Cvičenia z ekonometrie 2005/2006

Domáca úloha 12

Termín odovzdania: 16.5.2006

1. *(5 bodov)* Náhodná premenná X má Laplaceovo rozdelenie s parametrom $a > 0$, ak jej hustota je
$$f(x) = \frac{1}{2a}\, e^{-\frac{1}{a}|x|}.$$
Uvažujme teraz regresný model
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i,$$
kde ε_i sú nezávislé náhodné premenné s Laplaceovym rozdelením a odhad tohto modelu metódou maximálnej vierohodnosti. Dokážte, že odhady parametrov β_0 a β_1 z dát $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ sú riešením minimalizačnej úlohy
$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)| \to \min \tag{1}$$
Ako odhadneme parameter a?

   Bonus: *(2 body)*
   Navrhnite postup, ako vyriešiť optimalizačnú úlohu (1). (Absolútna hodnota nie je diferencovateľná, takže napríklad gradientná alebo Newtonova metóda sa nedá použiť.)

2. *(5 bodov)* Uvažujme regresný model
$$Y = X\beta + \varepsilon$$
kde vektor ε má normálne rozdelenie $N(0, \sigma^2 I)$ a jeho odhad metódou maximálnej vierohodnosti. Na cvičení sme ukázali, že odhad parametra β sa zhoduje s odhadom metódou najmenších štvorcov. Nájdite odhad parametra σ^2.

3. *(5 bodov)* Uvažujme regresný model
$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots \beta_k x_k + \varepsilon,$$
kde vektor ε má nulovú strednú hodnotu a jeho kovariančná matica je diagonálna - s prvkami $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ na diagonále. Dokážte, že odhad zovšeobecnenou metódou najmenších štvorcov je riešením úlohy
$$\sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots \beta_k x_{ki}))^2 \to \min,$$
kde $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$.

   Poznámka:
   Tvrdenie tohto príkladu znamená, že minimalizujme váženú sumu štvorcov rezíduí. Preto sa tento prípad nazýva vážená metóda najmenších štvorcov