] + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

Výrazy sú zhodné do  $O(\varepsilon^1)$  vrátane, ak<sup>28</sup>:

$$\begin{aligned}
O(\varepsilon^0) : \quad \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\
O(\varepsilon^1) : \quad O(\xi^1) : \quad \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\
O(\xi^0) : \quad 0 &\stackrel{!}{=} \beta_1 \rightarrow \beta_1 = 0
\end{aligned}$$

Pokiaľ by sme tento princíp chceli použiť na ďalšie nedourčené konštanty vystupujúce v riešení vnútornej oblasti, ktoré prináleží vyšším rádom vzhľadom na  $\varepsilon$ , ľahko by sme zistili, že musia byť nulové, nakoľko takéto členy vo vonkajšom rozvoji ani nevystupujú.

Teda asymptotické riešenia sú:

$$\begin{aligned}
u^o &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \right) \varepsilon^0 + O(\varepsilon^2) & x = O(1), \varepsilon \rightarrow 0 \\
u^I &= \frac{1}{2}(1 - e^{-\xi})\varepsilon^0 + \frac{1}{2}\xi\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
&\stackrel{\xi \mapsto x}{=} \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}})\varepsilon^0 + \frac{1}{2}x + O(\varepsilon^2) & x = O(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0
\end{aligned}$$

### 2.2.6 Konštrukcia kompozitnej asymptotickej aproximácie

Teraz by sme chceli z týchto dvoch funkcií  $u^o$  a  $u^I$ , ktoré asymptotickými rozvoji aproximujú hľadanú funkciu na dvoch príslušných intervaloch, skonštruovať jednu kompozitnú aproximáciu, ktorá zohľadní špecifické črty správania hľadanej funkcie na týchto

<sup>28</sup>Pre  $O(\varepsilon^0)$  sme to zariadili, keď sme tento princíp využili prvý raz na určenie konštanty  $\beta_0$ , teraz nám tento člen vystupuje viac-menej len pre kontrolu.

intervaloch, zároveň však bude (aspoň asymptoticky) rovnomernou aproximáciou v zmysle  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} u(x; \varepsilon)$ <sup>29</sup>.

Konštrukcia tejto kompozitnej aproximácie sa tvorí prienikom týchto dvoch pôvodných aproximácií. Teda po transformovaní premennej  $x$  respektíve  $\xi$  tak, aby v oboch riešeniach vystupovali rovnaké premenné, tieto funkcie sčítame a odrátame členy, ktoré majú spoločné. Schematicky tento krok zapíšeme nasledovne:

$$u^f = u^o + u^I - u^c$$

kde  $u^f$  zodpovedá finálnej aproximácii a  $u^c$  je funkcia obsahujúca tie členy, ktoré sú pre  $u^o$  a  $u^I$  spoločné<sup>30</sup>.

V úvode tejto poslednej časti kapitoly sme si vyjadrili riešenia na oboch oblastiach v premennej  $x$  a vieme z nich jednoducho dourčiť funkciu  $u^c$ :

$$u^c = \frac{1}{2}\varepsilon^0 + \frac{1}{2}x$$

Teda kompozitná aproximácia má tvar:

$$u^f = u^o + u^I - u^c = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\xi}\right)\varepsilon^0 + 0 \times \varepsilon^1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \quad R1$$

Môžeme si všimnúť, že je to presne tvar funkcie  $u^I$ , teda hovoríme, že funkcia  $u^I(x, \varepsilon)$  asymptoticky rovnomerne aproximuje hľadanú funkciu  $u(x, \varepsilon)$ .

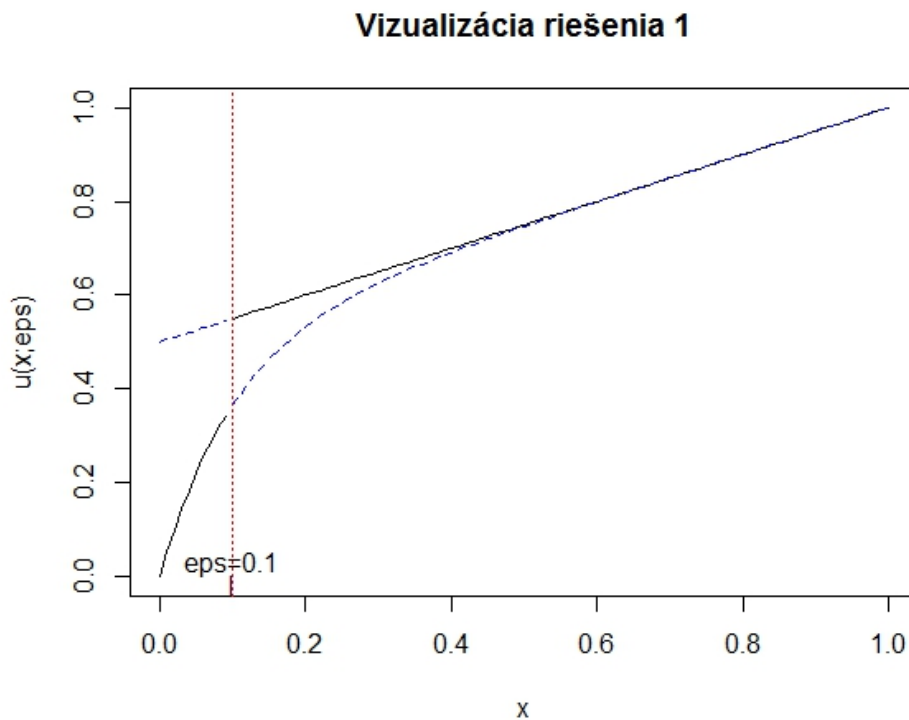
### 2.2.7 Grafické znázornenie riešení

Za účelmi celkovej rekapitulácie tým aj lepšej interpretácie jednotlivých riešení a ich predĺžení do príľahlých oblastí ešte uvádzame nasledujúcu ilustráciu, ktorá sa nachádza na začiatku nasledujúcej strany.

Čiernou farbou sú v ilustrácii vyznačené funkcie  $u^I$  a  $u^o$  na vnútornej, respektíve vonkajšej oblasti. Modrou farbou sú vyznačené ich predĺženia do príľahlých oblastí. Je na nej zaznačený aj údaj  $\varepsilon = 0, 1$  zodpovedajúci hodnote  $\varepsilon$ , pre ktorú túto ilustráciu konštruujeme. Zároveň, keďže miera hraničnej vrstvy  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ , sa nám v tomto bode končí asymptotická vnútorná oblasť a začína asymptotická vonkajšia oblasť, a ich prechod je naznačený červenou prerušovanou čiarou.

<sup>29</sup>Myslí sa tým, že limitné procesy  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} u(x; \varepsilon)$  a  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x; \varepsilon)$  komutujú, teda limitná hodnota nezávisí od výberu dráh v rovine  $(x, \varepsilon)$ .

<sup>30</sup>„c“ je z anglického „common“.



**Obr. 3:** Riešenia na vnútornej a na vonkajšej oblasti a ich predĺženia do príahlych oblastí.

Nakoľko sme už spomínali, že kompozitné riešenie sa v tomto prípade rovná  $u^I$ , by stálo za zmienku ešte pohľad na porovnanie tohto riešenia, získaného metódou asymptotických aproximácií - ( $R1$ ), a riešenia presného - ( $R0$ ). Avšak tieto riešenia sú už pre  $\varepsilon = 0,1$  vizuálne nerozlíšiteľné, preto by nám táto ilustrácia nebola nijakým spôsobom nápomocná.



### 3 Vyžitie metódy družných asymptotických rozvo- jov na výpočet Black-Scholesovej parciálnej difere- niciálnej rovnice

V tejto časti práce nasleduje najprv veľmi stručný úvod do pojmov problematiky stochastických diferenciálnych rovníc využívaných vo finančnej matematike. Potom nasleduje vysvetlenie Black-Scholesovej rovnice, ukázané jej explicitné riešenie a zavedenie parametra  $\Gamma$ , napokon nasleduje alternatívne riešenie pomocou využitia metódy družných asymptotických rozvojev, na ktorú sa v práci zameriavame.

#### 3.1 Základné pojmy

Hneď na úvod treba spomenúť, že vzhľadom na rozsah práce môžeme skutočne spomenúť len tie najzákladnejšie pojmy späté s touto obrovskou oblasťou matematiky, ktorú je potrebné ovládať na pochopenie modernej teórie spojitej finančnej matematiky. Zdroje týchto pojmov sú citácie zo zdrojov [14, 15]:

**Definícia 3.1** (Stochastický proces<sup>31</sup>). *Stochastický proces je  $t$ -parametrický systém náhodných premenných  $\{X(t), t \in I\}$ , kde  $I$  je interval alebo diskrétna množina indexov.*

**Definícia 3.2** (Brownov pohyb a Wienerov proces<sup>32</sup>). *Brownov pohyb  $\{X(t), t \geq 0\}$  je stochastický proces<sup>33</sup>, pričom*

- i) všetky prírastky  $X(t + \Delta) - X(t)$  majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $\mu\Delta$  a disperziou  $\sigma^2\Delta$ ,*
- ii) pre každé delenie  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$  sú prírastky  $X(t_1) - X(t_0)$ ,  $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ , nezávislé náhodné premenné podľa bodu i),*
- iii)  $X(0) = 0$ .*

*Brownov pohyb s parametrami  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 1$  nazývame Wienerov proces<sup>34</sup>.*

<sup>31</sup>Zo zdroja [15]

<sup>32</sup>Zo zdroja [15, Definícia 2.1.]

<sup>33</sup>v origináli: „ $t$ -parametrický systém náhodných veličín“.

<sup>34</sup>Ten sa zvykne označovať ako  $W_t$ .

**Definícia 3.3** (geometrický Brownov pohyb<sup>35</sup>). Ak  $\{X(t), t \geq 0\}$  je Brownov pohyb s parametrami  $\mu$ ,  $\sigma^2$  a  $y_0 \in \mathbb{R}^+$ , tak stochastický proces<sup>36</sup>  $\{Y(t), t \geq 0\}$

$$Y(t) = y_0 e^{X(t)}, \quad t \geq 0,$$

nazývame geometrický Brownov pohyb.

## 3.2 Popis, odvodenie rovnice a jej explicitné riešenie

Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica opisuje vývoj ceny derivátu akcie ako funkciu ceny akcie a času zostávajúceho do expirácie derivátu. Je vybudovaná na základe matematického modelu, ktorý má viaceré závažné predpoklady, a teda aj výsledok rovnice je hodnoverný len do tej miery, do ktorej sa nám realita približuje k plneniu týchto predpokladov. Tie sú podrobne popísané v podkapitole 3.2.1.

Za reprezentatívny derivát sa zvykne kvôli jednoduchosti odvodenia považovať európska kúpna opcia na akciu, ktorá nevypláca dividendy. Je to právo kúpiť akciu v stanovenom čase  $T$  za vopred dohodnutú cenu  $K$ . Tento čas  $T$  budeme v práci nazývať *maturita*, *čas splatnosti* alebo *expirácia* opcie a dohodnutú cenu  $K$  budeme nazývať *realizačnou cenou* opcie. Cenou samotného derivátu sa myslí cena, za ktorú sa toto právo predáva, respektíve by sa podľa určitého finančného modelu malo predávať<sup>37</sup>, na finančnom trhu.

Vzhľadom na to, že teória stojaca za odvodením tejto rovnice je veľmi rozsiahla, napíšeme teraz len predpoklady modelu, načrtneme hlavné body odvodenia a laicky ich popíšeme. Podrobne sa dá nájsť v [14, s. 21-24], respektíve ešte matematicky rigoróznejšie odvodenie v [15, s. 32-37].

### 3.2.1 Predpoklady modelu<sup>38</sup>

- a) Krátkodobá úroková miera je známa a je konštantná.
- b) Stochastický charakter vývoja ceny akcie je dostatočne popísaný exponenciálnym

<sup>35</sup>Zo zdroja [15, Definícia 2.2.]

<sup>36</sup>V origináli „systém náhodných premenných“.

<sup>37</sup>Podľa teórie bezarbitrážneho oceňovania, ktorú tiež, vzhľadom na rozsah práce, nemôžeme rigorózne vysvetliť a nechávame jej pochopenie na intuícií čitateľa.

<sup>38</sup>Zo zdroja[1]

Brownovým pohybom<sup>39</sup> s disperziou<sup>40</sup>  $\sigma^2 \Delta = \Delta$ . Teda rozdelenie možných cien akcie na konci hocijakého konečného intervalu je lognormálne. Miera variancie výnosov akcie je teda konštantná.

- c) Akcia nevypláca žiadne dividendy ani sa inak neprerozdeľuje.
- d) Opcia je európskeho typu, teda môže byť uplatnená iba v čase splatnosti.
- e) Nie sú žiadne transakčné náklady spôsobené kúpou alebo predajom akcie alebo opcie.
- f) Existuje zadaná krátkodobá (okamžitá) úroková miera, a je možné si požičiavať akúkoľvek potrebnú sumu.
- g) Za krátke pozície<sup>41</sup> nie sú žiadne pokuty.<sup>42</sup>

### 3.2.2 Idey odvodenia rovnice<sup>43</sup>

- 1) *Stochastická diferenciálna rovnica pre vývoj ceny akcie a pre vývoj ceny derivátu:*

Pomocou štruktúr teórie stochastických procesov dokážeme náhodné správanie ceny akcie a naň sa viažuceho finančného derivátu popísať cez tzv. stochastické diferenciálne rovnice. Tie sa od bežných líšia v tom, že sa v nich okrem derivácie funkcie podľa „klasickej“ premennej vyskytuje aj čosi ako „derivácia podľa Wienerovho procesu“, ktorá vyjadruje mieru náhodnej fluktuácie. Interpretačne sa takáto rovnica chápe ako popis infinitezimálnych prírastkov stochastického procesu, napríklad pre cenu akcie  $S$ , ktorú často berieme ako Brownov pohyb s parametrami  $\mu = \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}$  a  $\sigma = \sigma$  má takáto rovnica tvar:

$$dS = \hat{\mu}Sdt + \sigma SdW_t \quad SDR1$$

<sup>39</sup>Tento predpoklad upravujeme oproti originálu, kde ho formulujú pomocou pojmu „náhodná prechádzka“. My v práci tejto pojem nedefinujeme, avšak predpoklad uvedený v tejto forme je ekvivalentný originálnemu predpokladu v zmysle nami uvedených definícií.

<sup>40</sup>Alebo varianciou.

<sup>41</sup>originálny výraz „short selling“.

<sup>42</sup>V originálnom článku v tomto predpoklade ešte nasleduje popis, čo sa pod krátkymi pozíciami myslí.

<sup>43</sup>Podľa zdroja[2, s.19-20].

kde zložka  $dt$  vyjadruje deterministickú časť prírastku a zložka  $dW_t$  stochastickú časť. Pomocou nej sa potom cez známu Itoovu lemu odvodí stochastická rovnica pre vývoj ceny opcie.

Lineárnu kombináciu týchto rovníc (pre akciu  $S$  a pre cenu opcie  $V$ ) využívame v ďalšom kroku odvodenia.

2) *Vytvorenie bezrizikového portfólia a vyvodenie dôsledkov:*

V tejto časti sa vytvára portfólio z jednej opcie s hodnotou  $V$  a  $-\delta$  akcií  $S$ , kde  $\delta \in \mathbb{R}^+$ . Ideou tejto časti je to, že za podmienok, za akých je model konštruovaný, je možné toto  $\delta$  zvoliť tak, aby sa z portfólia eliminovalo akékoľvek riziko. Potom, pokiaľ chceme zamedziť existencii arbitráže, sa musí hodnota tohto portfólia v každom čase rovnať hodnote inej bezrizikovej investície, a tou je uloženie hodnoty ekvivalentnej počiatocnej hodnote portfólia na bankový účet s bezrizikovou spojitou úrokovou mierou  $r$ . Po eliminovaní náhodnosti a zrovnaní týchto dvoch hodnôt dostaneme parciálnu (ale už nie stochastickú) diferenciálnu rovnicu uvedenú nižšie.

### 3.2.3 Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad B - S \text{ PDR}$$

Kde jednotlivé členy znamenajú:

$S$  - cena akcie

$V$  - cena finančného derivátu

$t$  - čas

$\sigma$  - volatilita akcie

$r$  - spojitá bezriziková úroková miera

### 3.2.4 Idey explicitného riešenia Black-Scholesovej rovnice

Základný princíp tkvie v tom, že ( $B - S \text{ PDR}$ ) sa dá pretransformovať na parabolickú diferenciálnu rovnicu v špeciálnom tvare, kde vystupuje len prvá derivácia podľa časovej

premennej  $t$  a druhá derivácia podľa priestorovej premennej  $x$ , so zadanou počiatočnou podmienkou. Táto rovnica je známa ako „rovnica vedenia tepla“. Tento typ rovnice vieme jednoducho riešiť napríklad metódami spomenutými v [14]. Podrobne sú tieto transformácie a riešenie podľa vzorca spravené v [14, s. 59-63] aj v [15, s. 48-53], tu načrtne iba idey jednotlivých krokov a prečo boli robené.

- 1) Potrebujeme vedieť počiatočnú podmienku tejto parciálnej diferenciálnej rovnice pre hodnotu finančného derivátu. Daná je však len koncová podmienka, musíme teda transformovať premennú  $t$ , ktorá symbolizuje čas od počiatku, na premennú  $\tau = T - t$ , kde  $T$  je koncový čas, ktorá reprezentuje opačné plynutie času - od konca. Vtedy sa nám koncová podmienka zmení na počiatočnú.<sup>44</sup>
- 2) Premenná  $S$  symbolizujúca cenu akcie má len kladné hodnoty, riešenia parabolickej PDR v priestorovej premennej chceme však hľadať pre všetky reálne čísla. Využijeme teda, že cena akcie  $S$  sa riadi geometrickým Brownovým pohybom a zavedieme substitúciu  $x = \ln S$ , kde následne premenná  $x$  už nadobúda hodnoty z požadovaného definičného oboru.<sup>45</sup>
- 3) Doteraz sme rovnicu upravili na tvar všeobecnej parabolickej rovnice so zadanou počiatočnou podmienkou, teraz ju chceme upraviť na tvar rovnice vedenia tepla. Znova to dokážeme docieľiť pomocou vhodnej transformácie, tentoraz prenásobením hľadanej funkcie exponenciálou v špeciálnom tvare.
- 4) V tomto bode sa len využije vzorec na výpočet explicitného riešenia<sup>46</sup> a postupne sa vykonajú spätné transformácie.
- 5) Napokon sa praktická realizácia výpočtu koná cez prepis tohto riešenia pomocou zvyškovej funkcie normálneho rozdelenia a jeho vzťahom k hustote štandardizovaného normálneho rozdelenia  $N(0, 1)$ , a v práci uvádzame až toto výsledné riešenie.

---

<sup>44</sup>Táto transformácia nie je úplne jednoznačná, napríklad v zdroji [2] sa využíva transformácia v tvare  $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ , ktorá nám okrem zmeny smeru plynutia času ešte túto časovú veličinu vhodne preškáluje, aby sa tak stala tzv. bezrozmernou veličinou.

<sup>45</sup>Ani táto transformácia nie je úplne jednoznačná, v zdroji [2] sa využíva transformácia v tvare  $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$ , ktorá nám zasa spôsobí aj želaný efekt zbezrozmernenia.

<sup>46</sup>napr [14, s. 53-54]

### 3.2.5 Vzorec explicitného riešenia Black-Scholesovej rovnice

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad EX - R - BS$$

kde

$$d_1 = \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \ln \frac{S}{K}}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

a  $N(x)$  znamená distribučnú funkciu normalizovanej normálnej premennej v danom bode  $x$ , tj.:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} ds \quad D - NORM$$

### 3.2.6 Zavedenie parametra $\Gamma$ <sup>47</sup>

Nakoľko je v praxi nemožné vzorec ( $EX - R - BS$ ) používať, pretože je založený na myšlienke replikačného portfólia, ktoré sa mení spojito v čase, zavedieme parameter  $\Gamma$ , ktorý definujeme nasledovne:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Tento parameter nám meria riziko zarhnuté v „nehedžovaní“ portfólia v spojitom čase, teda len v nejakých malých časových intervaloch  $\delta t$ . Technické detaily, prečo sa jedná o dobrú mieru, možno nájsť v [2, s. 22].

Pre kúpnu a predajnú opciu platí:

$$\Gamma(S, T) = \frac{d^2}{dS^2} \max(S - K, 0) = \delta(S - K)$$

kde  $\delta(\cdot)$  znamená Dirak delta funkciu.

