Numerické riešenie Black-Scholesovej PDR (II.)

:: Konvergencia Gauss-Seidelovej metódy ::

- Na výpočet riešenia sústavy lineárnych rovníc sme použili **Gauss-Seidelovu metódu**.
- Ak je matica sústavy diagonálne dominantná, Gauss-Seidelova metóda konverguje k riešeniu pre ľubovoľný štartovací bod.
- Vidíme, že matica z našej úlohy je diagonálne dominantná.

:: Rýchlosť konvergencie metódy ::

- Najskôr si pripomeňme, čo je to **spektrálny polomer** matice a ako súvisí s maticovými normami:
  - Spektrálny polomer je maximum z absolútnych hodnôt vlastných čísel matice:

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$

  - Pre maticovú normu platí:

$$\lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k} = \rho(A)$$

  Túto vlastnosť si numericky vyskúšame v Matlabe:
    - Maticové normy v Matlabe:

```
>> help norm

 NORM   Matrix or vector norm.
    For matrices...
      NORM(X) is the largest singular value of X, max(svd(X)).
      NORM(X,2) is the same as NORM(X).
      NORM(X,1) is the 1-norm of X, the largest column sum,
                      = max(sum(abs(X))).
      NORM(X,inf) is the infinity norm of X, the largest row sum,
                      = max(sum(abs(X'))).
      NORM(X,'fro') is the Frobenius norm, sqrt(sum(diag(X'*X))).
      NORM(X,P) is available for matrix X only if P is 1, 2, inf or 'fro'.

    For vectors...
      NORM(V,P) = sum(abs(V).^P)^(1/P).
      NORM(V) = norm(V,2).
      NORM(V,inf) = max(abs(V)).
      NORM(V,-inf) = min(abs(V)).

    See also COND, RCOND, CONDEST, NORMEST.

 Overloaded methods
    help ss/norm.m
    help lti/norm.m
    help frd/norm.m
    help idmodel/norm.m
```

    - Pre maticu, ktorú si vytvoríme - napríklad náhodnú:

```
>> a=rand(5)

a =

    0.9501    0.7621    0.6154    0.4057    0.0579
    0.2311    0.4565    0.7919    0.9355    0.3529
    0.6068    0.0185    0.9218    0.9169    0.8132
    0.4860    0.8214    0.7382    0.4103    0.0099
    0.8913    0.4447    0.1763    0.8936    0.1389
```

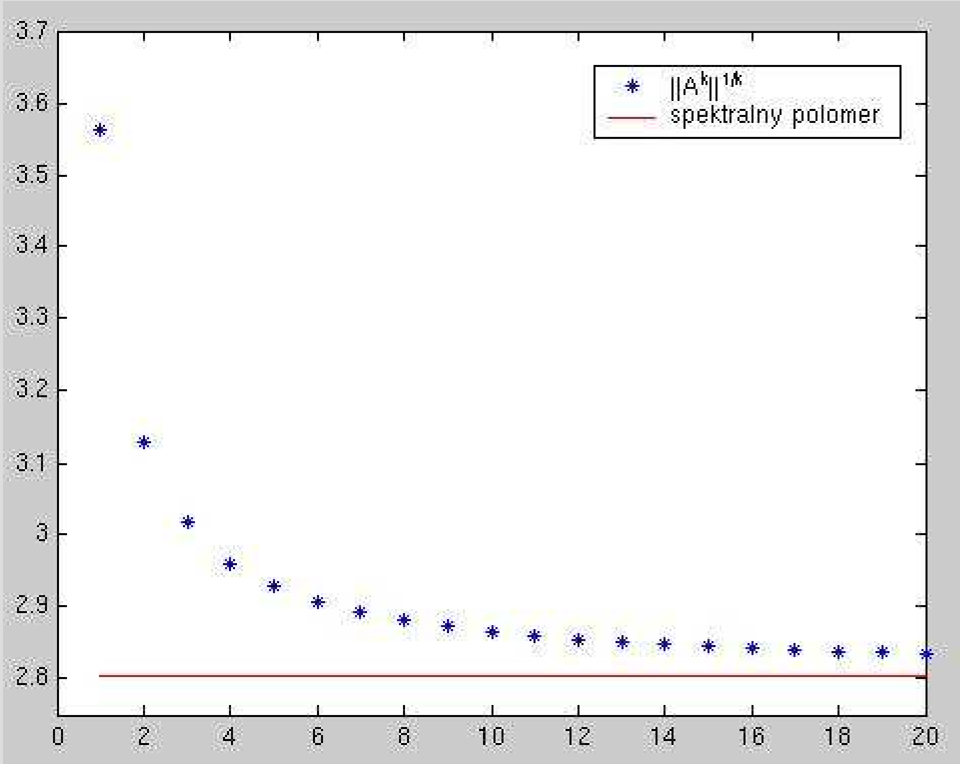
    teda vieme vypočítať spektrálny polomer

```
>> rho=max(abs(eig(a)))

rho =

    2.8043
```

