Cvičenia z ekonometrie
Letný semester 2008/2009

Vlastnosti odhadov parametrov

1. Nech $X_1, \dots X_n$ je náhodný výber z rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$. Uvažujme nasledovné dva odhady disperzie σ^2:

$$s_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \quad s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

kde $\bar{X}$ je výberový priemer. Ktorý z týchto odhadov má menšiu strednú kvadratickú chybu?

Metóda maximálnej vierohodnosti

1. Nech c je kladný parameter a náhodná premenná X má hustotu

$$f(x) = c^2 x e^{-cx}$$

pre $x > 0$ a nulovú pre $x \leq 0$. Majme náhodný výber s rozsahom n z tohto rozdelenia, nájdite odhad parametra c metódou maximálnej vierohodnosti.

2. Na teste je N otázok, pri každej je na výber päť možností (a)-(e). Študent vie odpovedať na K z nich, ostatné si náhodne tipne. Učiteľ nepozná skutočnú hodnotu K, vidí len počet správnych a počet nesprávnych odpovedí (nevie však rozlíšiť, či správna odpoveď je dôsledkom toho, že ju študent vedel, alebo že ju uhádol).

Predpokladajme, že $N = 25$ a $W = 8$.

(a) Aké sú možné hodnoty K?

(b) Pre každú z týchto hodnôt K má výsledok $W = 8$ určitú pravdepodobnosť. Zostavte tabuľku, v ktorej každej hodnote K priradíte pravdepodbnosť toho, že $W = 8$. Pre aké K je táto pravdepodobnosť maximálna? (Táto hodnota odhad počtu otázok, na ktoré študent naozaj poznal odpoveď, získaný metódou maximálnej vierohodnosti.)

3. Náhodná premenná X nadobúda hodnoty 1, 2, 3, $\dots, n$ s pravdepodobnosťami

$$P(X = x) = \frac{2(n+1-x)}{n(n+1)}.$$

Hodnota n je neznáma, odhadnite ju na základe jednej realizácie metódou maximálnej vierohodnosti.

4. Po zavedení eura bol v The Guardian (4.1.2002)[1] uvedený výsledok pokusu s belgickou mincou s hodnotou jedného eura: Dvaja poľskí matematici a ich študenti hádzali mincou 250 krát. Hlava padla 140 krát.

Padnutie hlavy pri hode mincou modelujeme alternatívnym rozdelením - nadobúda hodnotu 1 ("padne hlava") s pravdepodobnosťou p a hodnotu 0 ("nepadne hlava") s pravdepodobnosťou $1 - p$.

[1] http://www.guardian.co.uk/world/2002/jan/04/euro.eu2

(a) Odvoďte odhad parametra p alternatívneho rozdelenia metódou maximálnej vierohodnosti a použite ho na dáta z uvedeného pokusu s belgickou mincou.

(b) Testujte hypotézu $p = \frac{1}{2}$ pomerom vierohodností (likelihood ratio test).

(c) V The Guardian je okrem iného aj tento komentár:

It looks very suspicious to me. If the coin were unbiased the chance of getting a result as extreme as that would be less than 7%.

Zistite, o akú pravdepodobnosť tu ide a vypočítajte jej hodnotu.

(d) Uvažujme nasledujúce (hypotetické) výsledky. Odhadnite parameter p testujte hypotézu $p = \frac{1}{2}$ pomerom vierohodností, ak sme spravili

- 100 pokusov, hlava padla 56 krát,
- 200 pokusov, hlava padla 112 krát
- 300 pokusov, hlava padla 168 krát,
- 400 pokusov, hlava padla 224 krát,
- 500 pokusov, hlava padla 280 krát.

Vysvetlite rozdiel vo výsledkoch.

5. Pracujte s dátami o dĺžkach telefonických hovoroch z prvého cvičenia (sú aj v prvej sade úloh na precvičenie). Dĺžku hovoru budeme modelovať exponenciálnym rozdelením. Odhadnite parameter exponenciálneho rozdelenia metódou maximálnej vierohodnosti a likelihood ratio testom testujte hypotézu, že dáta pochádzajú z exponenciálneho rozdelenia so strednou hodnotou 2 minúty.

6. Pracujte s dátami z predchádzajúcej úlohy. Dĺžku hovoru budeme modelovať gama rozdelením s parametrami α a λ, ktorého hustota je

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

pre $x > 0$ a inak sa rovná nule.

(a) Nájdite odhady parametrov α a λ metódou maximálnej vierohodnosti. (Treba ich počítať numericky.)

(b) Likelihood ratio testom testujte hypotézu, že dáta pochádzajú z exponenciálneho rozdelenia.

(c) Likelihood ratio testom testujte hypotézu, že dáta pochádzajú z exponenciálneho rozdelenia so strednou hodnotou 2 minúty.