Táto miera je pre kúpnu opciu bez dividendov pre čas blízky maturite opcie dobrou aproximáciou delta funkcie - pričom  $\delta(S, T) = \frac{d}{dS} \max(S - K, 0) = H(S - K)$ , kde  $H(S - K)$  znamená Heavysideova funkcia so skokom v bode  $S - K$ <sup>48</sup>.

<sup>47</sup>Materiál na tento odsek čerpáme z [2].

<sup>48</sup>Tieto funkcie sú súčasťou tzv. „Greeks“, ktoré sú deriváciami Black-Scholesovho vzorca na cenu derivátu ( $EX - R - BS$ ) podľa rôznych premenných. Vyjadrujú teda, nakoľko sa táto cena derivátu mení pri infinitesimalnej zmene jednej veličiny za predpokladu, že ostatné ostanú konštantné. V našom prípade uvádzame  $\delta(S, T) = \frac{dV}{dS}$  a  $\Gamma(S, T) = \frac{d^2V}{dS^2} = \frac{d\delta}{dS}$ .

### 3.3 Aproximatívne riešenie B-S rovnice pomocou metódy združených asymptotických rozvojev

Táto časť práce zodpovedá riešeniu tohto problému požadovanou formou v zdroji [2, s. 23-34]. Okrem úsekov, kde je explicitne uvedené inak, je pre nás po zvyšok kapitoly táto práca hlavným zdrojom.

Cieľom tejto sekcie je hlavne poukázať na možnosť riešenia rovníc používaných vo finančnej matematike pomocou metódy asymptotických združených rozvojev, nakoľko z hľadiska efektívnosti a presnosti je pre tento konkrétny problém jednoznačne lepšie využiť explicitné riešenie.

*Idea je nasledovná:*

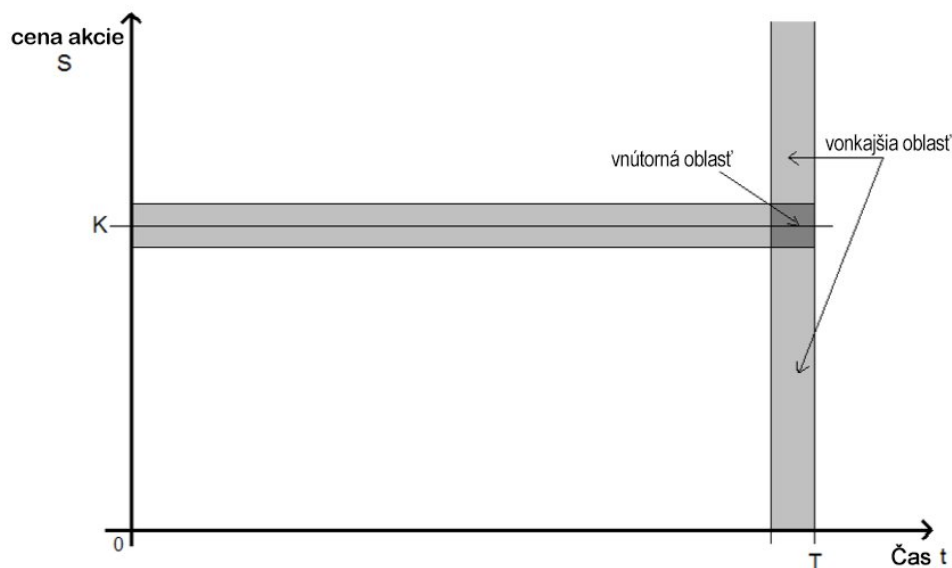
Skonstruujú sa dve umelé hraničné vrstvy, jedna bude zodpovedať času blízkemu expirácii opcie a druhá cene opcie v blízkosti realizačnej ceny opcie.

Využijeme metódu združených asymptotických rozvojev na to, aby sme našli riešenie pre časy blízke expirácii opcie - zvyšnú oblasť neberieme do úvahy. Na nej určíme ako vnútornú oblasť tú, kde je cena opcie blízka realizačnej cene a zvyšok bude pre nás vonkajšia oblasť. Graficky máme toto rozdelenie do oblastí zobrazené na nasledujúcom obrázku č. 4.

Vhodnou substitúciou do problému zavedieme malý parameter  $\varepsilon$  a následne budeme postupovať podobne ako v príklade z predošlej kapitoly - budeme hľadať riešenia v tvare asymptotických rozvojev na vnútornej a vonkajšej oblasti zvlášť. V tomto prípade však nebudeme musieť využiť princíp asymptotickej zhody, nakoľko z povahy riešeného problému budeme schopný odvodiť dostatok vhodných okrajových i počiatočných podmienok, a riešenia budeme priamo spájať hľadáním prieniku riešení.<sup>49</sup>

---

<sup>49</sup> Pri konkrétnom vykonávaní jednotlivých krokov zo všeobecného postupu uvedeného v časti 1.3 budeme musieť čeliť faktu, že problém je vo svojej povahe parciálnou a nie obyčajnou diferenciálnou rovnicou, preto budú aj čiastočné výsledky vo svojej povahe zložitejšie a ťažšie dosiahnuteľné.



**Obr. 4:** Grafické znázornenie uvažovaných oblastí. Hlavným zdrojom pre obrázky v tejto kapitole je tiež zdroj [2], tento je zo strany 24.

### 3.3.1 Prvotné úpravy

Predtým, než by sme riešili rovnicu ( $B - S PDR$ ), je potrebné si premenné vhodne preškálovať. Podobne ako pri explicitnom riešení, aj tu bude prvou úpravou zámena premennej času  $t$ , ktorý uplynul, za inú mierku času, tentoraz ju nazveme  $t'$ , a bude definovaná nasledovne:

$$t' = (T - t)\sigma^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = T - \frac{t'}{\sigma^2}$$

Význam člena  $(T - t)$  je jasný, udáva, že chceme merať čas od expirácie namiesto od začiatku. V tomto prípade ho však ešte násobíme  $\sigma^2$  a to preto, aby sa nám v tejto veličine odstránil časový rozmer a stala sa bezdimenzionálnou.<sup>50</sup>

Podľa derivovania zloženej funkcie dostávam

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t'} \frac{d t'}{d t} = -\sigma^2 \frac{\partial V}{\partial t'}$$

a keď tento výraz v rovnici ( $B - S PDR$ ) substituujem, vynásobím obe strany výrazom  $\sigma^2$  a pripočítam k oboj stranám výraz  $\frac{\partial V}{\partial t'}$ , dostanem rovnicu:

$$\frac{\partial V}{\partial t'} = \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \alpha S \frac{\partial V}{\partial S} - \alpha V$$

<sup>50</sup>Skoro presne túto možnosť postupu sme už spomínali v poznámke podkapitoly uvádzajúcej postup na explicitné riešenie 3.2.4.



kde  $\alpha = \frac{r}{\sigma^2}$  je bezrozmerná konštanta.

Tentoraz však nezavádzame transformáciu druhej premennej, ale cez metódu združených asymptotických rozvojom budeme riešiť priamo tento problém.

Predpokladajme, že  $\alpha = O(1)$  a že preškálovaný čas  $t'$  je malý. Potom má zmysel definovať  $\tau' = t'/\varepsilon^\eta$ , kde  $0 < \varepsilon \ll 1$  a  $\eta$  je zatiaľ neznámy, kladný parameter. Táto transformácia má efekt nahaňovania oblasti blízko expirácie a nakoľko práve tam chceme hľadať riešenie pre túto PDR, je vhodné túto substitúciu zaviesť.

Znova použijeme pravidlo o derivácii zloženej funkcie na transformovanie výrazu  $\frac{\partial V}{\partial t'}$ , výsledok dosadíme do predošlej rovnice a dostaneme:

$$\frac{1}{\varepsilon^\eta} \frac{\partial V}{\partial \tau'} = \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \alpha S \frac{\partial V}{\partial S} - \alpha V. \quad \text{Ú4}$$

### 3.3.2 Formulácia problému na vonkajšej oblasti

Najprv si pár vetami charakterizujeme vonkajšiu oblasť v tomto riešenom probléme. Zodpovedá oblasti, kedy je cena akcie ďaleko od realizačnej ceny opcie<sup>51</sup>. Zároveň netreba zabúdať, že celý problém vyšetrujeme pre časy blízke maturite opcie, a preto, ako možno badať aj na nasledujúcom obrázku, môžeme považovať funkciu  $\delta(S, t) = \frac{dV}{dS}$  za konštantnú a tým pádom funkciu  $\Gamma(S, t) = \frac{d\delta}{dS}$  za konštatne nulovú.

Podobne ako v príklade riešenom v predošlej kapitole skúsime pre vonkajšiu oblasť hľadať riešenie v tvare regulárneho radu, tentoraz nám však v rovnici, ktorú riešime - (Ú4), nevystupuje  $\varepsilon^1$  ako v (Ú1), ale  $\varepsilon^\eta$ , teda robíme rozvoj v mocninách násobku  $\eta$ .<sup>52</sup> Rozvoj teda vyzerá nasledovne:

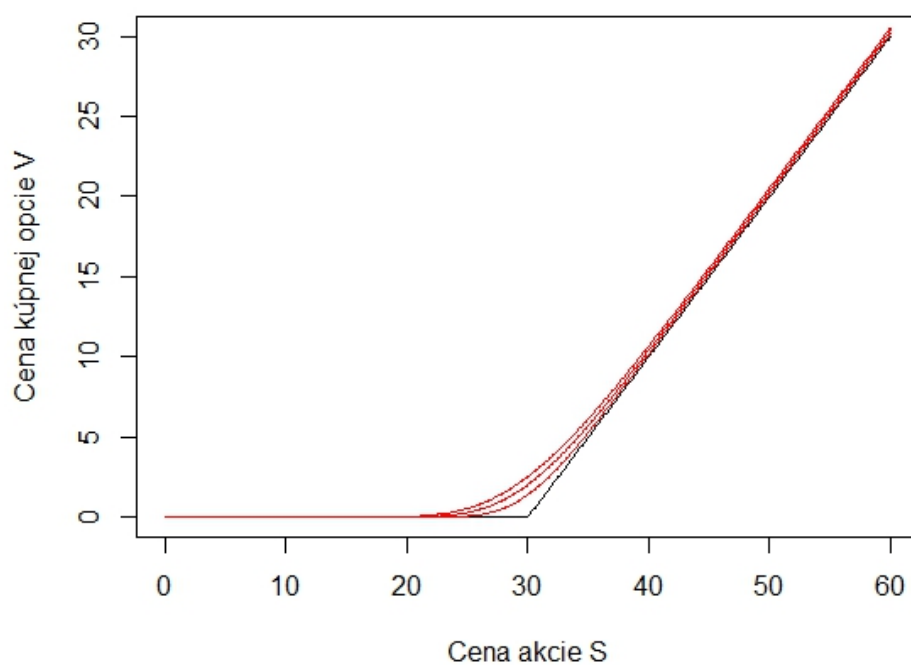
$$V_\varepsilon(S, \tau') = \sum_{n=0}^m \varepsilon^{n\eta} V_n(S, \tau') + O(\varepsilon^{\eta(m+1)}) = V_0(S, \tau') + \varepsilon^\eta V_1(S, \tau') + \dots$$

Úplne analogicky, ako pri riešení úlohy (Ú1) môžeme tento rozvoj derivovať člen po člene, raz podľa premennej  $\tau$ , raz i dva razy podľa premennej  $S$ , a dosadiť vzniknuté výrazy za príslušné derivácie v rovnici (Ú4). Pre rády  $O(1)$  a  $O(\varepsilon^\eta)$  dostaneme rovnice:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau'} = 0$$

<sup>51</sup>Matematicky presne: Platí, že  $|S - K| \gg \varepsilon^\eta K$ .

<sup>52</sup>Teda reprezentantom funkcie miery vzhľadom na škálovanie v časovej premennej je pre nás funkcia  $\varepsilon^\eta$ .

**Znázornenie cenových funkcií pre obdobie blízke maturite**

**Obr. 5:** Zobrazenie explicitného riešenia pre časy blízke maturite opcie, pre realizačnú cenu  $K = 30$ . Tento obrázok je z zdroja [2, s. 25].

$$\frac{\partial V_1}{\partial \tau'} = \frac{1}{2} S^2 \underbrace{\frac{\partial^2 V_0}{\partial S^2}}_{=0 (*)} + \alpha \underbrace{\left( S \frac{\partial V_0}{\partial S} - V_0 \right)}_{= (**)} = \alpha \left( S \frac{\partial V_0}{\partial S} - V_0 \right)$$

(\*) tento člen nám v riešení pre rád  $O(\varepsilon^\eta)$  zmizne, pretože pre  $|S - K| \gg \varepsilon^\eta K$ , teda ak je aktuálna cena akcie ďaleko od realizačnej ceny, máme  $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$ . Laicky povedané - zmena sklonu tejto funkcie je už prakticky nulová - funkcia sa správa lineárne.

(\*\*) ak nadviažeme na predchádzajúce zdôvodnenie, tak je jasné, že pre  $S \ll K$  je to 0 a pre  $S \gg K$  je to 1.

Teda sa nám rovnica pre  $O(\varepsilon^\eta)$  mení na:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \tau'} = \begin{cases} \alpha(S - (S - K)) = \alpha K, & \text{pre } S \gg K \\ 0, & \text{pre } S \ll K. \end{cases}$$

Okrajové podmienky získame analogicky ako pri riešení (Ú1) a odvádzame ich nasledujúcej podkapitole.

### 3.3.3 Riešenie problému na vonkajšej oblasti

Riešenie rádu  $O(1)$  s prislúchajúcou okrajovou podmienkou  $V_0(S, T) = \max(S - K, 0)$  je dané výrazom  $V_0(S, t) = \max(S - K, 0)$ , a riešenie rádu  $O(\varepsilon^\eta)$  s okrajovou podmienkou  $V_1(S, T) = 0$  je

$$V_1(S, \tau') = \begin{cases} \alpha K \tau', & \text{pre } S \gg K, \\ 0, & \text{pre } S \ll K, \end{cases}$$

a riešenie v tvare rozvoja do rádu  $O(\varepsilon^\eta)$  je

$$V_0 + \varepsilon^\eta V_1 = \begin{cases} S - K + \varepsilon^\eta \alpha K \tau', & \text{pre } S \gg K, \\ 0, & \text{pre } S \ll K, \end{cases}$$

čo môžeme prepísať nasledovne

$$V_0 + \varepsilon^\eta V_1 = \begin{cases} S - K(1 - \varepsilon^\eta \alpha \tau'), & \text{pre } S - K \gg \varepsilon^\eta K, \text{ ďaleko nad realizačnou cenou} \\ 0, & \text{pre } S - K \ll \varepsilon^\eta K, \text{ ďaleko pod realizačnou cenou} \end{cases}$$

Treba poznamenať, že v tomto prípade máme vrstvu hrúbky  $\varepsilon^\eta$ . Neskôr, keď aplikujeme metódu hľadania rovnováh v rámci riešenia problému vo vnútornej oblasti,

dourčíme  $\eta$  na hodnotu 2. Dá sa ukázať, že toto riešenie je presne rovné prvým dvom členom Taylorovho rozvoja v okolí času expirácie pre funkciu

$$\begin{cases} S - Ke^{-r(T-t)}, & \text{pre } S > Ke^{-r(T-t)}, \\ 0, & \text{pre } S < Ke^{-r(T-t)}. \end{cases}$$

Horná vetva tejto funkcie predstavuje hodnotu forwardového kontraktu v rámci ktorého držiteľ je povinný kúpiť akciu, a spodná vetva, čo korešponduje s povahou riešenia, nakoľko pre túto vetvu bude opcia určite uplatnená, zatiaľ čo spodná vetva zodpovedá stavu, kedy opcia určite uplatnená nebude.

### 3.3.4 Formulácia problému na vnútornej oblasti

Tak, ako sme zmienili v predošlej časti, v oblasti, kde je absolútna hodnota rozdielu  $S - K$  malá, teda na vnútornej oblasti, nemôžeme položiť  $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$ , takže tento člen v rovnici (Ú4) nebude môcť byť ignorovaný. Vysporiadame sa s tým preškálovaním ceny  $S$  na tejto oblasti. Zavedieme novú premennú  $x$

$$x = \frac{S - K}{K\varepsilon^\nu},$$

ktorá zodpovedá tomu, že sa v absolútnej hodnote malý výraz  $S - K$  vydolí malým parametrom  $\varepsilon^\nu$  kvôli preškálovaniu,<sup>53</sup> a ešte sa vydolí realizačnou cenou  $K$ , aby bola nová premenná bezdimenzionálna.

Tiež zavádzame transformáciu hľadanej funkcie

$$v(x, \tau') = \frac{V(S, \tau')}{\varepsilon^\nu K},$$

ktorá spôsobuje škálovanie  $V(S, \tau')$ , ktoré je  $O(\varepsilon^\nu)$ , členom  $\varepsilon^\nu$ , aby  $v = O(1)$  a znova delíme  $K$ , aby výsledná cenová funkcia  $v(x, \tau')$  bola bezdimenzionálna.

Tieto dva kroky možno interpretovať tak, že potrebujeme v novej škále zaviesť premennú ekvivalentnú cene akcie a takisto novú funkciu ekvivalentnú cene opcie.

Po týchto dvoch škálovaniach sa nám B-S rovnica zmení na bezdimenzionálnu rovnicu v tvare

$$\frac{1}{\varepsilon^\nu} \frac{\partial v}{\partial \tau'} = \frac{1}{2\varepsilon^{2\nu}} (1 + \varepsilon^\nu x)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^\nu} (1 + \varepsilon^\nu x) \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha v, \quad (\text{Ú5})$$

<sup>53</sup> $\nu$  je zatiaľ neznámy, kladný parameter.

s výplatnou funkciou

$$v(x, 0) = \frac{V(S, 0)}{\varepsilon^\nu K} = \frac{\max(S - K, 0)}{\varepsilon^\nu K} = \max(x, 0).$$

Na tomto mieste v práci ukazujeme riešenie tohto vnútorného problému a neskôr, ako v príklade v kapitole 2, sa budeme snažiť získať riešenia na vnútornej, respektíve vonkajšej oblasti vhodne spojitou prepojiť.

Najprv predpokladáme, že  $\nu$  a  $\eta$  sú celočíselné.<sup>54</sup> V takom prípade môžeme riešenie hľadať vo forme asymptotického rozvoja s použitím celočíselných mocnín  $\varepsilon$ :

$$v_\varepsilon(x, \tau') = v_0(x, \tau') + \varepsilon^1 v_1(x, \tau') + O(\varepsilon^2)$$

Tak, ako v predošlej časti, aj teraz môžeme rozvoj derivovať člen po člene raz podľa každej z premenných  $x, \tau'$  a dva razy podľa  $x$  a dosadiť do rovnice ((Ú5)) na príslušné miesta a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^\eta} \frac{\partial}{\partial \tau'} (v_0(x, \tau') + \varepsilon^1 v_1(x, \tau') + \dots) &= \frac{1}{2\varepsilon^{2\nu}} (1 + \varepsilon^\nu x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_0(x, \tau') + \varepsilon^1 v_1(x, \tau') + \dots) \\ &+ \frac{\alpha}{\varepsilon^\nu} (1 + \varepsilon^\nu x) \frac{\partial}{\partial x} (v_0(x, \tau') + \varepsilon^1 v_1(x, \tau') + \dots) \\ &- \alpha (v_0(x, \tau') + \varepsilon^1 v_1(x, \tau') + \dots). \end{aligned} \quad (\text{Ú6})$$

### 3.3.5 Hľadanie rovnováh<sup>55</sup>

Analogicky ako v odseku 2.2.3 predošlej kapitoly hľadáme rovnováhy pre členy rovnice (Ú5). Detailný postup nebudeme spomínať, nakoľko je viac-menej analogický, ak zohľadňujeme nasledujúce skutočnosti:

1. Namiesto celkového tvaru funkcie teraz zisťujeme len presnú formu vopred daného funkcionálneho tvaru  $\varepsilon^\eta$ , respektíve  $\varepsilon^\nu$ . Máme tu však dve neznáme konštanty a nájdená rovnováha nám na ne stanoví iba jednu podmienku, preto namiesto presných hodnôt oboch získame nejaký ich funkcionálny vzťah, prípadne iba hodnotu jednej z nich.