a počítať normy jej mocnín. Pre 1-normu dostaneme:



- Zopakujte pre inú maticu a/alebo inú normu.
- Pre k veľké teda máme:

$$\left\|A^k\right\| \sim \rho^k(A)$$

- Vrátime sa teraz k metódam riešenia sústavy rovníc. Metódu zapíšeme v tvare

$$x^{n+1} = Tx^n + v$$

a budeme počítať vzdialenosť n-tej iterácie od presného riešenia:

$$\begin{aligned}\|x^n - x^*\| &= \left\|\left(Tx^{n-1}+v\right) - \left(Tx^* + v\right)\right\| = \left\|T\left(x^{n-1}-x^*\right)\right\| = \\ &= \left\|T^2\left(x^{n-2}-x^*\right)\right\| = \cdots = \left\|T^n\left(x^0 - x^*\right)\right\| \\ &\leq \|T^n\| \left\|x^0 - x^*\right\| \ \sim \rho^n(T)\left\|x^0 - x^*\right\|\end{aligned}$$

Spektrálny polomer matice T by teda mal byť **menší ako 1** a **čo najbližšie k nule**.

:: SOR (successive over relaxation) metóda

- Ako urýchliť konvergenciu Gauss-Seidelovej metódy?
- Modifikáciou Gauss-Seidelovej metódy je **SOR (successive over relaxation)** metóda:

$$v_i^{q+1} = \frac{\boxed{\omega}}{a_{ii}}\left(ps_i - \sum_{j<i} a_{ij} v_j^{q+1} - \sum_{j>i} a_{ij} v_j^q\right) + (1 - \boxed{\omega}) v_i^q$$

parameter metódy

Pre ω=1, dostávame pôvodnú Gauss-Seidelovu metódu, ω > 1 - over-relaxation, ω < 1 - under-relaxation.
- Bez dôkazu uvedieme nasledovné tvrdenia týkajúce sa konvergencie tejto metódy:
  - Nutnou podmienkou na to, aby SOR metóda konvergovala, je, že parameter ω je z intervalu (0,2)
  - Pre sústavu, ktorú riešime pri numerickom riešení B-S rovnice, konverguje SOR metóda pre ľubovoľné ω z intervalu (0,2).
- Ak túto maticu rozložíme na jej dolnú trojuholníkovú časť (L), hornú (U) a diagonálnu (D), tak SOR metódu môžeme