<sup>54</sup>Tento predpoklad sa ukáže rozumný, nakoľko pri hľadaní rovnováh nám ostane jeden stupeň voľnosti a získame len funkcionálny vzťah medzi  $\nu$  a  $\eta$  a nie konkrétne hodnoty, ako tomu bolo v príklade z ODR v predošlej kapitole.

<sup>55</sup>Táto podkapitola sa nenachádza v zdroji [2], z ktorého čerpáme väčšinu ostatných údajov tejto kapitoly, ale je našim vlastným prínosom k práci.

2. Vzhľadom na kladnosť parametra  $\nu$  sa dá ukázať, že

$$\begin{aligned} O\left(\frac{1}{2\varepsilon^{2\nu}}(1 + \varepsilon^\nu x)^2\right) &= O\left(\frac{1}{\varepsilon^{2\nu}}\right) \\ O\left(\frac{\alpha}{\varepsilon^\nu}(1 + \varepsilon^\nu x)\right) &= O\left(\frac{1}{\varepsilon^\nu}\right) \end{aligned}$$

nakoľko  $x, \alpha$  sú  $O(1)$ .

3. Vzhľadom na kladnosť oboch parametrov  $\nu$  a  $\varepsilon$  môžeme vylúčiť, že by mohla nastať rovnováha niektorého z prvých troch členov násobených členmi rádu  $O\left(\frac{1}{\varepsilon^\eta}\right)$ ,  $O\left(\frac{1}{\varepsilon^\nu}\right)$  a  $O\left(\frac{1}{\varepsilon^\nu}\right)$  s posledným členom, nezávislým od  $\varepsilon$ .

Potom sa už len zrovnávajú exponenty rádu vzhľadom na  $\varepsilon$  prvých troch členov rovnice, teda  $-\eta, -2\nu, -\nu$  a rovnováha, ktorá nás nedoviedie k splneniu rovnice platnej na vonkajšej oblasti a je konzistentná<sup>56</sup>, je rovnováha práve prvých dvoch členov, z ktorej dostaneme funkcionálny vzťah  $\eta = 2\nu$ .

Kvôli jednému stupňu voľnosti, ktorý nám na dourčenie parametrov zostáva, môžeme za účelom zjednodušenia výpočtov stanoviť  $\nu = 1$ , z čoho vyplýva  $\eta = 2$ . Po dosadení týchto parametrov do rovnice (Ú6) a vynásobením oboch strán rovnice výrazom  $\varepsilon^2$ , dostaneme úlohu, ktorú riešime na vnútornej oblasti, tú uvádzame na začiatku nasledujúcej podkapitoly.

### 3.3.6 Sformulovaný problém na vnútornej oblasti

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau'}(v_0(x, \tau') + \varepsilon^1 v_1(x, \tau') + \dots) &= \frac{1}{2}(1 + \varepsilon x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_0(x, \tau') + \varepsilon^1 v_1(x, \tau') + \dots) \\ &+ \alpha \varepsilon (1 + \varepsilon x) \frac{\partial}{\partial x}(v_0(x, \tau') + \varepsilon^1 v_1(x, \tau') + \dots) \\ &+ \alpha \varepsilon^2 (v_0(x, \tau') + \varepsilon^1 v_1(x, \tau') + \dots). \end{aligned} \quad (\text{Ú7})$$

Z toho už vidíme, ako vyzerajú problémy v jednotlivých rádoch vzhľadom na  $\varepsilon$ . My v práci uvádzame len riešenie prvých dvoch rádov  $O(\varepsilon^0) = O(1)$  a  $O(\varepsilon)$ .

Z rovnice (Ú7) ľahko vyčítame členy rádu  $O(\varepsilon^0) = O(1)$  a problém tohto rádu je

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tau'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}, \quad \text{s } v_0(x, 0) = \max(x, 0).$$

<sup>56</sup>Teda dva dané členy sú menšieho rádu vzhľadom na  $\varepsilon$  než tretí člen

Pre  $x \rightarrow \pm\infty$  sú okrajové podmienky konzistentné s výplatnou funkciou a to

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v_0(x, \tau')}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v_0(x, \tau') = 0.$$

Ak  $x \rightarrow -\infty$ ,  $S$  zostáva vo vnútri hraničnej vrstvy, ale blíži sa k spodnému okraju, pretože  $\frac{S}{K} - 1 \rightarrow -\infty$ . V takom prípade sa  $v_0(x, \tau')$  blíži k nule.<sup>57</sup>

A problém rádu  $O(\varepsilon)$  je:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v_0}{\partial x}, \text{ s } v_1(x, 0) = 0.$$

### 3.3.7 Riešenie problému na vnútornej oblasti

Môžeme si všimnúť, že problém rádu  $O(1)$  je v tvare rovnice vedenia tepla so špeciálne zadanou počiatočnou podmienkou. V zdroji [2] sa toto riešenie celé odvodzuje, v našej práci však využijeme, riešenie takejto rovnice vieme zistiť využitím tzv. Greenovej funkcie<sup>58</sup>. Na tomto mieste v práci teda uvádzame už iba riešenie, ktorým je prvý člen aproximácie riešenia Black-Scholesovej rovnice:

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x, \tau') &= v_0(x, \tau') + O(\varepsilon), \\ &= xN\left(\frac{x}{\sqrt{\tau'}}\right) + \sqrt{\tau'}n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau'}}\right) \\ &= \frac{S/K - 1}{\varepsilon} N\left(\frac{S/K - 1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sqrt{T-t} n\left(\frac{S/K - 1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right), \end{aligned}$$

kde  $N$  je distribučná funkcia normalizovanej normálnej premennej ( $D - NORM$ ) a  $n$  je jej derivácia, teda hustota.

Posledný výraz už máme v reči pôvodnej cenovej premennej, ešte ho však nemáme v reči pôvodnej cenovej funkcie:

$$V(S, t) \sim V_0(S, t) \sim \varepsilon K v_0(x, \tau')$$

<sup>57</sup>Takto dourčené okrajové podmienky nám umožňujú obísť združovanie asymptotických aproximácií a priamo dourčiť všetky konštanty vyskytujúce sa v riešení na vnútornej oblasti. Tento spôsob by sme mohli využiť aj v príklade ODR z predošlej kapitoly rátając  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} u^I \stackrel{!}{=} 1 \times \varepsilon^0 + 0 \times \varepsilon^1 + \dots$  dosadením daného rozvoja a využitím že  $\xi\varepsilon = x$  a  $\xi \rightarrow \infty \Leftrightarrow x \rightarrow 1$ , z pedagogického hľadiska sme však radšej vysvetlili princíp asymptotickej zhody.

<sup>58</sup>Odvodenie a využitie tejto funkcie za týmto účelom sa nachádza v zdroji [14, s. 46-55].

$$= (S - K)N\left(\frac{S/K - 1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \sigma K\sqrt{T-t}n\left(\frac{S/K - 1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Môžeme si všimnúť, že parameter  $\varepsilon$ , ktorý bol do problému umelo vložený, sa v riešení nevyskytuje.

Riešenie do rádu  $O(\varepsilon)$  ešte vyžaduje vyriešiť problém tohto rádu. Podobne ako predtým sa v zdroji [2] riešenie podrobne odvodzuje, mi využijeme fakt, že pri riešení tejto rovnice už poznáme funkciu  $v_0(x, \tau')$  a preto môžeme problém tohto rádu poňať ako riešenie rovnice vedenia tepla s nenulovou pravou stranou. Na tú tiež existujú spoľahlivé metódy riešenia využívajú Greenovú funkciu<sup>59</sup> a preto znova uvádzame len riešenie:

$$\begin{aligned} v(x, \tau') &\sim v_0(x, \tau') + \varepsilon v_1(x, \tau') && R2 \\ &= xN\left(\frac{x}{\sqrt{\tau'}}\right) + \sqrt{\tau'}n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau'}}\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}x\sqrt{\tau'}n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau'}}\right) + \alpha\tau'N\left(\frac{x}{\sqrt{\tau'}}\right)\right), \\ &= (x + \varepsilon\alpha\tau')N\left(\frac{x}{\sqrt{\tau'}}\right) + \sqrt{\tau'}\left(x + \frac{1}{2}\varepsilon x\right)n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau'}}\right). \end{aligned}$$

A celkové riešenie s presnosťou do  $O(\varepsilon)$  zahŕňajúce oba členy rozvoja  $V(S, \tau') = \varepsilon K v(x, \tau') \sim \varepsilon K (v_0 + \varepsilon v_1)$  opäť asymptoticky rovnomerne aproximuje hľadanú funkciu na celom definičnom obore<sup>60</sup> a má tvar:

$$V(S, t) \sim (S - K + rK(T - t))N\left(\frac{S/K - 1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \sigma K\sqrt{T-t}(S + K)n\left(\frac{S/K - 1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \quad R2'$$

Na záver tejto kapitoly by bolo vhodné znázorniť graficky explicitné riešenie spolu s touto aproximáciou, nakoľko však, rovnako ako v odseku 2.2.7, je aproximatívne riešenie vizuálne nerozlíšiteľné od presného riešenia, nemá táto ilustrácia zmysel<sup>61</sup> a ďalej do podrobností toto aproximatívne riešenie nemá zmysel rozoberať, nakoľko ho neskôr v práci nijako nevyužívame. Cieľom kapitoly bolo totiž len s jeho pomocou ozrejmiť aplikovanie metódy združených asymptotických rozvojev na základné modely využívané vo finančnej matematike.

<sup>59</sup>Napríklad v zdroji [14, s. 56-57].

<sup>60</sup>Teda toto vnútorné riešenie už v sebe obsahuje všetky členy vonkajšieho riešenia a ich zlučovaním by sme opäť dostali len toto riešenie.

<sup>61</sup>Presvedčiť sa o tom možno v zdroji [2, s. 32 horný obrázok].



## 4 Využitie metódy družných asymptotických rozvo- jov na výpočet parciálnej diferenciálnej rovnice vy- stupujúcej v CEV modeli

V tejto kapitole čerpáme hlavne zo zdrojov [2] a [8], ak nie je na danom mieste v práci explicitne uvedené inak.

Obsahom kapitoly je odvodenie asymptotickej aproximácie pre ďalší finančný model, známy pod názvom CEV model<sup>62</sup>, ktorý je prirodzeným rozšírením Black-Scholesovho modelu. Najprv však čitateľovi tento model predstavíme.

### 4.1 Predstavenie modelu

v rámci tohto modelu uvažujeme možnosť, že volatilita ceny podkladového aktíva, v našom prípade akcie, nie je konštantná, ale závisí od tejto ceny.

Tento model je realistickejší než Black-Scholesov model, nakoľko viaceré štúdie ukazujú, že miera volatility ceny podkladového aktíva skutočne závisí od danej cenovej úrovne, pričom Black-Scholesov model predpokladá konštantnú volatilitu ceny podkladového aktíva bez ohľadu na jeho cenovú úroveň. CEV model však dokáže túto závislosť vyjadriť tým, že volatilitu ceny akcie stanovuje vo forme funkcie tejto ceny. Jedná sa teda o deterministickú funkciu, ktorej argumentom je však náhodná premenná, ktorou je cena akcie. Volatilita sa mení v čase, ale len v závislosti na cene akcie<sup>63</sup>, no nie na žiadnej inej náhodnej premennej.

Model je strednou cestou medzi modelmi s úplne konštantnou volatilitou a modelmi

<sup>62</sup>Skratka vytvorená z anglického originálu „Constant elasticity of variance model“ - teda model s konštantnou elasticitou variancie.

<sup>63</sup>Tu sa viaceré zdroje rozchádzajú v tom, či sa jedná o súčasnú cenu akcie  $S$ , alebo o  $S_0 = S(0)$ , čo je počiatočná cena akcie známa pri vypísaní opčného kontraktu. V našej práci však budeme pri každom oceňovaní predpokladať fakt, že opciu práve vypisujeme a teda hoci bude na viacerých miestach odvodenia riešenia  $S_0$  formálne vystupovať, pri praktickej aplikácii na jeho mieste vždy využijeme aktuálnu cenu akcie  $S$ . Tento prístup sa dá interpretovať aj tak, že pri odvodzovaní modelu potrebujeme odlišiť náhodnú premennú  $S$ , od jej realizácie  $S_0$ , ktorú poznáme ku dňu oceňovania opcie. Vo výslednom vzorci už však tieto hodnoty môžu byť totožné - teda pri predpoklade, že opciu k tomuto dňu vypisujeme - ako je to napríklad v explicitnom riešení CEV modelu v zdroji [8, s. 26].

s volatilitou, kde je táto veličina popísaná vlastnou stochastickou rovnicou<sup>64</sup>. Model je obzvlášť cenený z dôvodu, že dokáže zachytiť „tzv. pákový efekt“, podľa ktorého sú ceny akcií a ich volatilita v inverznom vzťahu.

Vo funkcii, ktorú CEV model zavádza, aby vyjadril vzťah medzi cenou akcie  $S$  a jej volatilitou  $\sigma$ , je dodatočný parameter  $\gamma$ , ktorý určuje mieru tohto inverzného vzťahu. Ten je daný rovnicou:

$$\sigma(S, t) = \tilde{\sigma} S^{(\gamma-2)/2}.$$

Kde  $\tilde{\sigma}$  je umelá miera volatility vystupujúca v stochastickej diferenciálnej rovnici pre cenu akcie v tomto modeli:

$$dS = \hat{\mu} S dt + \tilde{\sigma} S^{\frac{\gamma}{2}} dW_t \quad SDR2$$

Možno vidieť, že v tomto modeli sa už cena akcie vo všeobecnosti neriadi geometrickým Brownovým pohybom (pre  $\gamma \neq 2$ ), a jej stochastická diferenciálna rovnica nemôže byť teda zapísaná v tvare (*SDR1*).

Môžeme si všimnúť, že spomínaný pákový efekt, kde dopad stochastickej zmeny  $dW_t$  je väčší, keď je cena akcie malá, je v modeli zachytený, ak platí  $\gamma < 2$ .

Je ešte potrebné spomenúť, že v zdroji [2, s. 35], je vzťah medzi mierou volatility  $\sigma$  a umelou mierou volatility  $\tilde{\sigma}$  popísaný ekvivalentne využitím počiatočnej ceny akcie ako:

$$\tilde{\sigma} = \sigma S_0^{1-\frac{\gamma}{2}}$$

nakoľko túto formu ich funkcionálneho vzťahu budeme neskôr v práci využívať.

Viacere štúdie ukazujú, že CEV model poskytuje presný opis správania sa ceny opcie.<sup>65</sup> Samozrejme sa však nájdu i štúdie, v ktorých je tento model objektom kritiky.

## 4.2 Schematické odvodenie rovnice CEV modelu

V tejto podkapitole rovnako ako v časti 3.2.2 predošlej kapitoly, schematicky odvodíme rovnicu, ktorú tento model rieši.

<sup>64</sup>Napríklad Hestonov model.

<sup>65</sup>V zdroji [8, s. 18] sa nachádzajú odvolávky na viacero zdrojov týchto štúdií.

1) *Stochastická diferenciálna rovnica pre vývoj ceny akcie a pre vývoj ceny derivátu:*

Znova sme schopní odvodiť stochastické diferenciálne rovnice, avšak tento raz pre cenu akcie využívame tvar (*SDR2*), a nie (*SDR1*), ako tomu bolo v prípade Black-Scholesovho modelu, a vzhľadom na to sa nám zmení i stochastická rovnica opisujúca vývoj ceny opcie.

2) *Vytvorenie bezrizikového portfólia a vyvodenie dôsledkov:*

V tejto časti sa opäť vytvára portfólio z jednej opcie s hodnotou  $V$  a  $-\delta$  akcií  $S$ , kde  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , znova sa pokúšame eliminovať riziko, a aj ďalší postup je už analogický ako v 3.2.2, preto v práci uvádzame priamo výsledok - želanú parciálnu diferenciálnu rovnicu.

#### 4.2.1 CEV parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 S^\gamma \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{CEV PDR}$$

Čo je v reči pôvodných premenných:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_0^2 \left( \frac{S}{S_0} \right)^\gamma \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{OR CEV PDR}$$

Výpočet presného riešenia je omnoho menej priamočiary, než je tomu v prípade Black-Scholesovho modelu a jeho výsledný tvar je signifikantne zložitejší<sup>66</sup>, zatiaľ čo výpočet dvojčlennej asymptotickej aproximácie pomocou metódy združených asymptotických rozvojev je takmer totožný s výpočtom aproximácie pre Black-Scholesov model, ktorý sme robili v predošlej kapitole v časti 3.3 . Takisto aj dosiahnuté výsledky sú relatívne jednoduchého tvaru<sup>67</sup>.

### 4.3 Aproximatívne riešenie CEV rovnice pomocou metódy združených asymptotických rozvojev

Ako sme už spomínali vyššie, postup riešenia je veľmi podobný hľadaniu aproximatívneho riešenia Black-Scholesovej rovnice, preto v práci detailne rozoberáme iba niektoré

<sup>66</sup>Možno ho nájsť v zdroji [8, s. 26-27], využíva necentralizované  $\chi^2$  rozdelenie s neceločíselnými stupňami voľnosti.

<sup>67</sup>V zmysle, že v nich vystupuje len hustota a distribučná funkcia štandardizovaného normálneho rozdelenia.

jeho časti.

### Škálovanie

V tomto bode je postup analogický s postupom riešenia Black-Scholesovej rovnice - najprv v rovnici zmeníme plynutie času a tento čas preškálujeme aby sa stal bezdimenzionálnym pomocou transformácie  $t' = (T - t)\sigma^2$ . Derivovaním zloženej funkcie a dosadením do (OR CEV PDR) dostávame preškálovanú rovnicu:

$$\frac{\partial V}{\partial t'} = \frac{1}{2}S_0^2 \left(\frac{S}{S_0}\right)^\gamma \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \alpha S \frac{\partial V}{\partial S} - \alpha V,$$

kde  $\alpha = \frac{r}{\sigma^2}$  je znova bezdimenzionálnou konštantou.<sup>68</sup>

V ďalšom postupe by sme rovnicu rovnako ako pri riešení Black-Scholesovej rovnice najprv škálovali v časovej premennej pomocou transformácie  $\tau = t'/\varepsilon^\eta$ , aby sme zohľadnili význam toho, že rovnicu riešime pre časy blízke maturite opcie, a neskôr pre riešenie na vnútornej oblasti by sme zasa do problému zaviedli aj  $\varepsilon^\nu$ , keďže je však v tomto aspekte tento nový problém analogický s tým už riešeným, môžeme rovno zvoliť  $\eta = 2$  a  $\nu = 1$ .

#### 4.3.1 Formulácia a riešenie problému na vonkajšej oblasti

Zavádzame teda transformáciu  $\tau = t'/\varepsilon^2$  a po využití pravidla derivovania zloženej funkcie a dosadení dostávame rovnicu:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \varepsilon^2 \frac{1}{2}S_0^2 \left(\frac{S}{S_0}\right)^\gamma \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \varepsilon^2 \alpha S \frac{\partial V}{\partial S} - \varepsilon^2 \alpha V, \quad (\text{Ú8})$$

Nakoľko sa interpretácia vonkajšej oblasti vzhľadom na predošlý výpočet v rámci Black-Scholesovej aproximácie nemení, znova  $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$  a vidíme, že dostávame rovnaký problém a teda i rovnaké riešenie uvedené v 3.3.3.

---

<sup>68</sup>V tomto bode je v zdroji [2, s. 36 dole] viacero chýb, jedna je zrejme iba preklep, namiesto  $t' = (T - t)\sigma^2$  je  $t' = T - t\sigma^2$ , druhá je však závažnejšia - ako nasledujúcu rovnicu po preškálovaní uvádzajú presne rovnicu vystupujúcu na tomto mieste v riešení Black-Scholesovho modelu a teda namiesto  $S_0^2 \left(\frac{S}{S_0}\right)^\gamma$  vystupuje člen  $S^2$ . Táto nepresnosť sa prenáša ešte do ďalšieho kroku, ktorým je odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice platné na vonkajšej oblasti.

### 4.3.2 Formulácia a riešenie problému na vnútornej oblasti

Teraz analogicky ako pri aproximatívnom riešení Black-Scholesovej rovnice na vnútornej oblasti zavádzame novú lokálnu premennú  $x$ :

$$x = \frac{S - K}{\varepsilon K} \quad \Leftrightarrow \quad S = K(1 + \varepsilon x)$$

a zároveň transformujeme celú funkciu na  $v(x, \tau)$ :

$$v(x, \tau) = \frac{V(S, \tau)}{\varepsilon K} \quad \Leftrightarrow \quad V(S, \tau) = \varepsilon K v(x, \tau)$$

Nakoľko nám tentoraz (na rozdiel od aproximatívneho riešenia Black-Scholesa) v rovnici už nevystupujú parametre  $\eta$  a  $\nu$ , pre väčšiu prehľadnosť uvádzame transformované členy, ktoré potom do rovnice dosádzame:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} &= \varepsilon K \frac{\partial v}{\partial \tau} \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= \varepsilon K \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{1}{\varepsilon K} \end{aligned}$$

Po dosadení, prenasobení členom  $\frac{\varepsilon}{K}$  a drobných úpravách dostávame rovnicu reprezentujúcu problém na vnútornej oblasti:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left( \frac{S_0}{K} \right)^{2-\gamma} (1 + \varepsilon x)^\gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon \alpha (1 + \varepsilon x) \frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon^2 \alpha v \quad (\text{Ú9})$$

S výplatnou funkciou rovnakou ako predtým a síce  $v(x, 0) = \max(x, 0)$ .

Následne zavádzame bezrozmerný parameter  $\kappa^2 = (S_0/K)^{2-\gamma}$ , viac menej kvôli skráteniu zápisu. Na rozdiel od riešenia Black-Scholesa však ešte znova škálujeme časovú premennú na tvar  $\tau_\gamma = \tau \kappa^2$ , aby sme získali rovnicu v tvare:

$$\kappa^2 \frac{\partial v}{\partial \tau_\gamma} = \frac{1}{2} \kappa^2 (1 + \varepsilon x)^\gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon \alpha (1 + \varepsilon x) \frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon^2 \alpha v$$

Z čoho po predelení parametrom  $\kappa^2$  dostávame:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau_\gamma} = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon x)^\gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon \tilde{\alpha} (1 + \varepsilon x) \frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon^2 \tilde{\alpha} v$$

kde

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\kappa^2}$$

Čo je už rovnica v podobnom tvare, než aká nám vystupuje ako úloha na vnútornej oblasti pre výpočet Black-Scholesovej aproximácie.

Teraz môžeme opäť hľadať riešenie v tvare asymptotického rozvoja:

$$v_\varepsilon(x, \tau_\gamma) = v_0(x, \tau_\gamma) + \varepsilon v_1(x, \tau_\gamma) + \dots$$

pričom je pre nás ešte výhodné si člen  $(1 + \varepsilon x)^\gamma$  taylorovsky rozviť pre  $\varepsilon$  v okolí nuly:

$$(1 + \varepsilon x)^\gamma = 1 + x\gamma\varepsilon + \frac{x^2\varepsilon^2(\gamma^2 - \gamma)}{2} + O(\varepsilon^3)$$

a po dosadení týchto rozvojev dostávame rovnicu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_\gamma} (v_0(x, \tau_\gamma) + \varepsilon v_1(x, \tau_\gamma) + \dots) &= \frac{1}{2} (1 + x\gamma\varepsilon + \dots) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_0(x, \tau_\gamma) + \varepsilon v_1(x, \tau_\gamma) + \dots) \\ &+ \varepsilon \tilde{\alpha} (1 + \varepsilon x) \frac{\partial}{\partial x} (v_0(x, \tau_\gamma) + \varepsilon v_1(x, \tau_\gamma) + \dots) \\ &- \varepsilon^2 \tilde{\alpha} (v_0(x, \tau_\gamma) + \varepsilon v_1(x, \tau_\gamma) + \dots) \end{aligned} \quad (Ú10)$$

Môžeme vidieť, že problém rádu  $O(\varepsilon^0)$  dostávame úplne totožný ako pri riešení Black-Scholesovej rovnice. Problém rádu  $O(\varepsilon)$  sa líši iba v konštantách  $\gamma$  a  $\tilde{\alpha}$ , ktoré vystupujú pri deriváciách funkcie  $v_0$ , pri riešení tohto problému už známej, a môžeme ich vnímať ako jemnú zmenu nenulovej pravej strany rovnice vedenia tepla. Riešenia by sme teda dostali analogicky ako predtým cez Greenové funkcie a v práci už uvádzame iba výsledky.

Aproximácia vnútorného riešenia má tvar:

$$v(x, \tau) \sim v_0(x, \tau_\gamma) + \varepsilon v_1(x, \tau_\gamma) = (x + \varepsilon\alpha\tau)N\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right) + \kappa\sqrt{\tau}\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon\gamma x\right)n\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right) \quad R3$$

Vidíme, že ak sa nastáva  $\gamma = 2$ , tak sa nám riešenie (R3) redukuje na tvar (R2).

V pôvodných premenných dostávame aproximatívne riešenie:

$$\begin{aligned} V(S, t) &= \varepsilon K v(x, \tau) \sim \varepsilon K (v_0(x, \tau_\gamma) + \varepsilon v_1(x, \tau_\gamma)), \\ &= \varepsilon K \left( (x + \varepsilon\alpha\tau)N\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right) + \kappa\sqrt{\tau}\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon\gamma x\right)n\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right) \right), \\ &= (S - K + rK(T - t))N\left(\frac{\kappa(S/K - 1)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) \\ &+ \kappa\sigma\sqrt{T - t}\left(\frac{\gamma S + (4 - \gamma)K}{4}\right)n\left(\frac{\kappa(S/K - 1)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) \end{aligned} \quad R4$$

Presnosť tohto riešenia rozoberáme v nasledovnej kapitole 5 a jeho využiteľnosť v praxi zasa v kapitole 6.

## 5 Grafické porovnanie cien daných našou aproximáciou CEV modelu a presným vzorcom Black-Scholesovho modelu

Ešte predtým ako nami odvodenú CEV aproximáciu, ktorej vzorec uvádzame na konci predošlej kapitoly ako riešenie (R4) aplikujeme na reálna dáta, v krátkosti ju pre hodnoty  $\gamma = 2$  porovnáme s Black-Scholesovým modelom, nakoľko ak by nám naša aproximácia, ak by bola dostatočne presná, mala dávať veľmi blízke výsledky. Podľa teórie by mal totiž CEV model pri takejto hodnote parametra  $\gamma$  presne zodpovedať Black-Scholesovmu modelu, ako sme to mohli vidieť z parciálnej diferenciálnej rovnice *OR CEV PDR*, ktoré cena opcie podľa CEV modelu spĺňa.

Praktické výpočty a grafické zobrazenia vykonávame v štatistickom softvéri R, niektoré z nami použitých kódov sú k dispozícii v prílohe A, napríklad v nej možno nájsť funkciu, ktorá počíta cenu akcie podľa nášho aproximatívneho vzorca CEV modelu `CEV_price_function (S_0,S, K, rf, t_back, sigma,gamma)` a explicitného vzorca na výpočet ceny opcie podľa Black-Scholesovho modelu `blackscholes (S, K, rf, t_back, sigma)`.

### Popis vstupných hodnôt

**S\_0 a S** - v prípade našich výpočtov budú vždy identické, nakoľko sa stotožňujeme s predstavou, že sami opcie k danému dňu vypisujeme, pretože nepoznáme presné dátumy výpisu opcií. Tento prístup sme odôvodnili v poznámke pod čiarou 63 v kapitole 4.

**K** - realizačná cena opcie.

**rf** - aktuálna ročná spojitá bezriziková úroková miera vypočítaná z aktuálnej ročnej úrokovej miery na americké vládne dlhopisy.<sup>69</sup>

**t\_back** - čas do maturity, zvolili sme bázu `Actual/360`, kde sme za dáta zo začiatku dňa zarátavali 0,75 zostávajúceho dňa za dáta z konca dňa 0,25.

---

<sup>69</sup>Tie máme zo zdroja [16]. Tento typ dlhopisov sme si zvolili kvôli akciám a opciám vystupujúcim v ďalšej kapitole kde sa jedná o výhradne americké spoločnosti.

**sigma a gamma** - Parametre  $\sigma$  a  $\gamma$ , teda miera volatility a miera „nepriamej úmery medzi cenou akcie a volatilitou“, ktorých optimálne hodnoty sa budeme snažiť v ďalšej, 6 kapitole, získať a interpretovať (vo funkcii oceňujúcej cez Black-Scholesa vystupuje iba  $\sigma$ ).

Najprv zobrazíme rôzne porovnania pre meniaci sa parameter  $\sigma$  v intervale  $(0, 1 >$ . Ostatné parametre zadávame nasledovne:

- $S=S_0=50$
- $K = 40$ , opcia je tzv. „in the money“.
- $t_{back} = 1/12$
- $rf=0.0046$
- $gamma=2$ .

Na nasledujúcom obrázku 6 máme červenou čiarou znázornené ceny získané CEV aproximáciou a čiernou farbou ceny získané aplikovaním explicitnej oceňovacej formuly Black-Scholesovho vzorca.<sup>70</sup>

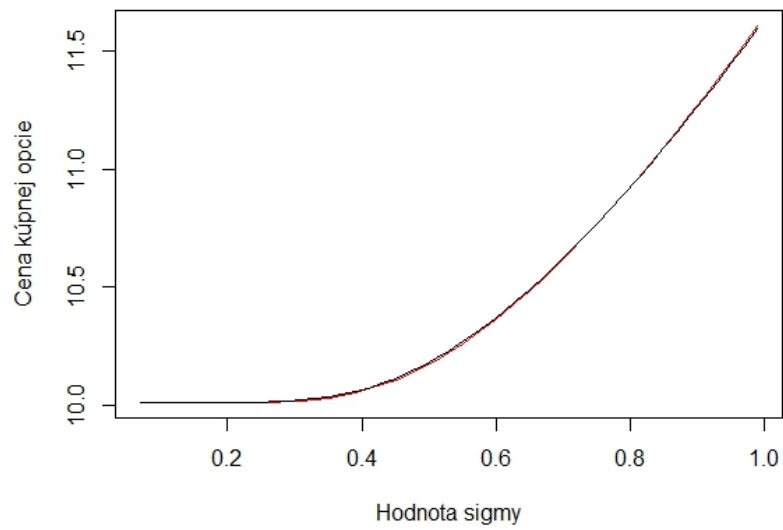
Vidíme, že tieto ceny sú skoro totožné, demonštrujeme to na ďalších dvoch obrázkoch 7 a 8, kde zobrazíme ich cenový rozdiel a percentuálny cenový rozdiel (v menovateli sa vyskytuje cena z CEV modelu):

---

<sup>70</sup>Rovnako je to na iných zobrazeniach porovnania cien, hoci niekedy je zhoda taká presná, že sa skôr vykreslená červená čiara takmer neukáže.

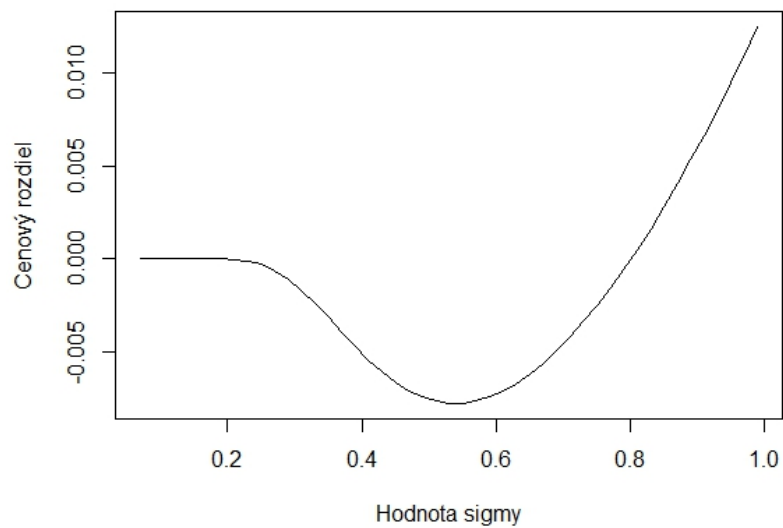


**Znázornenie cenových funkcií pre rôzne sigmy**

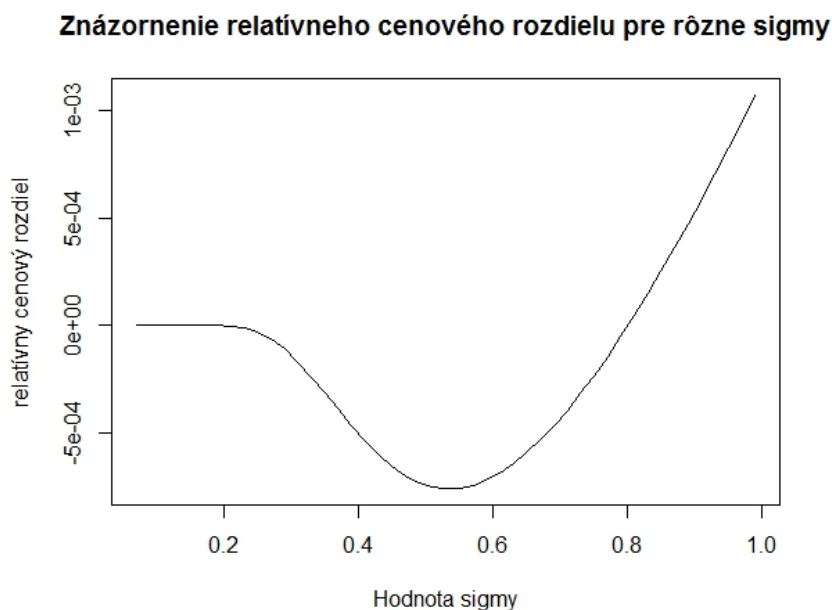


**Obr. 6:** Porovnanie cien.

**Znázornenie cenového rozdielu pre rôzne sigmy**



**Obr. 7:** Cenový rozdiel.



**Obr. 8:** Relatívny cenový rozdiel.

Môžeme si teda všimnúť, že pri rozumných hodnotách parametra  $\sigma$  (5-80%) je tento rozdiel v stotinách percent, čo indikuje naozaj výbornú zhodu.

Zobrazíme si ešte tieto ceny pre dve ďalšie realizačné ceny opcie<sup>71</sup>

1.  $K=50$ , opcia je tzv. „at the money“,
2.  $K=60$ , opcia je tzv. „out of the money“,

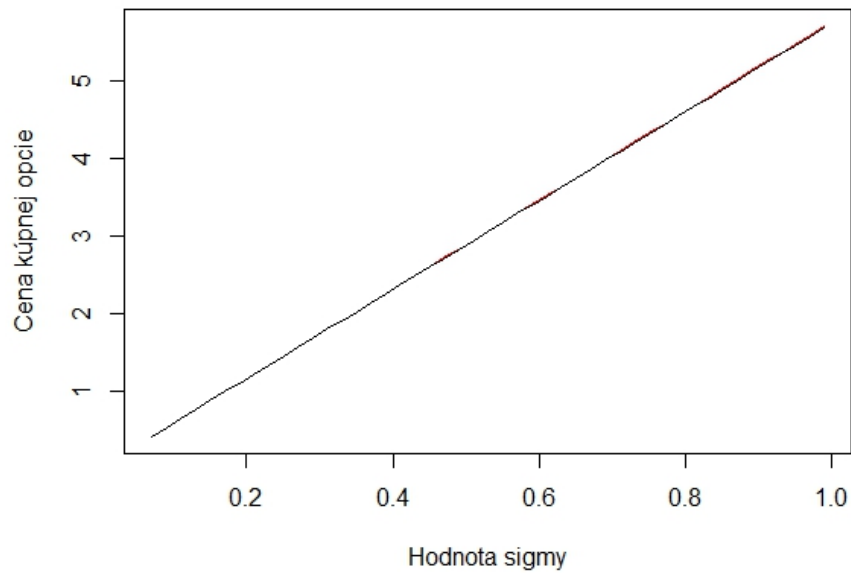
pričom obrázky sa nachádzajú na ďalšej strane, teda strane 59.

Okrem toho ešte na strane 60 znázorňujeme cenový rozdiel pre pevne daný parameter  $\sigma$  rovný 0,2 a meniacu sa cenu akcie  $S$  v rozsahu  $< 40, 60 >$ <sup>72</sup>.

<sup>71</sup> Nezobrazujeme chyby jednak kvôli úsporným dôvodom a jednak kvôli tomu, že pre druhú spomenutú hodnotu realizačnej ceny z dôvodu nepresnosti CEV aproximácie a R výpočtov dáva oceňovací vzorec jemne záporné hodnoty opcie (v ráde  $10^{-5}$  a potom prechádza cez nulu) a samotná absolútna chyba je pre tak malé hodnoty opcie len ťažko interpretovateľná. Viac sme sa touto vlastnosťou aproximácie CEV modelu nezaoberali, nakoľko pri praktických výpočtoch reálnych trhových dátach v ďalšej kapitole získavame také parametre, že nám tento model takmer nikdy neposkytuje záporné ceny (pár údajov medzi rádovo stovkami) a kde áno, odráža sa nám to na vyššej absolútnej chybe a tým aj horšej kvalite modelu.

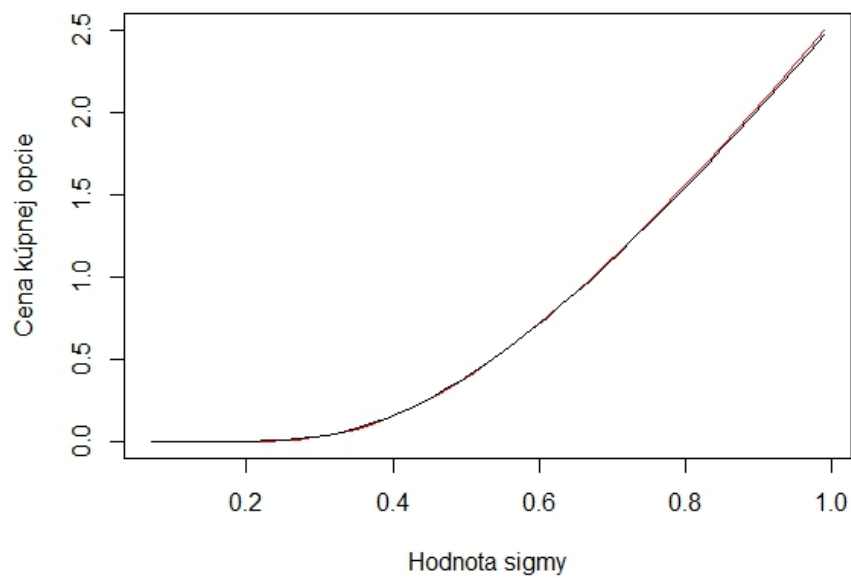
<sup>72</sup> Chyby nezobrazujeme z rovnakého dôvodu ako predtým.

**Znázornenie cenových funkcií pre rôzne sigmy**



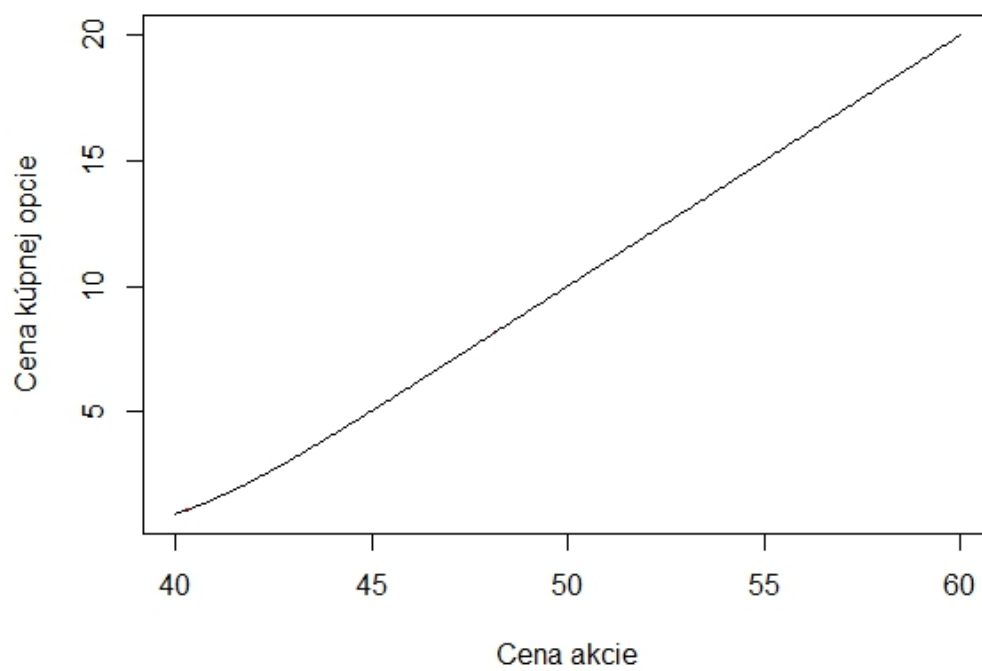
**Obr. 9:** Porovnanie cien.