napísať v tvare

$$x^{n+1} = T(\omega)x^n + v$$

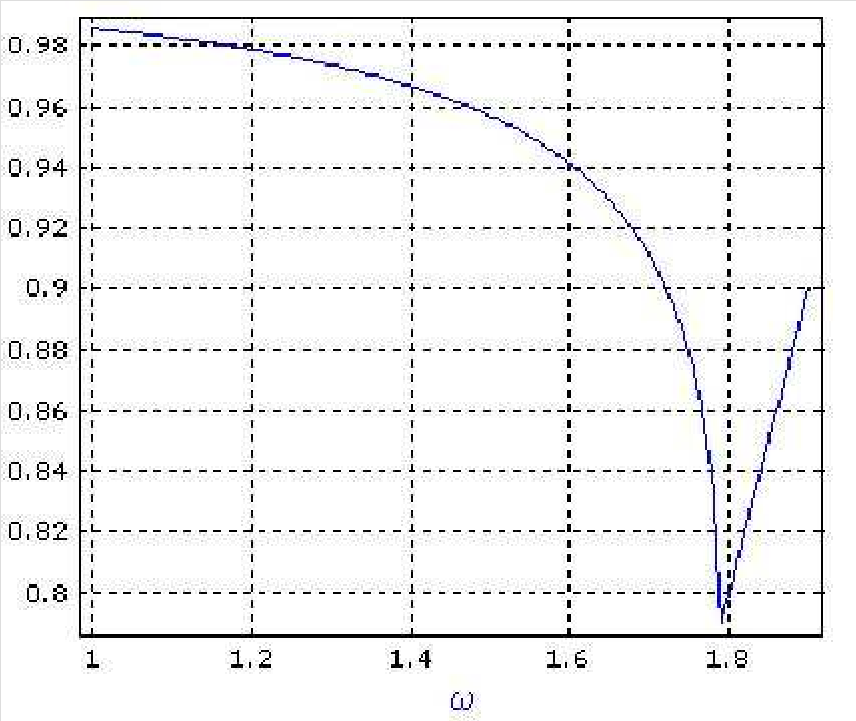
kde

$$T(\omega) = (D + \omega L)^{-1}\left((1-\omega)\,D - \omega U\right)$$
$$v = \omega\,(D - \omega L)^{-1}\,ps$$

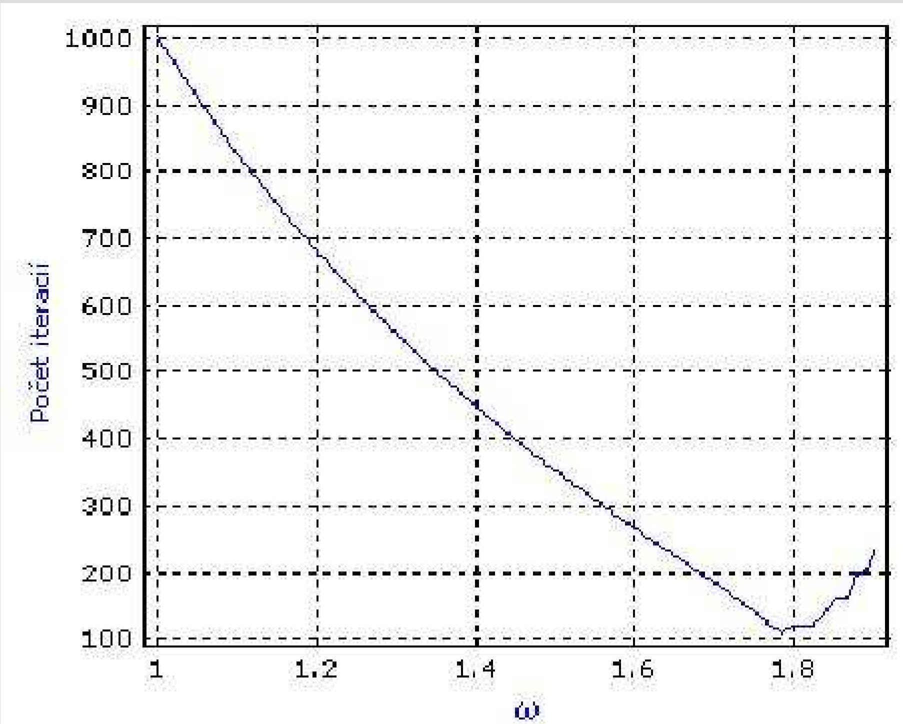
Optimálna voľba parametra ω teda závisí od spektrálneho polometru matice T. Ten závisí od parametrov modelu a delenia, ktoré sme použili.

Ukážka:

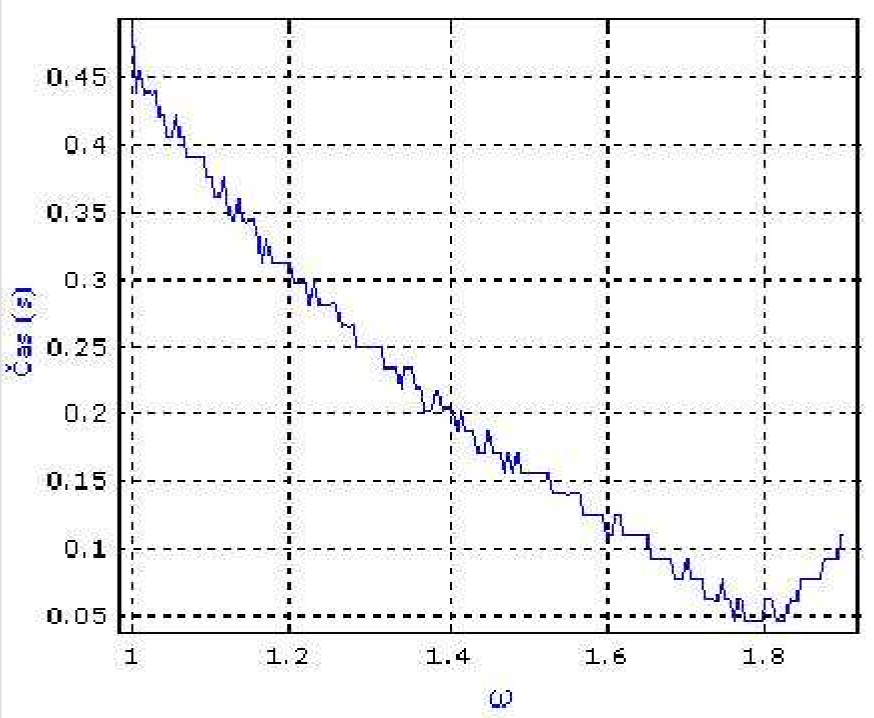
- spektrálny polomer matice T v závislosti od parametra ω:



- počet iterácií potrebný na výpočet riešenia na jednej časovej vrstve:



- čas výpočtu v sekundách:



Samozrejme, počítať spektrálny polomer a tak určovať parameter ω, by nebolo efektívne. Takéto grafy nám však dávajú predstavu o tom, ako tento parameter vplýva na konvergenciu. Prakticky zvolíme hodnotu zhruba medzi 1.5 a 1.9.

:: Cvičenie ::

Upravte funkciu gs.m tak, aby počítala zadanú sústavu SOR metňodou so zadaným parametrom . ω :

```
% cyklus bezi, kym nie je splnena podmienka norm(Av-ps)<=eps
v = v0;
while norm(A*v - ps) > eps
    v(1) = (ps(1) - a*v(2))/b;
    for i = 2:pom-1
        v(i) = (ps(i) - a*(v(i-1) + v(i+1)))/b;
    end
    v(pom) = (ps(pom) - a*v(pom - 1))/b;
end
```

Použite ju na výpočet numerického riešenia ceny call opcie - hlavný program zostáva rovnaký, jediná zmena je, že namiesto funkcie `gs` voláte funkciu `sor`.

:: Ďalšie úlohy na precvičenie ::

1. Naprogramujte numerický výpočet ceny put opcie. (Okrajové podmienky: ak je cena akcie S blízka nule, cena put opcie je približne *E*exp(-r*tau)-S*exp(-D*tau)*, ak je cena akcie veľmi veľká, cena put opcie je blízka nule.)

2.

Riešime Black-Scholesovu rovnicu s nasledujúcimi parametrami: σ=0.35, $L = 2$ (t.j. riešenie transformovanej rovnice riešime pre $x \in [-2, 2]$).

- Zvoľte si časový krok k a počet bodov delenia n na $(0, L]$ - t.j. priestorový $h = L/n$, počet všetkých deliacich bodov je $2n + 1$ a počet bodov, v ktorých p riešenie (a teda rozmer matice iteračnej metódy) je $2n - 1$.
- Na riešenie sústavy lineárnych rovníc, ktorá vznikne pri použití implicitnej n schémy, použijeme SOR metódu. Napíšte ju v tvare
$$x^{n+1} = Tx^n + v.$$
Ako ovplyvňujú vlastnosti matice T rýchlosť konvergencie metódy k presnému sústavy?
- Uvažujme vektor `1:0.05:1.9` ako vektor hodnôt parametra ω SOR metódy. Pre každú hodnotu vypočítajte spektrálny polomer prislušnej matice T z predpi metódy. Zakreslite do grafu (x-ová os: parameter ω, y-ová os: spektrálny polom
- Pre každú hodnotu parametra ω spustite program pre výpočet prvej časovej v (použite vždy tú istú začiatočnú aproximáciu a to isté krirérium pre zastaveni Zaznamenávajte počet iterácií. Zakreslite do grafu (x-ová os: parameter ω, y- iterácie).

Mali by ste dostať podobné grafy ako sú vyššie na tejto stránke.