**Znázornenie cenových funkcií pre rôzne sigmy**



**Obr. 10:** Porovnanie cien.

**Znázornenie cenových funkcií pre rôzne ceny akcie**



Obr. 11: Porovnanie cien.

## 6 Aplikácia aproximatívneho riešenia CEV modelu na fitovanie a predikovanie cien opcí pomocou reálnych trhových dát

Zatiaľ čo v predošlých kapitolách bolo hlavným cieľom rozobrať a na príkladoch aplikovať teóriu metódy združených asymptotických rozvojev<sup>73</sup>, potom aproximáciu CEV modelu ňou získanú vizuálne porovnať s Black-Scholesovým modelom a vyvodiť príslušné závery o jej presnosti<sup>74</sup>; cieľom tejto kapitoly je nadobudnuté výsledky prakticky využiť. Zameriavame sa znova na aproximáciu CEV modelu<sup>75</sup>, teraz však z aplikačného hľadiska. Naším výskumným cieľom je odhadovať parametre modelu, teda  $\sigma$  a  $\gamma$ , pomocou optimalizačnej procedúry, využitím reálnych trhových dát. Optimálnymi parametrami v tejto kapitole nazývame také, pre ktoré ceny získané zo vzorca aproximácie CEV modelu najlepšie fitujú reálnu trhovú cenu. Konkrétne bude cieľom vybrať tieto parametre tak, že budú argumentom minima funkcie obsahujúcej sumu členov tvaru:

$$\frac{|\text{Trhová hodnota} - \text{Náš Odhad}|}{\text{Trhová hodnota}}$$

Podiel sme zvolili preto, aby sme minimalizovali percentuálne, a nie absolútne chyby. Absolútna hodnota nachádzajúca sa iba v čitateli je ekvivalentná s absolútnou hodnotou celého výrazu, nakoľko trhovú hodnotu je vždy kladná, domnievame sa však, že z numerických dôvodov bude lepšie ju v optimalizačnej procedúre uviesť len do čitateľa.

Pod priemernou chybou oceňovania, resp. priemernou chybou daného oceňovacieho modelu budeme v nasledovnom texte rozumieť priemer z absolútnych percentuálnych chýb, teda

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{(\text{Trhová hodnota}_i - \text{Náš Odhad}_i)}{\text{Trhová hodnota}_i} \right|$$

čo je vlastne hodnota účelovej funkcie, ktorá bola minimalizovaná na zistenie optimálnych parametrov, vydelená počtom údajov v danej vzorke na dát, na ktorých bola vykonávaná.

<sup>73</sup>To sme robili v kapitolách 1,2,3 a 4.

<sup>74</sup>O tomto bola kapitola 5

<sup>75</sup>Hlavnými zdrojmi teoretických poznatkov na ktoré sa v tejto kapitole odvolávame sú opäť [2] a [8], pokiaľ nie je v texte práce explicitne uvedené inak.

Práve tieto chyby uvažujeme za kvalitatívne kritérium na základe ktorého výsledky ohodnocujeme a porovnávame.

## 6.1 Popis trhových dát

Skôr, než prejdeme na praktickú realizáciu výpočtov, priblížime čitateľovi formát, v akom sú trhové dáta zapísané a význam jednotlivých položiek, nakoľko sa na ne neskôr v práci budeme odvolávať. Budeme používať údaje týkajúce sa kúpnych opcií, ktoré sme získali z najznámejšieho finančného portálu `finance.yahoo`<sup>76</sup>. Uvádzame jednu tabuľku trhových dát, konkrétne na opcie zo dňa 30.06.2016 so splatnosťou 22.06.2016 na akcie spoločnosti Yahoo.

**Tabuľka 1:** Ukážkový výpis kúpnych opcií zo dňa 30.06.2016 s maturitou 22.07.2016 na akcie firmy Yahoo.

	strike	name	last	bid	ask	change	per_change	volume	open_interest	implied_volatility
1	32.50	YHOO160722C00032500	3.43	0.00	0.00	0.00	0.00%	3	0	0.00%
2	33.00	YHOO160722C00033000	5.10	3.95	5.10	0.00	0.00%	3	0	58.40%
3	33.50	YHOO160722C00033500	2.67	0.00	0.00	0.00	0.00%	3	0	0.00%
4	34.50	YHOO160722C00034500	2.65	2.40	2.85	-0.73	-21.60%	4	1	37.99%
5	35.00	YHOO160722C00035000	1.78	0.00	0.00	0.00	0.00%	10	0	0.00%
6	35.50	YHOO160722C00035500	1.38	0.00	0.00	0.00	0.00%	1	0	0.00%
7	36.00	YHOO160722C00036000	1.72	1.78	1.89	0.37	27.41%	10	308	38.92%
8	36.50	YHOO160722C00036500	0.98	0.00	0.00	0.00	0.00%	4	0	0.00%
9	37.00	YHOO160722C00037000	1.20	1.21	1.30	0.33	37.93%	150	397	37.01%
10	37.50	YHOO160722C00037500	0.89	0.94	1.06	0.19	27.14%	40	136	36.43%
11	38.00	YHOO160722C00038000	0.84	0.76	0.85	0.32	61.54%	19	835	35.84%
12	38.50	YHOO160722C00038500	0.38	0.40	0.46	-0.07	-15.56%	68	217	28.86%
13	39.00	YHOO160722C00039000	0.41	0.45	0.54	0.11	36.67%	7	1203	35.55%
14	39.50	YHOO160722C00039500	0.20	0.20	0.28	-0.50	-71.43%	34	22	30.08%
15	40.00	YHOO160722C00040000	0.25	0.21	0.33	0.06	31.58%	20	283	35.40%
16	40.50	YHOO160722C00040500	0.07	0.09	0.16	-0.50	-87.72%	119	1	30.76%
17	41.00	YHOO160722C00041000	0.10	0.00	0.25	-0.02	-16.67%	2	0	38.18%
18	41.50	YHOO160722C00041500	2.55	0.00	2.25	2.15	537.50%	3	1023	73.24%
19	42.00	YHOO160722C00042000	0.04	0.00	0.09	-0.15	-78.95%	1	147	33.79%
20	43.00	YHOO160722C00043000	0.06	0.02	0.19	0.00	0.00%	1	0	45.70%
21	43.50	YHOO160722C00043500	2.42	0.00	2.17	2.05	554.05%	3	3	85.60%
22	44.00	YHOO160722C00044000	0.25	0.01	2.27	0.00	0.00%	5	5	90.63%

<sup>76</sup>Uvádzame ho ako zdroj [4]

## Jednotlivé stĺpce znamenajú

**strike** - realizačná cena opcie.

**name** - názov opcie, prvá časť zahŕňa trhovú skratku mena spoločnosti, na ktorej akciu je opcia vypísaná - v našom prípade je to YH00, potom nasleduje dátum splatnosti v tvare RR-MM-DD, ďalej C naznačuje, že sa jedná o kúpnu opciu, a v koncovkej číslici je uložená realizačná cena opcie (prvých päť miest sú hodnoty pred desatinnou čiarkou a ďalšie štyri po nej).

**last** - posledná cena, pri ktorej bol realizovaný obchod. Práve túto cenu budeme považovať za skutočnú cenu opcie v našich výpočtoch.

**bid** - cena, ktorá je na trhu núkaná ako výkupná.<sup>77</sup>

**ask** - cena, ktorá je na trhu núkaná ako predajná.

**change** - absolútna zmena ceny akcie.

**per\_change** - relatívna zmena ceny akcie.

**volume** - denný objem ochodovaných opcií.<sup>78</sup>

**open\_interest** - celkové množstvo opčných kontraktov, ktoré nie sú uzavreté alebo doručené v daný deň.<sup>79</sup> Toto číslo je často podceňované, určuje však potenciál danej opcie, nakoľko sa s ňou môže obchodovať aj na tzv „sekundárnych trhoch“ a preto skutočný denný objem obchodovaných opcií môže byť omnoho vyšší, než je hodnota „volume“. Tieto dve veličiny budeme v práci považovať za mieru likvidity, teda „obchodovateľnosti“ akcie.

**implied volatility** - implikovaná volatilita akcie podľa Black-Scholesovho vzorca na oceňovanie derivátov.

---

<sup>77</sup>Touto a nasledovnými tromi veličinami sa v práci veľmi nezaobráame, preto si vystačíme len s krátkym popisom

<sup>78</sup>Popis tohto pojmu čerpáme zo stránky [investopedia\\_volume](#), ktorej hlavná stránka je uvedená ako zdroj [7].

<sup>79</sup>Popis tohto pojmu čerpáme zo stránky [investopedia\\_open\\_interest](#), ktorej hlavná stránka je uvedená ako zdroj [7].

Budeme optimálne parametre zo vzorca aproximácie CEV modelu<sup>80</sup> pre opcie na akcie firiem Yahoo, Google a Starbucks. Rozlišovať budeme údaje pre opcie zodpovedajúce rôznych expiračným dobám, okrem toho však aj v rámci danej expiračnej doby budeme vhodným spôsobom filtrovať rôzne podskupiny dát, ktoré budú spĺňať niektoré pre nás výhodné charakteristiky.

## 6.2 Výskumné hypotézy

Hneď na úvod treba poznamenať, že sa nebude jednať o štandardné štatistické hypotézy, nakoľko našim cieľom je len získať nejaký náhľad, ako dané optimalizácie fungujú, teda ako sa naša CEV aproximácia správa v praxi v porovnaní s Black-Scholesovým modelom. Naše hypotézy teda odvádzame racionálnym zdôvodnením a ich platnosť vzhľadom na naše konkrétne dáta budeme usudzovať podľa interpretácie výsledkov našich experimentov.

Naším cieľom je zistiť, nakoľko presne dokáže CEV model (teda naša aproximácia, ktorú používame), pri parametroch odhadnutých vyššie spomenutou optimalizačnou procedúrou

- fitovať reálne ceny opcií z tréningovej vzorky,
- fitovať reálne ceny opcií z testovacej vzorky,

v porovnaní s explicitným riešením Black-Scholesovho modelu<sup>81</sup> pri  $\sigma$ , ktorú sme dostali predošlou optimalizáciou. Takisto pre tie isté dáta vykonávame aj optimalizáciu na fitovanie cien pomocou B-S modelu na získanie optimálneho parametra  $\sigma$ , a zisťujeme cenu cez B-S model, ale aj cez CEV aproximáciu, kde parameter  $\gamma$  položíme rovný 2.

### Naše hypotézy sú:

- Pre opcie vypísané na akcie spoločnosti z významne odlišných odvetví sa nám odhadované hodnoty  $\sigma$  budú v priemere pomerne výrazne líšiť, zatiaľ čo pre akcie spoločností z toho istého odvetvia nám tieto hodnoty budú vychádzať príbuzné.

<sup>80</sup>V rámci tejto kapitoly na niektorých miestach používame skrátené termíny „CEV model“, prípadne len „CEV“, vždy však máme na mysli jeho aproximáciu.

<sup>81</sup>Ďalej v tejto kapitole pri referencii na tento model používame skratku „B-S model“, prípadne len „B-S“



- Pre parameter  $\sigma$  získaný fitovaním cien z  $B - S$  modelu získame vždy lepšie výsledky B-S fitu než pre  $\sigma$  získané z CEV optimalizácie. Táto hypotéza by viacmenej mala potvrdiť význam optimalizačných procedúr.
- Pre vzorky údajov obsahujúcich dostatočný počet dát by nám optimálna hodnota parametra  $\sigma$  získaná cez fitovanie cien z B-S modelu vyjde veľmi príbuzná cene CEV aproximácie pri parametri  $\gamma = 2$ .
- CEV model sa nám ukáže využiteľnejší (dávajúci lepšie fity) pre lepšie obchodovateľné dáta (vyššie hodnoty „volume“ a „open\_interest“)<sup>82</sup> v porovnaní z tými horšie obchodovateľnými (nižšie hodnoty týchto veličín), nakoľko tie lepšie zodpovedajúci teoretickému oceňovaniu a empirickému pozorovaniu z mnohoročných trhových skúseností, že volatilita a cena opcie sú vo vzťahu nepriamej úmery, čo dokáže lepšie zachytiť CEV model tým, že parameter  $\gamma$  je signifikantne menší ako 2.<sup>83</sup> Ak sú dáta nízko obchodovateľné, tak nám cena môže vyjsť ďaleko od teoretickej, pričom sa táto negatívna závislosť ceny a volatility nemusí prejaviť a CEV aproximácia sa nám môže javiť ako nepotrebná (fity rovnako dobré alebo horšie než tie z B-S modelu pri hodnote parametra  $\sigma$  zistenú fitovaním CEV cien). Túto hypotézu nazveme hlavnou výskumnou hypotézou.
- Táto hypotéza nadväzuje na predošlú: Parametre zistené pri optimalizovaní cez lepšie obchodovateľné dáta nám poskytnú presnejšie predikcie cien opcií než parametre zistené pri optimalizovaní cez horšie obchodovateľné dáta.
- Takisto nadväznosť na predošlé: Presnejšie predikcie dostaneme pre lepšie obchodovateľné dáta.<sup>84</sup>

### 6.3 Jednomaturitné optimalizácie

Kvôli viacerým hypotézam (prvé štyri) potrebujeme dostatok vhodných vzoriek údajov na to, aby sme na ne dokázali odpovedať. Z toho dôvodu vykonávame nie len optimali-

---

<sup>82</sup>Presné hodnoty charakterizujeme a zdôvodníme neskôr, podľa povahy konkrétnych skúmaných dát

<sup>83</sup> Zdroj [8, s. 30].

<sup>84</sup>Zdôvodnenie je podobné ako v predošlých dvoch hypotézach

záciu cez viacero maturít, ale aj optimalizáciu cez samotné jednomaturitné údaje. Preto sme z pre údajov ohľadom kúpnych opcí prislúchajúcim štyrom maturitám tréningovej vzorky (22.07., 29.07., 05.08. a 19.08. roku 2016) pre každú zo spoločností Yahoo a Starbucks a dvom maturitám pre spoločnosť Google (22.07., 29.07. roku 2016) vytriedili niektoré z nasledovných podskupín dát, ktoré sme potom použili na jednomaturitnú optimalizáciu:

**Obchodovateľné dáta** - denné trhové dáta, pre ktoré je hodnota veličiny „open\_interest“ väčšia ako 50. Takéto opcie majú reálny obchodovací potenciál a zväčša (v našich skúmaných prípadoch vždy) aj nenulovú hodnotu veličiny „volume“ a teda aj cena poskytnutá v trhových údajoch aspoň ako-tak dáva zmysel.

**Dostatočne obchodovateľné dáta** - okrem predošlého kritéria pridávame kritérium, aby bola hodnota veličiny „volume“ väčšia ako 10.

**Skvele obchodovateľné dáta** - obe kritéria signifikantne zosilňujeme - veličinu „open\_interest“ žiadame väčšiu ako ako 200 a veličinu „volume“ väčšiu ako 100. Toto sú už opcie, s ktorými sa v daný deň zaručene obchodovalo vo veľkých množstvách a majú aj obrovský obchodovací potenciál. Teda očakávame, že ak je oceňovací model správny, tieto ceny by mal modelovať najpresnejšie.

## 6.4 Testovanie jednomaturitných dát

Samotné fitovanie cien z CEV modelu sme vykonávali pomocou nami naprogramovanej funkcie `optim1maturita (suitable_data, S, r, t_back)`, ktorej zdrojový kód sa nachádza medzi zdrojovými kódmi ostatných používaných funkcií v prílohe A.

V praxi sa však jedná o to, že sa pripraví potrebné vstupy do funkcie `auglag(x0, fcia, lower = lb, upper = ub)`, ktorá zabezpečuje nelineárnu optimalizáciu v softvéri R<sup>85</sup>, konkrétne minimalizáciu funkcie spomínanej v úvode kapitoly, a výstupom tejto našej naprogramovanej funkcie je výstup tejto optimalizačnej procedúry, kde ako argumenty maxima sú uvedené optimálne parametre  $\sigma$  a  $\gamma$  pre daný výber dát.

<sup>85</sup>Dokumentácia k tejto funkcii v R je uvedená ako zdroj [12] a dokumentácia k nelineárnej optimalizačnej procedúre COBYLA, ktorý sa v tejto funkcii používa, je uvedený ako zdroj [11].

Úplne analogicky sme naprogramovali funkciu `optim1maturitaBS (suitable_data,S,r ,t_back)`, ktorá fituje cenu B-S modelu.

Potom používame nami vytvorenú funkciu `zobrazenie_a_tabulka_vysledkov (suit_dat,S,r t_back,opt_par)`, ktorá slúži na vytvorenie prehľadnej tabuľky výsledkov a výpis priemerných absolútnych percentuálnej chýb odhadu ceny pomocou CEV a B-S modelu pri daných parametroch<sup>86</sup>.

### Ukážka testovania jednomaturitných dát pre opcie na spoločnosť Starbucks

Na tomto mieste uvádzame ukážku, ako približne vyzerali páry príbuzných optimalizácií, ktoré sa robili pre konkrétnu maturitu.<sup>87</sup> Vzhľadom na celkový počet takýchto optimalizácií - 21 pre CEV model a rovnaký počet pre B-S model, v práci nemáme dostatok priestoru na detailný popis a zobrazenie tejto procedúry pre všetky údaje. Tento príklad uvádzame na kúpnych opciách na akcie spoločnosti Starbucks zo dňa 01.07.2016 s maturitou 22.07.2016. Postupne sú v tabuľkách ukázané celkové dáta - strana 68, a potom jednotlivé výbery - tabuľky sú na stranách 69,71 a 72. Môžeme si všimnúť, že dáta zo striktnejšieho kritéria sú vždy podmnožinou predošlých dát a hoci obsahujú údaje, ktoré by mali vernejšie popisovať trhové ceny než predošlý výber, dát je menej a teda dôveryhodnosť a interpretovateľnosť optimalizovanej procedúry sa zhoršuje.

Optimálne parametre cez CEV optimalizáciu pre „Obchodovateľné dáta“, ktorých je 15, a ich výber je zobrazený na strane 69, sú  $\sigma = 0,1881$  a  $\gamma = 1,239$ . Priemerné chyby oceňovania sú pre CEV 13,87% a pre B-S 17,52%. Presnosť konkrétnych cien je ohodnotená absolútnou percentuálnou chybou a tie sú na ukážku v tabuľke výsledkov na strane 70.

Pre B-S optimalizáciu na vyšiel optimálny parameter  $\sigma = 0,175$  a priemerné chyby oceňovania sú pre CEV 16,68% a pre B-S 15,46%.

Optimálne parametre pre „Dostatočne obchodovateľné dáta“, ktorých je 13, a ich výber je zobrazený na strane 71, sú  $\sigma = 0,1876$  a  $\gamma = 1.5327$ . Priemerné chyby oceňovania sú pre CEV 11,98% a pre B-S 17,15%. Celkové výsledky sú v tabuľke opäť

<sup>86</sup>Do B-S ceny berieme len parameter  $\sigma$ , ako sme to už spomínali vyššie

<sup>87</sup>R kód k tejto časti práce možno nájsť v prílohe B a využívajú sa v ňom nami naprogramované funkcie uvedené v prílohe A.

**Tabuľka 2:** výpis kúpnych opcí zo dňa 01.07.2016 s maturitou 22.07.2016 na akcie firmy Starbucks.

	strike	name	last	bid	ask	change	per_change	volume	open_interest	implied_volatility
1	45.00	SBUX160722C00045000	12.20	11.80	12.60	0.30	2.52%	10	20	67.68%
2	50.00	SBUX160722C00050000	6.06	5.30	5.45	0.00	0.00%	1	1	0.00%
3	51.00	SBUX160722C00051000	5.20	4.45	4.65	0.00	0.00%	1	1	0.00%
4	52.00	SBUX160722C00052000	4.20	4.25	4.40	0.00	0.00%	317	0	0.00%
5	52.50	SBUX160722C00052500	3.00	2.99	3.20	0.00	0.00%	2	2	0.00%
6	53.00	SBUX160722C00053000	2.15	0.00	0.00	0.00	0.00%	20	0	0.00%
7	53.50	SBUX160722C00053500	1.82	0.00	0.00	0.00	0.00%	11	0	0.00%
8	54.00	SBUX160722C00054000	3.64	3.35	3.55	1.73	90.58%	14	108	31.79%
9	54.50	SBUX160722C00054500	3.18	2.97	3.15	0.08	2.58%	5	116	30.91%
10	55.00	SBUX160722C00055000	2.68	2.59	2.67	-0.02	-0.74%	18	20766	28.03%
11	55.50	SBUX160722C00055500	2.33	2.24	2.33	-0.03	-1.27%	36	349	27.78%
12	56.00	SBUX160722C00056000	1.95	1.91	1.97	-0.15	-7.14%	35	7958	26.71%
13	56.50	SBUX160722C00056500	1.67	1.61	1.66	-0.08	-4.57%	391	8809	26.12%
14	57.00	SBUX160722C00057000	1.36	1.34	1.38	-0.12	-8.11%	146	621	25.64%
15	57.50	SBUX160722C00057500	1.20	1.09	1.13	0.02	1.69%	20	421	25.15%
16	58.00	SBUX160722C00058000	0.90	0.87	0.92	-0.06	-6.25%	28	573	24.90%
17	58.50	SBUX160722C00058500	0.80	0.68	0.72	0.03	3.90%	24	267	24.32%
18	59.00	SBUX160722C00059000	0.55	0.53	0.57	-0.07	-11.29%	22	307	24.17%
19	59.50	SBUX160722C00059500	0.48	0.40	0.44	-0.02	-4.00%	28	92	23.93%
20	60.00	SBUX160722C00060000	0.33	0.30	0.33	-0.04	-10.81%	31	312	23.58%
21	60.50	SBUX160722C00060500	0.27	0.26	0.29	0.08	42.11%	14	13	24.71%
22	61.00	SBUX160722C00061000	0.21	0.16	0.18	0.02	11.11%	11	101	23.19%
23	62.00	SBUX160722C00062000	0.13	0.07	0.17	0.03	30.00%	10	53	26.56%
24	63.00	SBUX160722C00063000	0.06	0.00	0.09	0.00	0.00%	4	9	25.98%
25	65.00	SBUX160722C00065000	0.03	0.00	0.04	-0.01	-25.00%	5	4	27.74%

**Tabuľka 3:** Výber dát z kúpnych opcí zo dňa 01.07.2016 s maturitou 22.07.2016 na akcie firmy Starbucks, ktorý sme nazvali ako „Obchodovateľné dáta“.

	strike	name	last	bid	ask	change	per_change	volume	open_interest	implied_volatility
8	54.00	SBUX160722C00054000	3.64	3.35	3.55	1.73	90.58%	14	108	31.79%
9	54.50	SBUX160722C00054500	3.18	2.97	3.15	0.08	2.58%	5	116	30.91%
10	55.00	SBUX160722C00055000	2.68	2.59	2.67	-0.02	-0.74%	18	20766	28.03%
11	55.50	SBUX160722C00055500	2.33	2.24	2.33	-0.03	-1.27%	36	349	27.78%
12	56.00	SBUX160722C00056000	1.95	1.91	1.97	-0.15	-7.14%	35	7958	26.71%
13	56.50	SBUX160722C00056500	1.67	1.61	1.66	-0.08	-4.57%	391	8809	26.12%
14	57.00	SBUX160722C00057000	1.36	1.34	1.38	-0.12	-8.11%	146	621	25.64%
15	57.50	SBUX160722C00057500	1.20	1.09	1.13	0.02	1.69%	20	421	25.15%
16	58.00	SBUX160722C00058000	0.90	0.87	0.92	-0.06	-6.25%	28	573	24.90%
17	58.50	SBUX160722C00058500	0.80	0.68	0.72	0.03	3.90%	24	267	24.32%
18	59.00	SBUX160722C00059000	0.55	0.53	0.57	-0.07	-11.29%	22	307	24.17%
19	59.50	SBUX160722C00059500	0.48	0.40	0.44	-0.02	-4.00%	28	92	23.93%
20	60.00	SBUX160722C00060000	0.33	0.30	0.33	-0.04	-10.81%	31	312	23.58%
22	61.00	SBUX160722C00061000	0.21	0.16	0.18	0.02	11.11%	11	101	23.19%
23	62.00	SBUX160722C00062000	0.13	0.07	0.17	0.03	30.00%	10	53	26.56%

na strane 71.

Vidíme, že ako sa nám výber dát zužuje smerom k lepšie obchodovateľným, obe chyby klesajú, chyba CEV modelu však percentuálne i absolútne klesá viac.

Pre B-S optimalizáciu na vyšiel optimálny parameter  $\sigma = 0,1737$  a priemerné chyby oceňovania sú pre CEV 14,19% a pre B-S 13,29%.

Optimálne parametre pre „Skvele obchodovateľné dáta“, ktoré sú len 2, a ich výber je zobrazený na strane 72, sú  $\sigma = 0,1478$  a  $\gamma = 1,6639$ . Priemerné chyby oceňovania sú pre CEV 1,99% a pre B-S 10,44%. Celkové výsledky sú v druhej tabuľke na strane 72.

Optimálna B-S  $\sigma = 0,1184$  a chyby sú CEV 8,24% a B=S 2,39%.

Dát je už veľmi málo, preto sa takýmto priepastným rozdielom v presnosti nemožno čudovať, na druhej strane im nemožno ani prikladať nejakú veľkú interpretačnú hodnotu.

**Tabuľka 4:** Zobrazenie výsledkov pre aplikovanie optimalizovaných paramaterov na „Obchodovateľné dáta“ kúpnych opcii zo dňa 01.07.2016 s maturitou 22.07.2016 na akcie firmy Starbucks.

	last	cev_ceny	cev_perc_chyba	bs_ceny	bs_perc_chyba
1	3.64	4.07623	-11.984%	4.09988	-12.634%
2	3.18	3.59828	-13.153%	3.63703	-14.372%
3	2.68	3.13215	-16.871%	3.18782	-18.948%
4	2.33	2.68395	-15.191%	2.75682	-18.318%
5	1.95	2.2605	-15.923%	2.34898	-20.461%
6	1.67	1.8686	-11.892%	1.96929	-17.922%
7	1.36	1.51421	-11.339%	1.62227	-19.285%
8	1.2	1.20167	-0.14%	1.31155	-9.296%
9	0.9	0.93325	-3.694%	1.03944	-15.493%
10	0.8	0.70892	11.385%	0.80674	-0.842%
11	0.55	0.52657	4.259%	0.61263	-11.388%
12	0.48	0.38242	20.33%	0.45486	5.237%
13	0.33	0.27155	17.712%	0.33	0%
14	0.21	0.1281	38.998%	0.16174	22.98%
15	0.13	0.05543	57.361%	0.07195	44.656%

**Tabuľka 5:** Výber dát z kúpnych opcí zo dňa 01.07.2016 s maturitou 22.07.2016 na akcie firmy Starbucks, ktorý sme nazvali ako „Dostatočne obchodovateľné dáta“.

	strike	name	last	bid	ask	change	per_change	volume	open_interest	implied_volatility
8	54.00	SBUX160722C00054000	3.64	3.35	3.55	1.73	90.58%	14	108	31.79%
10	55.00	SBUX160722C00055000	2.68	2.59	2.67	-0.02	-0.74%	18	20766	28.03%
11	55.50	SBUX160722C00055500	2.33	2.24	2.33	-0.03	-1.27%	36	349	27.78%
12	56.00	SBUX160722C00056000	1.95	1.91	1.97	-0.15	-7.14%	35	7958	26.71%
13	56.50	SBUX160722C00056500	1.67	1.61	1.66	-0.08	-4.57%	391	8809	26.12%
14	57.00	SBUX160722C00057000	1.36	1.34	1.38	-0.12	-8.11%	146	621	25.64%
15	57.50	SBUX160722C00057500	1.20	1.09	1.13	0.02	1.69%	20	421	25.15%
16	58.00	SBUX160722C00058000	0.90	0.87	0.92	-0.06	-6.25%	28	573	24.90%
17	58.50	SBUX160722C00058500	0.80	0.68	0.72	0.03	3.90%	24	267	24.32%
18	59.00	SBUX160722C00059000	0.55	0.53	0.57	-0.07	-11.29%	22	307	24.17%
19	59.50	SBUX160722C00059500	0.48	0.40	0.44	-0.02	-4.00%	28	92	23.93%
20	60.00	SBUX160722C00060000	0.33	0.30	0.33	-0.04	-10.81%	31	312	23.58%
22	61.00	SBUX160722C00061000	0.21	0.16	0.18	0.02	11.11%	11	101	23.19%

**Tabuľka 6:** Zobrazenie výsledkov pre aplikovanie optimalizovaných parametrov na „Dostatočne obchodovateľné dáta“ kúpnych opcí zo dňa 01.07.2016 s maturitou 22.07.2016 na akcie firmy Starbucks.

	last	cev_ceny	cev_perc_chyba	bs_ceny	bs_perc_chyba
1	3.64	4.09837	-12.593%	4.11695	-13.103%
2	2.68	3.17099	-18.321%	3.21957	-20.133%
3	2.33	2.73246	-17.273%	2.79729	-20.055%
4	1.95	2.31868	-18.907%	2.39837	-22.993%
5	1.67	1.93554	-15.901%	2.02705	-21.38%
6	1.36	1.5881	-16.772%	1.68707	-24.049%
7	1.2	1.27995	-6.662%	1.38136	-15.114%
8	0.9	1.01289	-12.544%	1.11176	-23.529%
9	0.8	0.78684	1.645%	0.87883	-9.854%
10	0.55	0.59997	-9.085%	0.68186	-23.975%
11	0.48	0.44907	6.444%	0.51896	-8.117%
12	0.33	0.33	0%	0.38728	-17.356%
13	0.21	0.1688	19.617%	0.203	3.332%

**Tabuľka 7:** Výber dát z kúpnych opcií zo dňa 01.07.2016 s maturitou 22.07.2016 na akcie firmy Starbucks, ktorý sme nazvali ako „Skvele obchodovateľné dáta“.

strike	name	last	bid	ask	change	per_change	volume	open_interest	implied_volatility	
13	56.50	SBUX160722C00056500	1.67	1.61	1.66	-0.08	-4.57%	391	8809	26.12%
14	57.00	SBUX160722C00057000	1.36	1.34	1.38	-0.12	-8.11%	146	621	25.64%

**Tabuľka 8:** Zobrazenie výsledkov pre aplikovanie optimalizovaných paramaterov na „Skvele obchodovateľné dáta“ kúpnych opcií zo dňa 01.07.2016 s maturitou 22.07.2016 na akcie firmy Starbucks.

	last	cev_ceny	cev_perc_chyba	bs_ceny	bs_perc_chyba
1	1.67	1.60136	4.11%	1.74978	-4.777%
2	1.36	1.19178	12.369%	1.36	0%

## 6.5 Testovanie viacmaturitných dát a predikcia

Cieľom našej práce bolo aj overiť predikčnú schopnosť CEV modelu, preto sme údaje ohľadom kúpnych opcií mali pre každú zo spoločností Yahoo a Starbucks rozdelené na tréningovú vzorku (predtým spomínané štyri maturity) a testovaciu vzorku (najbližšia ďalšia maturita - 16.09.2016). Vzhľadom na to, že našou snahou bolo získať dôveryhodnejšie odhady parametrov, ktoré by sme použili na testovanie, rozhodli sme sa vykonať optimalizácie cez celú škálu týchto maturít, berúc všetky jednomaturitné dáta daného druhu (napríklad „Dostatočne obchodovateľné dáta“) a na predikcie použiť parametre získané takouto optimalizáciou. Primárne sú pre nás parametre získané z CEV optimalizácie.

Táto optimalizácia si vyžadovala o čosi viac technických zručností a máme ju naprogramovanú v prílohe A ako funkciu `optimNmaturit` (`suit_dat, S, r, t_vect`), jej úloha a výstup sú ekvivalentné funkcii používanej na jednomaturitné dáta, hoci do nej vstupujú o čosi zložitejšie formátované vstupy. Ekvivalentnou je takisto aj funkcia používaná na výpis výsledkov `zobrazenie_a_tabulka_vysledkov_Nmaturit` (`suit_dat, S, r, t_vect, opt_par`).

B-S optimalizáciu sme vykonávali tiež cez analogickú funkciu `optimNmaturitBS` (`suit_dat, S, r, t_vect`).



**Ukážka testovania viacmaturitných dát a predikcií spoločnosti Yahoo**

Celkovo sme s použitím rôznych takto vybraných viacmaturitných dát a nimi odhadnutých parametrov vykonali celkovo 15 predikcií na rôznych podskupinách dát testovacích vzoriek cez CEV model a rovnaký počet cez B-S model. Ani tu teda nemôžeme uvádzať celý rozsah práce, rozhodli sme sa teda pre jednu reprezentatívnu ukážku, ktorou bude odhad aplikovaný na „Dostatočne obchodovateľné dáta“ z testovacej vzorky spoločnosti Yahoo pomocou parametrov zistených z viacmaturitnej optimalizácie cez všetky „Dostatočne obchodovateľné dáta“ a všetky „Skvele obchodovateľné dáta“.

**Tabuľka 9:** Výber dát z kúpnych opcí zo dňa 30.06.2016 s viacerými maturitami na akcie firmy Yahoo, ktorý sme nazvali ako „Dostatočne obchodovateľné dáta“

	strike	name	last	bid	ask	change	per_change	volume	open_interest	implied_volatility
9	37.00	YHOO160722C00037000	1.20	1.21	1.30	0.33	37.93%	150	397	37.01%
10	37.50	YHOO160722C00037500	0.89	0.94	1.06	0.19	27.14%	40	136	36.43%
11	38.00	YHOO160722C00038000	0.84	0.76	0.85	0.32	61.54%	19	835	35.84%
12	38.50	YHOO160722C00038500	0.38	0.40	0.46	-0.07	-15.56%	68	217	28.86%
15	40.00	YHOO160722C00040000	0.25	0.21	0.33	0.06	31.58%	20	283	35.40%
3	36.00	YHOO160729C00036000	1.52	1.51	1.73	0.15	10.95%	289	100	30.08%
4	36.50	YHOO160729C00036500	1.81	1.70	1.80	0.47	35.07%	13	319	38.48%
5	37.00	YHOO160729C00037000	1.47	1.42	1.51	0.38	34.86%	36	443	37.40%
6	37.50	YHOO160729C00037500	1.10	1.17	1.27	0.22	25.00%	62	73	36.91%
7	38.00	YHOO160729C00038000	1.03	0.95	1.00	0.37	56.06%	65	608	35.11%
8	38.50	YHOO160729C00038500	0.73	0.75	0.85	0.21	40.38%	112	473	35.60%
111	40.00	YHOO160729C00040000	0.24	0.21	0.33	-0.01	-4.00%	38	307	30.96%
51	37.50	YHOO160805C00037500	1.45	1.32	1.40	0.39	36.79%	51	60	36.04%
2	25.00	YHOO160819C00025000	11.00	10.80	11.35	-1.40	-11.29%	920	160	0.00%
91	34.00	YHOO160819C00034000	3.85	3.75	3.90	0.75	24.19%	113	479	41.26%
101	35.00	YHOO160819C00035000	3.10	3.00	3.15	0.55	21.57%	90	1473	39.04%
112	36.00	YHOO160819C00036000	2.43	2.38	2.46	0.50	25.91%	125	2382	36.87%
121	37.00	YHOO160819C00037000	1.86	1.82	1.87	0.37	24.83%	1187	20975	35.23%
13	38.00	YHOO160819C00038000	1.37	1.33	1.38	0.33	31.73%	157	6161	33.99%
14	39.00	YHOO160819C00039000	0.97	0.94	0.98	0.26	36.62%	1045	11481	32.86%
151	40.00	YHOO160819C00040000	0.66	0.63	0.66	0.18	37.50%	869	17863	31.69%
16	41.00	YHOO160819C00041000	0.43	0.40	0.43	0.14	48.28%	183	25875	30.81%
17	42.00	YHOO160819C00042000	0.27	0.24	0.28	0.09	50.00%	234	4023	30.47%
18	43.00	YHOO160819C00043000	0.11	0.10	0.12	-0.02	-15.38%	110	1467	27.54%
20	45.00	YHOO160819C00045000	0.07	0.05	0.07	0.01	16.67%	218	905	30.08%
21	46.00	YHOO160819C00046000	0.04	0.04	0.08	-0.08	-66.67%	511	1518	33.59%
22	47.00	YHOO160819C00047000	0.10	0.07	0.10	-0.02	-16.67%	75	163	37.70%
25	50.00	YHOO160819C00050000	0.02	0.01	0.04	-0.03	-60.00%	15	850	38.67%

Hore zobrazujeme tabuľku údajov vyfiltrovaných „Dostatočne obchodovateľných

**Tabuľka 10:** Zobrazenie výsledkov pre aplikovanie optimalizovaných paramaterov na „Dostatočne obchodovateľné dáta“ kúpnych opcí zo dňa 30.06.2016 s viacerými maturitami na akcie firmy Yahoo.

	last	cev_ceny	cev_perc_chyba	bs_ceny	bs_perc_chyba
1	1.2	1.07629	10.309%	1.076	10.334%
2	0.89	0.85972	3.402%	0.85994	3.378%
3	0.84	0.6764	19.477%	0.67705	19.399%
4	0.38	0.52401	-37.897%	0.52505	-38.17%
5	0.25	0.22137	11.45%	0.22345	10.619%
6	1.52	1.77071	-16.494%	1.76897	-16.38%
7	1.81	1.49066	17.643%	1.48955	17.705%
8	1.47	1.24134	15.555%	1.24086	15.588%
9	1.1	1.02237	7.058%	1.02246	7.049%
10	1.03	0.83264	19.161%	0.83324	19.103%
11	0.73	0.67047	8.155%	0.67153	8.009%
12	0.24	0.32647	-36.031%	0.3288	-37%
13	1.45	1.1676	19.476%	1.16753	19.48%
14	11	11.87623	-7.966%	11.87652	-7.968%
15	3.85	3.46621	9.969%	3.46133	10.095%
16	3.1	2.76787	10.714%	2.76354	10.854%
17	2.43	2.15935	11.138%	2.15646	11.257%
18	1.86	1.6449	11.565%	1.64365	11.632%
19	1.37	1.22316	10.719%	1.22335	10.704%
20	0.97	0.88774	8.48%	0.88915	8.335%
21	0.66	0.62867	4.747%	0.63122	4.36%
22	0.43	0.43406	-0.945%	0.4379	-1.837%
23	0.27	0.2917	-8.039%	0.29703	-10.012%
24	0.11	0.19018	-72.893%	0.19715	-79.223%
25	0.07	0.07165	-2.356%	0.08162	-16.599%
26	0.04	0.04	0.001%	0.051	-27.499%
27	0.1	0.01971	80.292%	0.03129	68.713%
28	0.02	-0.00426	121.32%	0.00653	67.361%

dát“ zo všetkých maturít. Optimálne parametre nám vyšli  $\sigma = 0,3078$  a  $\gamma = 1,8584$ , na tieto parametre sa neskôr odvoláme ako na „parametre 1“. Cez CEV optimalizáciu nám priemerná chyba CEV modelu vyšla 20,83% a B-S modelu 20,31%, tabuľka s výsledkami je zobrazená na strane 74. Cez B-S optimalizáciu nám vyšla  $\sigma = 0,299$ , na túto  $\sigma$  v kombinácii s  $\gamma = 2$  sa budeme odvolávať ako na „parametre 1 alt.“. Priemerná chyba CEV modelu vyšla 21,1% a B-S modelu 19,89%.

Ďalej robíme CEV optimalizáciu aj na všetkých „Skvele obchodovateľných dátach“, ktorých tabuľku uvádzame na tejto strane dole. Ako optimálne parametre sme získali  $\sigma = 0,3209$  a  $\gamma = 1,4937$ , na tieto parametre sa neskôr odvoláme ako na „parametre 2“. Priemerná chyba CEV modelu je 13,59%, pričom pre B-S je to 23,06%. Tabuľku s výsledkami možno nájsť na strane 76.

Cez B-S optimalizáciu nám vyšla  $\sigma = 0,299$  priemerná chyba CEV modelu vyšla 13,54% a B-S modelu 13,41%. Tu nám vyšla  $\sigma$  na 5 desatinných miest rovná ako v „parametroch 1 alt.“, nebudeme sa teda na ňu ešte osobitne inak odvolávať.

**Tabuľka 11:** Výber dát z kúpnych opcií zo dňa 30.06.2016 s viacerými maturitami na akcie firmy Yahoo, ktorý sme nazvali ako „Skvele obchodovateľné dáta“.

	strike	name	last	bid	ask	change	per_change	volume	open_interest	implied_volatility
9	37.00	YHOO160722C00037000	1.20	1.21	1.30	0.33	37.93%	150	397	37.01%
8	38.50	YHOO160729C00038500	0.73	0.75	0.85	0.21	40.38%	112	473	35.60%
91	34.00	YHOO160819C00034000	3.85	3.75	3.90	0.75	24.19%	113	479	41.26%
11	36.00	YHOO160819C00036000	2.43	2.38	2.46	0.50	25.91%	125	2382	36.87%
12	37.00	YHOO160819C00037000	1.86	1.82	1.87	0.37	24.83%	1187	20975	35.23%
13	38.00	YHOO160819C00038000	1.37	1.33	1.38	0.33	31.73%	157	6161	33.99%
14	39.00	YHOO160819C00039000	0.97	0.94	0.98	0.26	36.62%	1045	11481	32.86%
15	40.00	YHOO160819C00040000	0.66	0.63	0.66	0.18	37.50%	869	17863	31.69%
16	41.00	YHOO160819C00041000	0.43	0.40	0.43	0.14	48.28%	183	25875	30.81%
17	42.00	YHOO160819C00042000	0.27	0.24	0.28	0.09	50.00%	234	4023	30.47%
18	43.00	YHOO160819C00043000	0.11	0.10	0.12	-0.02	-15.38%	110	1467	27.54%
20	45.00	YHOO160819C00045000	0.07	0.05	0.07	0.01	16.67%	218	905	30.08%
21	46.00	YHOO160819C00046000	0.04	0.04	0.08	-0.08	-66.67%	511	1518	33.59%

**Tabuľka 12:** Zobrazenie výsledkov pre aplikovanie optimalizovaných parametrov na „Skvele obchodovateľné dáta“ kúpnych opcí zo dňa 30.06.2016 s viacerými maturitami na akcie firmy Yahoo.

	last	cev_ceny	cev_perc_chyba	bs_ceny	bs_perc_chyba
1	1.2	1.12451	6.291%	1.12459	6.284%
2	0.73	0.71605	1.91%	0.72214	1.077%
3	3.85	3.53072	8.293%	3.51615	8.671%
4	2.43	2.23333	8.093%	2.22653	8.373%
5	1.86	1.71696	7.69%	1.71618	7.732%
6	1.37	1.28961	5.868%	1.29458	5.505%
7	0.97	0.94579	2.496%	0.95577	1.467%
8	0.66	0.6765	-2.501%	0.6908	-4.666%
9	0.43	0.47083	-9.495%	0.489	-13.722%
10	0.27	0.31741	-17.558%	0.33922	-25.636%
11	0.11	0.20551	-86.824%	0.23074	-109.768%
12	0.07	0.07	0%	0.10097	-44.236%
13	0.04	0.03213	19.683%	0.06505	-62.62%

### Ukážka výsledkov predikcií

Vyššie odhadnuté optimálne parametre sme použili na predikcie - teda sme pomocou nich počítali ceny v testovacej maturite na dostatočne obchodovateľných dátach, a skúmali veľkosť predikčnej chyby.<sup>88</sup>

Tabuľky výsledkov pri využití parametrov 1 a 2 možno nájsť na tejto a nasledujúcej strane, na tomto mieste len spomenieme priemerné predikčné chyby metód. Pre predikcie s využitím parametrov 1 nám priemerné chyby vyšli pre CEV 13,71% a B-S 13,84%.

Pre predikcie s využitím parametrov 2, nám vyšli priemerné chyby - CEV metóda 16,28% a B-S 17,42%.

Pri využití parametrov 1 alt. nám vyšli predikčné chyby pre CEV 12,94% a B-S 12,87%.

**Tabuľka 13:** Zobrazenie výsledkov predikcií pre aplikovanie tzv. „paramaterov 1“ na „Dostatočne obchodovateľné dáta“ kúpnych opcí zo dňa 30.06.2016 s maturitou 16.09.2016 na akcie firmy Yahoo.

	last	cev_ceny	cev_perc_chyba	bs_ceny	bs_perc_chyba
1	2.86	3.16537	-10.677%	3.15877	-10.447%
2	2.93	2.58366	11.821%	2.57901	11.979%
3	1.32	1.28792	2.43%	1.28865	2.375%
4	0.58	0.7535	-29.914%	0.75719	-30.55%

<sup>88</sup> Nakoľko predikčné vzorky neobsahovali dostatok údajov na hodnoverné predikcie pre skvele obchodovateľné dáta a našim cieľom bolo predikovať aspoň na troch rôznych výberoch dát, rozhodli sme sa predikovať aj všetky dáta z predikčných vzoriek. Pre spoločnosť Yahoo sa veľmi nelíšila vzorka obchodovateľných a dostatočne obchodovateľných dát, zaviedli sme teda vzorku minimálne obchodovateľných dát, pre ktoré bol „open\_interest“ nenulový, a nepredikovali vzorku obchodovateľných dát.

**Tabuľka 14:** Zobrazenie výsledkov predikcií pre aplikovanie tzv. „paramaterov 2“ na „Dostatočne obchodovateľné dáta“ kúpnych opcií zo dňa 30.06.2016 s maturitou 16.09.2016 na akcie firmy Yahoo.

	last	cev_ceny	cev_perc_chyba	bs_ceny	bs_perc_chyba
1	2.86	3.25732	-13.892%	3.24068	-13.31%
2	2.93	2.67629	8.659%	2.66649	8.993%
3	1.32	1.36344	-3.291%	1.37488	-4.158%
4	0.58	0.80783	-39.282%	0.83064	-43.213%

## 6.6 Zodpovedanie výskumných hypotéz a niektoré ďalšie pozorovania

Na tomto mieste sa vyjadríme k jednotlivým stanoveným hypotézam vzhľadom na výstupy našich dát a racionálne zdôvodnenie výsledkov. Pre Google sme k dispozícii mali 3, pre Yahoo 8 a pre Starbucks 10 výsledkov jednomaturitných testovaní tréningovej vzorky; a pre Yahoo a Starbucks ďalších 2 respektíve 3 viacmaturitných testovaní a 6 respektíve 7 testovaní testovacej vzorky (teda testu predikčných schopností), to pre parametre z CEV optimalizácie, ako aj B-S.

Platnosť prvej hypotézy - o podobnosti optimálneho parametra  $\sigma$  pre firmy z toho istého oboru a rozdielnosti tohto parametra pre firmy z úplne odlišných odvetví - nám naše dáta potvrdzujú. Optimálna  $\sigma$  cez CEV optimalizáciu pre spoločnosť Google nám vychádzala medzi 25-27,4%, a pre Yahoo zväčša 30,5-32,6%<sup>89</sup>. Pre opcie spoločnosť Starbucks nám však optimálna  $\sigma$  vychádzala 12,9-18,8%. Pre B-S optimalizáciu sme dostali podobné rozsahy hodnôt parametra  $\sigma$ : Google - 24-27,3%, Yahoo - 29-32,6% a pre Starbucks - 10,1-17,5%.

Druhá hypotéza sa nám viac-menej potvrdila - platilo to pri jednomaturitnom testovaní v 14-tich prípadoch oproti trom, kedy nie, pričom v jednom z nich bola chyba len v desatinách percent a vo zvyšných sa jednalo o výbery dát z opcií na akcie Starbucks na maturitu 19.08., kde nám oproti ostatným vzorkám spoločnosti Starbucks vychádzali

<sup>89</sup>Jediný raz sme dostali hodnotu vyššiu, skoro 37%, bolo to však v prípade, keď vzorka obsahovala iba jeden údaj.

omnoho vyššie priemerné chyby (35-46% oproti 7-22%). Pre viacmaturitné testovania nám tento pomer vyšiel o čosi horší - 4 prípady hypotézu potvrdzujúce, a 2 prípady hypotézu vyvracajúce, zasa sa však v jednom z nich jednalo o desatiny percent a v druhom sa robil odhad len z piatich dát. Celkovo teda usudzujeme, že táto hypotéza sa nám potvrdzuje, a tým pádom aj naše optimalizačné procedúry majú zmysel.

K tretej hypotéze sme nedopatrením nezisťovali údaje, ktoré by ju relevantne potvrdzovali - teda relatívne chyby CEV cien oproti BS cenám pri  $\sigma$  z BS optimalizácie. Namiesto toho sme však zisťovali rozdiely absolútnych percentuálnych chýb BS a CEV cien vzhľadom na reálne trhové ceny. Nakoľko nám ale tieto rozdiely vychádzali v drvivej väčšine v desatinách percent - v 17-tich, prípadoch, v 3 iba čosi vyše percento, a iba v 2 vyššie - raz vyše 2 a raz vyše 3 percent - a to sa jednalo práve o vyššie spomínané dve vzorky dát z opcí na akcie Starbucks na maturitu 19.08., dovoľujeme si tvrdiť, že aj tak môžeme túto hypotézu potvrdiť.

Ďalšia hypotéza sa nám dostatočne jednoznačne nepotvrdila, 4 prípady pre prechod z obchodovateľných dát na dostatočne obchodovateľné dáta ju potvrdzujú, 2 prípady vyvracajú, pričom teraz nevieme jednoznačne identifikovať príčiny. Pri prechode z dostatočne obchodovateľných na skvele obchodovateľné dáta sa nám potvrdila v 4 prípadoch, v dvoch prípadoch však vzorka skvele obchodovateľných dát obsahovala veľmi málo údajov - raz iba 1 a raz 2. Preto žiaľ, túto našu hlavnú výskumnú hypotézu nemôžeme potvrdiť. Domnievame sa, že je to tak preto, že vzorky dostatočne a skvele obchodovateľných údajov boli mnohokrát veľmi malé (5 a menej údajov), a mimo týchto vzoriek sú trhové údaje mnohokrát ďaleko od splnenia predpokladov CEV a vo všeobecnosti aj B-S modelu (napríklad veľký bid-ask spread).

Nasledovná hypotéza - o tom, že predikcie vytvorené pomocou parametrov získaných optimalizáciou cez lepšie obchodovateľné dáta v porovnaní s parametrami získanými cez optimalizáciu na horšie obchodovateľných dátach, sa nám potvrdila iba čiastočne, skôr je však vyvrátená. Pre opcie na akcie Starbuck pre CEV optimalizáciu nám chyby CEV metódy skutočne klesali pri použití parametrov zistených z dostatočne obchodovateľných dát tréningovej vzorky oproti tým obchodovateľným. V 2 z 3 prípadov sa tak však nedialo zmene parametrov zistených z dostatočne obchodovateľných na tie zistené zo skvele obchodovateľných dát. Predikované vzorky však obsahovali relatívne

málo údajov (7 a 4). Pre BS optimalizáciu nám vždy chyby BS metódy klesali kontinuálne pri prechode týmito parametrami zistenými z obchodovateľných dát až po tie zistené zo skvele obchodovateľných dát.

Pre opcie na akcie spoločnosti Yahoo sme zisťovali len prechod parametrov zistených z dostatočne obchodovateľných dát na tie zistené zo skvele obchodovateľných dát, a zakaždým z 3 prípadov sa nám hypotéza v CEV prípade zamietla v BS prípade boli hodnoty chýb takmer konštantné.

Treba však podotknúť, že pre akcie Yahoo sme dostávali oveľa presnejšie predikcie - priemerné chyby na úrovni 10 – 24%, zatiaľ čo predikčné chyby Starbucks boli až na úrovni zhruba 50 – 134%, preto údaje zistené z predikcií pre Yahoo dáta považujeme za hodnovernejšie a skôr sa prikláňame k tvrdeniu, že naše dáta túto hypotézu zamietajú. Určite si však nedovoľujeme tvrdiť, že neplatí vo všeobecnosti, nakoľko má racionálny základ a pre väčšiu výskumnú vzorku by sa nám ešte mohla potvrdiť.

Posledná hypotéza - o tom, že predikcie pre lepšie obchodovateľné dáta nám zakaždým vychádzajú presnejšie, než pre tie horšie obchodovateľné, sa nám nie celkom potvrdila. Pre opcie na akcie Yahoo s parametrami zistenými cez CEV optimalizáciu sa nám ukázala pravdivá pre „parametre 1“ - teda pre parametre zistené z dostatočne obchodovateľných dát. Pre „parametre 2“ - zistené zo skvele obchodovateľných dát, sme však získali najlepšiu predikciu pre minimálne obchodovateľné dáta<sup>90</sup>. Pre B-S parametre zistené z B-S optimalizácie sa nám však táto hypotéza pre obe („parametre 1 alt.“ aj „parametre 2 alt.“) potvrdila.

Pre opcie na akcie Starbucks nám okrem prípadu, že parametre boli odhadnuté z obchodovateľných dát, vyšli menšie predikčné chyby pre dostatočne obchodovateľné údaje v porovnaní s tými skvele - a to ako pre zvyšné CEV parametre (odhadnuté z dostatočne obchodovateľných a skvele obchodovateľných dát), ako aj pre všetky BS parametre (tiež odhadnuté pre tieto tri výbery dát).

Spôsobovať to môže fakt, že údajov v jednomaturitnej predikčnej vzorke dostatočne obchodovateľných údajov pre Yahoo predikčnú vzorku a skvele obchodovateľných údajov pre Starbuck predikčnú vzorku, je už veľmi málo (4 údaje a 3 údaje).

Túto hypotézu teda nevieme s istotou potvrdiť, ale na základe našich dát ju aspoň ur-

---

<sup>90</sup>Tento termín sme zaviedli v poznámke pod čiarou č. 88



číte nemôžeme vyvrátiť a takisto je možné, že by sa nám pre väčšia vzorky dát potvrdila jednoznačnejšie, nakoľko je postavená na racionálnych základoch, je teda motiváciou do ďalšieho výskumu.

Na záver ešte dve pozorovania: Pre opcie na akcie spoločnosti Starbucks nám CEV ceny zistené cez CEV aproximáciu väčšinou lepšie aproximovali ceny testovacej vzorky v porovnaní s BS cenami zistenými cez BS optimalizáciu. Pre opcie na akcie spoločnosti Yahoo to však zväčša nebola pravda.

Parametre priemerne lepšie fitovali testovacie vzorky opcií na Starbucks, avšak predikcie vyšli omnoho lepšie pre opcie na Yahoo.

Dovoľujeme si vysloviť hypotézu, že za takéto diametrálne odlišné správanie môžu veľmi vzdialené optimálne hodnoty volatility (pre Starbuck okolo 14% a pre Yahoo okolo 32%), už však v našej práci nemáme priestor na jej overenie na ďalších vzorkách údajov pre opcie na iné spoločnosti. Táto oblasť by si tiež žiadala širší výskum.

## Záver

Cieľom práce bolo čitateľovi vysvetliť metódu združených asymptotických rozvojev pri aplikácii na získavanie aproximatívneho riešenia rôznych finančných modelov (kapitoly 1-4), získané aproximácie hodnotiť rozličnými spôsobmi, a využiť ich v praxi na fitovanie a predikovanie cien opcií pomocou reálnych trhových dát (kapitoly 5 a 6).

Prvá kapitola poskytla krátku históriu problematiky ( podkapitola 1.1), jej podstatou však bolo uviesť perturbačné problémy ( podkapitola 1.2), uviesť schematické riešenie singulárnych perturbačných problémov pri ktorých sa naša metóda využíva ( podkapitola 1.3), a vysvetliť termíny používané v tejto oblasti matematiky (podkapitola 1.4). Čitateľ so základnými znalosťami teórie limit má po nej prehľad o základoch perturbačnej teórie.

Druhá kapitola ukázala explicitné riešenie ( $R_0$ ) singulárneho perturbačného problému ( $U_1$ ), na ktorom poukázala na dôležité črty správania sa singulárnych perturbačných problémov ( podkapitola 2.1), Zároveň však aj v podkapitole 2.2 vysvetlila hľadanie asymptoticky presného riešenia pre tento problém pomocou metódy združených asymptotických rozvojev, boli teda detailne rozobraté jednotlivé kroky z postupu v časti 1.3. Získalo sa sme riešenie ( $R_1$ ), ktoré sa ešte na záver kapitoly kvalitatívne posudzovalo. Čitateľ so základnými znalosťami z oboru obyčajných diferenciálnych rovníc je po nej schopný riešiť singulárne problémy tohto typu nami uvádzanou metódou.

V tretej kapitole sme uviedli krátky úvod do terminológie finančnej matematiky (podkapitola 3.1), predstavili Black-Scholesov model na oceňovanie finančných derivátov a uviedli jeho explicitné riešenie (podkapitola 3.2); potom sme pre neho odvodili riešenie metódou združených asymptotických aproximácií (podkapitola 3.3), kde sme museli čeliť faktu, že sa v povahe problému sa jednalo o parciálnu a nie o obyčajnú diferenciálnu rovnicu, preto sa nám viaceré kroky postupu značne skomplikovali. Výsledkom bola dvojčlenná asymptotická aproximácia ( $R_2'$ ). Čitateľ so základnými znalosťami v oblasti parciálnych diferenciálnych rovníc a finančnej matematiky je po jej prečítaní schopný aplikovať metódu združených asymptotických rozvojev na základné finančné modely.

Vo štvrtej kapitole bol uvedený ďalší finančný model - CEV model, ktorý je v teoretickom zmysle spresnením Black-Scholesového modelu. Najprv sa rozoberal teoreticky

(podkapitola 4.1), uviedlo sa odvodenie rovnice (*CEV PDR*) v ňom vystupujúcej, a potom (podkapitola 4.3) sa využila jeho podobnosť s aproximátnym riešením B-S modelu a odvodilo sa jeho aproximatívne riešenie (*R4*). Čitateľovi sa priblížil tento rozšírený finančný model a kapitola slúžila na overenie a doplnenie znalostí v rámci nami skúmanej metódy aplikovanej na riešenie PDR.

V piatej kapitole nasledovalo krátke porovnanie CEV aproximácie (*R4*) a explicitného riešenia Black-Scholesovho modelu (*EX - R - BS*) pre CEV parameter  $\gamma = 2$  a čitateľ môže byť uistený, že táto aproximácia je veľmi presná - pri hodnotách  $\sigma$  v škále (0%, 90% > je jeho relatívna chyba v stotinách percent, ako možno vidieť na obrázku 8 na strane 58 dole.

V poslednej, šiestej kapitole, sme načrtli aplikáciu aproximatívnej oceňovacej formuly pre CEV model (*R4*) na fitovanie a predikovanie cien opcií využitím reálnych trhových dát najmä zo servera `finance.yahoo.com`, ktorých atribúty sme v úvode kapitoly vysvetlili. Praktické výpočty sme vykonávali využitím štatistického programovacieho jazyku R. Fitovanie sme realizovali spôsobom optimalizovania parametrov modelu  $\sigma, \gamma$  minimalizovaním súčtu absolútnych hodnôt relatívnych chýb odhadnutej a skutočnej ceny. Rovnako sme robili aj pre explicitnú oceňovaniu formulu Black-Scholesovho modelu (*EX - R - BS*), ktorá slúžila na porovnanie. Uviedli sme viacero racionálne zdôvodnených výskumných hypotéz (podkapitola 6.2), vysvetlili a ukázali, ako prebiehali jednotlivé testovania (podkapitoly 6.3 - 6.5) a následne sme výskumné hypotézy vyhodnocovali a v prípade, že naše dáta niektorú z výskumných hypotéz nepodporili, uvádzali racionálne zdôvodnenie tejto skutočnosti a poukazovali na potrebu ďalšieho výskumu. V tejto kapitole mohol čitateľ pochopiť charakteristiky online trhových dát a vďaka schematickým popisom s použitím nami naprogramovaných funkcií v prílohách práce ich vzhľadom na CEV aproximatívnu a Black-Scholesovskú explicitnú oceňovaciu mohol využiť na fitovanie a predikciu cien opcií.

Prínosom pre autora bolo najmä pochopenie metódy združených asymptotických rozvojev a spôsobu uvažovania, akým sa na finančné modely aplikuje, taktiež však rôzne znalosti nadobudnuté v typografickom systéme  $\text{\LaTeX}$  využitom na písanie práce a v štatistickom softvéri R pri tvorbe väčšiny grafiky a výpočtovej časti práce.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] Black, Fischer, and Scholes M.: *The pricing of options and corporate liabilities*, The journal of political economy (1973): 637-654.
- [2] de Jong L.: *Option pricing with perturbation methods*: diplomová práca, the Netherlands : Delft University of Technology, 2009. 126 strán. Dostupné na internete (15.07.2016):  
<http://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:7fed49fb-c6ae-4d12-8257-7e3de240e377?collection=education>
- [3] Diblík J., Růžičková M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, EDIS - Vydavatelství Žilinskej Univerzity, Žilina, 2008
- [4] Finance Yahoo: Do you Yahoo!, dostupné na internete (15.07.2016):  
<http://finance.yahoo.com/>
- [5] Guba P.: *Asymptotické metody*, učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 2016
- [6] Holmes M.H.: *Introduction to Perturbation Methods*, Springer, New York, 2013
- [7] Investopedia: Sharper Insight. Smarter investing., dostupné na internete (15.07.2016):  
<http://www.investopedia.com/>
- [8] Karovič T.: *Analytické aproximácie pri modelovaní cien opcií*, diplomová práca, Bratislava: Univerzita Komenského, 2014, 45 s., dostupné na internete (15.07.2016):  
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2014/karovic/diplomovka.pdf>
- [9] Kurzweil J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1978, dostupné na internete (15.07.2016):  
<http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/402075>
- [10] O'Malley, Robert E.: *Historical Developments in Singular Perturbations*, Springer, New York, 2014

- [11] Pawell M.: *A view of algorithms for optimization without derivatives*, preprint, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge University, Cambridge, 2007, dostupné na internete(15.07.2016):  
[http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/NA\\_papers/NA2007\\_03.pdf](http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/NA_papers/NA2007_03.pdf)
- [12] R documentation: Auglag function, dostupné na internete (15.07.2016):  
<http://www.rdocumentation.org/packages/nloptr/versions/1.0.4/topics/auglag>
- [13] Shivamoggi K. B.: *Perturbation methods for differential equations*, Birkhäuser, Boston, 2003
- [14] Ševčovič D.: *Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie*, IRIS - Vydavateľstvo a tlač, 2015
- [15] Ševčovič D. et al.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, Bratislava, 2009
- [16] U.S. department of the treasury: Daily Treasury Yield Curve Rates, dostupné na internete (15.07.2016):  
<https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yieldYear&year=2016>
- [17] Verhulst F.: *Methods and Applications of Singular Perturbations*, Springer, the United States of America, 2005

---

## Príloha A

```
#####DEKLAROVANIE FUNKCII#####

# CEV approximation price formula (znie to lepsie ako v SK)
#cele to bolo robene pre call opcii
CEV_price_function <- function(S_0,S, K, rf, t_back, sigma,gamma) {
#S_0 - zac. cena
#S - aktualna cena
#K - realizacna cena
#rf- spojita rizikovo neutralna miera
#t_back - T-t, teda vlastne cas do maturity (hoci od vypisania uz teoreticky mohol nejaky uplynut)
#sigma - volatilita
#gamma - rovnomenna konstanta z SDR pre S
sqrt_tau<-sigma*sqrt(t_back)
kappa <- sqrt((S_0/K)^(2-gamma))
moneyness <- S/K #vyraz som sa naucil vo Viedni pri studiu ;)
inside<-kappa*(moneyness -1)/sqrt_tau
V<- (S-K+rf*K*t_back)*pnorm(inside)+kappa*sqrt_tau*((gamma*S+(4-gamma)*K)/4)*dnorm(inside)
V
}

#toto tiez pre call opcii
blackscholes <- function(S, K, rf, t_back, sigma) {
V <- NA
d1 <- (log(S/K)+(rf+sigma^2/2)*t_back)/(sigma*sqrt(t_back))
d2 <- d1 - sigma * sqrt(t_back)
V <- S*pnorm(d1) - K*exp(-rf*t_back)*pnorm(d2)
V
}

#pomocne funkcie na krajsi vypis vysledkov
dec5 <- function(x){ round(x*10^5)/10^5 }
percent3dec <- function(m){paste(round(100*m, 3), "%", sep=)}

library('nloptr')

optim1maturita <- function(suit_dat,S,r,t_back){
#INICIALIZOVANIE POCIATOCNYCH HODNOT
rf=log(1+r) #vypocet spojitej ur. miery
S_0 <- S #ratame, akoby sme opcii ocenovali dnes
#ako prvu hodnotu volatility dam priemer implikovanych volatilit z B-S z tychto fajn dat
#musim robit nejake technicke upravu, aby som ich ziskal
for_mean1 <- as.character(suit_dat$implied_volatility)
for_mean<- as.numeric(sub("%",for_mean1))
start_sigma <- mean(for_mean)/100
start_gamma <-2 #ako z B-S
last1 <- as.numeric(as.character(suit_dat$last))
```

---

```

strikes1 <- as.numeric(as.character(suit_dat$strike))
#OPTIMALIZACIA CEV
fcia <- function(x){
sum(abs(last1 - CEV_price_function(S_0,S, strikes1, rf, t_back, x[1],x[2]) )/last1)
}
x0<-c(start_sigma,start_gamma)
lb <- c( 0, 0)
ub <- c(500,2)
auglag(x0, fcia,lower = lb, upper = ub)
}

optim1maturitaBS <- function(suit_dat,S,r,t_back){
#INICIALIZOVANIE POCIATOCNYCH HODNOT
rf=log(1+r) #vypocet spojitej ur. miery
S_0 <- S #ratame, akoby sme opciu ocenovali dnes
#ako prvu hodnotu volatility dam priemer implikovanych volatilit z B-S z tychto fajna dat
#musim robit nejake technicke upravu, aby som ich ziskal
for_mean1 <- as.character(suit_dat$implied_volatility)
for_mean<- as.numeric(sub("%",for_mean1))
start_sigma <- mean(for_mean)/100
#ako z B-S
last1 <- as.numeric(as.character(suit_dat$last))
strikes1 <- as.numeric(as.character(suit_dat$strike))
#OPTIMALIZACIA BS
fcia <- function(x){
sum(abs(last1 - blackscholes(S, strikes1, rf, t_back, x) )/last1)
}
x0<-c(start_sigma)
lb <- 0
ub <- 500
auglag(x0, fcia,lower = lb, upper = ub)
}

zobrazenie_a_tabulka_vysledkov <- function(suit_dat,S,r, t_back,opt_par){
#PREDROBENIE POTREBNYCH HODNOT
rf=log(1+r) #vypocet spojitej ur. miery
S_0 <- S #ratame, akoby sme opciu ocenovali dnes
last1 <- as.numeric(as.character(suit_dat$last))
strikes1 <- as.numeric(as.character(suit_dat$strike))
#PRVOTNA VIZUALIZACIA PRIEMEROV
print("Priemerna absolutna CEV chyba")
print(mean(abs(last1 - CEV_price_function(S_0,S, strikes1, rf, t_back, opt_par[1], opt_par[2]) )/last1 ))
print("Priemerna absolutna B-S chyba")
print(mean(abs(last1 - blackscholes(S,strikes1, rf, t_back, opt_par[1]) )/last1 ))
#####ZVYSNA VIZUALIZACIA A UKLADANIE
cev_ceny2<-CEV_price_function(S_0,S, strikes1, rf, t_back, opt_par[1], opt_par[2])
cev_perc_chyba<-percent3dec((last1 - CEV_price_function(S_0,S, strikes1, rf, t_back, opt_par[1], opt_par[2]) )/last1
)

```

---

```

bs_ceny2<-blackscholes(S,strikes1, rf, t_back, opt_par[1])
bs_perc_chyba <- percent3dec((last1 - blackscholes(S,strikes1, rf, t_back, opt_par[1]) )/last1)
vysledky2<- cbind(last1,dec5(cev_ceny2),cev_perc_chyba, dec5(bs_ceny2), bs_perc_chyba)
colnames(vysledky2)<- c("last","cev_ceny","cev_perc_chyba", "bs_ceny", "bs_perc_chyba")
# print(vysledky2)
vysledky2
}

optimNmaturit <- function(suit_dat,S,r,t_vect){
#INICIALIZOVANIE POCIATOCNYCH HODNOT
rf=log(1+r) #vypocet spojitej ur. miery
S_0 <- S #ratame, akoby sme opciu ocenovali dnes
#ako prvu hodnotu volatility dam priemer implikovanych volatilit z B-S z tychto fajn dat
#musim robit nejake technicke upravu, aby som ich ziskal
start_sigma <- NA
last <- list()
strikes <- list()
n<-length(suit_dat)
for (i in 1:n){
for_mean1 <- as.character(suit_dat[[i]]$simplified_volatility)
for_mean<- as.numeric(sub("%",for_mean1))
start_sigma[i] <- mean(for_mean)/100
#ako z B-S
last[[i]] <- as.numeric(as.character(suit_dat[[i]]$last))
strikes[[i]] <- as.numeric(as.character(suit_dat[[i]]$strike))
}
st_sigma <- mean(start_sigma)
start_gamma <-2
#OPTIMALIZACIA
fcia <- function(x){
z<-0
for (k in 1:n){
z <- z+ sum(abs(last[[k]] - CEV_price_function(S_0,S, strikes[[k]], rf, t_vect[k], x[1],x[2]) )/last[[k]])
}
z }
x0<-c(st_sigma,start_gamma)
lb <- c( 0, 0)
ub <- c(500,2)
auglag(x0, fcia,lower = lb, upper = ub)
}

optimNmaturitBS <- function(suit_dat,S,r,t_vect){
#INICIALIZOVANIE POCIATOCNYCH HODNOT
rf=log(1+r) #vypocet spojitej ur. miery
S_0 <- S #ratame, akoby sme opciu ocenovali dnes
#ako prvu hodnotu volatility dam priemer implikovanych volatilit z B-S z tychto fajn dat
#musim robit nejake technicke upravu, aby som ich ziskal
start_sigma <- NA

```



---

```

last <- list()
strikes <- list()
n<-length(suit_dat)
for (i in 1:n){
for_mean1 <- as.character(suit_dat[[i]]$simplified_volatility)
for_mean<- as.numeric(sub("%",for_mean1))
start_sigma[i] <- mean(for_mean)/100
#ako z B-S
last[[i]] <- as.numeric(as.character(suit_dat[[i]]$last))
strikes[[i]] <- as.numeric(as.character(suit_dat[[i]]$strike))
}
st_sigma <- mean(start_sigma)
#OPTIMALIZACIA
fcia <- function(x){
z<-0
for (k in 1:n){
z <- z+ sum(abs(last[[k]] - blackscholes(S, strikes[[k]], rf, t_vect[k], x )/last[[k]])
}
z }
x0<-st_sigma
lb <- 0
ub <- 500
auglag(x0, fcia,lower = lb, upper = ub)
}

zobrazenie_a_tabulka_vysledkov_Nmaturit <- function(suit_dat,S,r, t_vect,opt_par){
#PREDROBENIE POTREBNYCH HODNOT
rf=log(1+r) #vypocet spojitej ur. miery
S_0 <- S #ratame, akoby sme opciu ocenovali dnes
n<-length(suit_dat)
suit_dat_matrix <-NA
last <-list()
strikes <-list()
last_vector <- c()
strikes_vector <- c()
dlzky <- c()
for (i in 1:n){
last[[i]] <- as.numeric(as.character(suit_dat[[i]]$last))
strikes[[i]] <- as.numeric(as.character(suit_dat[[i]]$strike))
suit_dat_matrix1 <- rbind(suit_dat_matrix,suit_dat[[i]])
last_vector <- c(last_vector,last[[i]])
strikes_vector <- c( strikes_vector,strikes[[i]])
dlzky[i] <- length(suit_dat[[i]]$last)
} #PRVOTNA VIZUALIZACIA PRIEMEROV
suit_dat_matrix <-suit_dat_matrix1[-1,]
rownames(suit_dat_matrix) <- c()
t_vector <-rep(t_vect,dlzky)
#View(suit_dat_matrix)

```

---

```

print("Priemerna absolutna CEV chyba")
print(mean(abs(last_vector - CEV_price_function(S_0,S, strikes_vector, rf, t_vector, opt_par[1], opt_par[2]))/last_vector
))
print("Priemerna absolutna B-S chyba")
print(mean(abs(last_vector - blackscholes(S,strikes_vector, rf, t_vector, opt_par[1]))/last_vector))
#####ZVYSNA VIZUALIZACIA A UKLADANIE
cev_ceny2<-CEV_price_function(S_0,S, strikes_vector, rf, t_vector, opt_par[1], opt_par[2])
cev_perc_chyba<-percent3dec((last_vector - CEV_price_function(S_0,S, strikes_vector, rf, t_vector, opt_par[1],
opt_par[2]))/last_vector)
bs_ceny2<-blackscholes(S,strikes_vector, rf, t_vector, opt_par[1])
bs_perc_chyba <- percent3dec((last_vector - blackscholes(S,strikes_vector, rf, t_vector, opt_par[1]))/last_vector)
vysledky2<- cbind(last_vector,dec5(cev_ceny2),cev_perc_chyba, dec5(bs_ceny2), bs_perc_chyba) colnames(vysledky2)<-
c("last","cev_ceny","cev_perc_chyba", "bs_ceny", "bs_perc_chyba") # print(vysledky2) vysledky2 }

```

---

## Príloha B

### Kód k jednomaturitnej optimalizácii

```
#####PRVOTNE ZISKANIE UDAJOV A ICH ZALOHA#####
# library(XML)
#####22_07
# url <- "http://finance.yahoo.com/q/op?s=SBUX&date=1469145600"
# # extract all tables on the page
# tabs = readHTMLTable(url, stringsAsFactors = F)
#
# # toto treba zistit odpozorovanim, ze ktora je to tabulka
# call_tab <- tabs[[2]]
# colnames(call_tab) <- c("strike","name","last","bid","ask","change","per_change","volume","open_interest",
implied_volatility")
# View(call_tab)
# #zaloha dat nakolko uz ich zajtra nechcem znova nacistavat zo stranky, lebo mozu byt uz ine
# library(xlsx)
# write.xlsx(call_tab, "C:/Users/Jozef/Desktop/skola/Matfyz/Diplomovka/call_at_01_07_for_22_07_starbucks.xlsx")
#
#####NACITANIE, VIZUALIZACIA A TRIEDENIE UDAJOV#####

library(xlsx)
#####22_07 ##pri tychto mi nevadi, ze sa mi call_tab priebezne premazava a vzdy ho mam v podmienke
##ako filtrovat data, len treba dat bacha, aby som filtraciu robil vzdy presne po nacistani tych udajov
call_tab <- read.xlsx("C:/Users/Jozef/Desktop/skola/Matfyz/Diplomovka/call_at_01_07_for_22_07_starbucks.xlsx",
1, header=TRUE)
#View(call_tab)
call_tab_1_1 <-call_tab[,-1]
#View(call_tab_1_1)
##rozne vybery dat
suitable_data_1_1 <- call_tab_1_1[ as.numeric(as.character(call_tab$volume))>10
& as.numeric(as.character(call_tab$open_interest))>50 ,]
View(suitable_data_1_1) #az 13 dat splna tieto kriteria
suitable_data_1_2 <- call_tab_1_1[ as.numeric(as.character(call_tab$open_interest))>50 ,]
View(suitable_data_1_2) #tu 15, neni to az taky rozdiel, tieto mozno ani nepouzijem
suitable_data_1_3<-call_tab_1_1[ as.numeric(as.character(call_tab$volume))>100
& as.numeric(as.character(call_tab$open_interest))>200 ,]
View(suitable_data_1_3) #len dva udaje, ale napodobne to byvalo aj inokedy

#####VYPOCTY A ULOZENIE#####

S<-56.89 #aktualna cena k 20:52 01.07.2016
r <- 0.45 #zo dna 30.06 aj 01.07 (nemenila sa)

#22_07
t_back_1 <- (21+0.25)/360 #koniec dna 01.07. preto 0.25
optim1maturita(suitable_data_1_1,S,r,t_back_1)
```

---

```

#super, konvergencia vyzera byt velmi doba lebo value je malicka 1.557636 a to sa jedna o 13 dat!!
# parametre 0.1875774 1.5326825
optimalne_parametre<- c(0.1881349, 1.4772939)
vysledky_1_1<-zobrazenie_a_tabulka_vysledkov(suitable_data_1_1,S,r,t_back_1,optimalne_parametre)
#krasa,
# [1] "Priemerna absolutna CEV chyba"
# [1] 0.1198181
# [1] "Priemerna absolutna B-S chyba"
# [1] 0.1715313
#myslim, ze to je sposobene aj tym, ze odhad sigmy (co je miera volatility) je o dost menej ako v inych modeloch
#napr. ako bolo pre yahoo
#pre BS opt sigma 0.1737463
#a parametre
# [1] "Priemerna absolutna CEV chyba"
# [1] 0.1419383
# [1] "Priemerna absolutna B-S chyba"
# [1] 0.1329097
#TOTO NA TOMTO MIESTE SPUSTAT IBA RAZ
#library(xtable)
tex.vysledky_cheat <-xtable(vysledky_1_1)
print(tex.vysledky_cheat,file="C:/Users/Jozef/Desktop/skola/Matfyz/Diplomovka/vysledky_1_1.tex",append=T,
table.placement = "h", caption.placement="bottom")
#toto som spustil viackrat lebo som chcel aj novsiu verziu tabulky
tex.call_tab_cheat <- xtable(call_tab_1_1)
print(tex.call_tab_cheat,file="C:/Users/Jozef/Desktop/skola/Matfyz/Diplomovka/call_tab_1_1.tex",append=T,
table.placement = "h", caption.placement="bottom")

tex.suitable.data_cheat <-xtable(suitable_data_1_1) #GREAT :)
print(tex.suitable.data_cheat,file="C:/Users/Jozef/Desktop/skola/Matfyz/Diplomovka/suitable.data_1_1.tex",append=T,
table.placement = "h", caption.placement="bottom")
##
optim1maturita(suitable_data_1_2,S,r,t_back_1)
#value 2.079859, 15 dat
# parametre 0.1881489 1.2389933
optimalne_parametre<- c(0.1881489, 1.2389933)
vysledky_1_2<-zobrazenie_a_tabulka_vysledkov(suitable_data_1_2,S,r,t_back_1,optimalne_parametre)
#krasa, priemerna CEV chyba
# [1] "Priemerna absolutna CEV chyba"
# [1] 0.1386573
# [1] "Priemerna absolutna B-S chyba"
# [1] 0.1751748
#bs sigma 0.174976 a chyby
# [1] "Priemerna absolutna CEV chyba"
# [1] 0.1668226
# [1] "Priemerna absolutna B-S chyba"
# [1] 0.1545545
TOTO NA TOMTO MIESTE SPUSTAT IBA RAZ

```

---

```

#library(xtable)
tex.vysledky_cheap <-xtable(vysledky_1_2)
print(tex.vysledky_cheap,file="C:/Users/Jozef/Desktop/skola/Matfyz/Diplomovka/vysledky_1_2.tex",append=T,
table.placement = "h", caption.placement="bottom")
#toto som spustil viackrat lebo som chcel aj novsiu verziu tabulky

tex.suitable.data_cheap <-xtable(suitable_data_1_2) #GREAT :)
print(tex.suitable.data_cheap,file="C:/Users/Jozef/Desktop/skola/Matfyz/Diplomovka/suitable.data_1_2.tex",append=T,
table.placement = "h", caption.placement="bottom")
##
optim1maturitaBS(suitable_data_1_3,S,r,t_back_1)
#dva udaje cize KVG super
# parametre0.1477795 1.6639392
optimalne_parametre<- c(0.1477795, 1.6639392)
vysledky_1_3<-zobrazenie_a_tabulka_vysledkov(suitable_data_1_3,S,r,t_back_1,optimalne_parametre)
#CEV omnoho lepsi (priem chyba 1% namiesto 10% pre B-S), ale mame len dve data a sigma daleko od B-S, takze sa
niet co cudovat
#ak sa opt cez BS, sigma 0.1184286 a ten je omnoho lepsi ale nie az tak
# [1] "Priemerna absolutna CEV chyba"
# [1] 0.08239417
# [1] "Priemerna absolutna B-S chyba"
# [1] 0.02388558
TOTO NA TOMTO MIESTE SPUSTAT IBA RAZ
#library(xtable)
tex.vysledky_cheap <-xtable(vysledky_1_3)
print(tex.vysledky_cheap,file="C:/Users/Jozef/Desktop/skola/Matfyz/Diplomovka/vysledky_1_3.tex",append=T,
table.placement = "h", caption.placement="bottom")
#toto som spustil viackrat lebo som chcel aj novsiu verziu tabulky

tex.suitable.data_cheap <-xtable(suitable_data_1_3) #GREAT :)
print(tex.suitable.data_cheap,file="C:/Users/Jozef/Desktop/skola/Matfyz/Diplomovka/suitable.data_1_3.tex",append=T,
table.placement = "h", caption.placement="bottom")

```