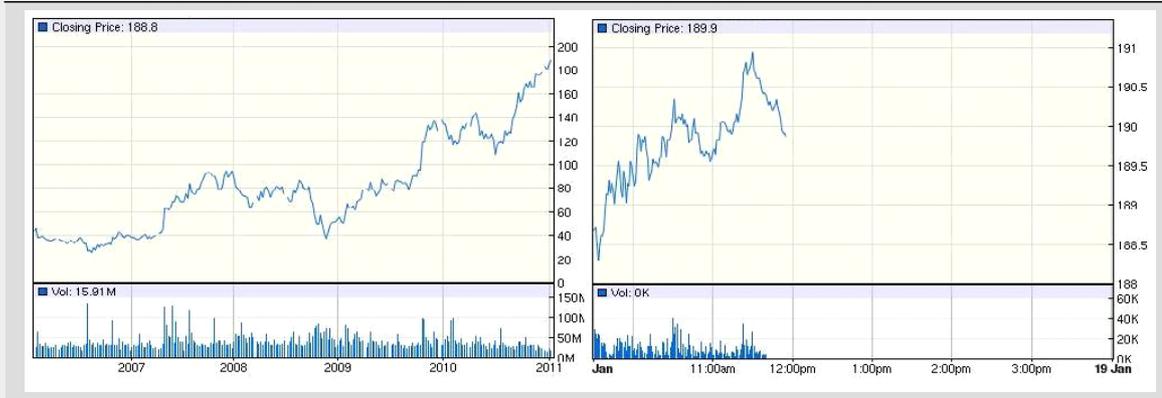


Náhodné procesy, modelovanie cien akcií

:: Stochastický vývoj finančných veličín ::

- Z priebehov cien akcií (ako aj iných finančných veličín - úrokových mier, výmenných kurzov, ...) vidíme, že ich priebeh sa nedá popísať deterministickou funkciou. Preto sa na ich modelovanie používajú náhodné procesy.
- Vľavo: trend (vývoj ceny počas piatich rokov), vpravo: fluktuácie (vývoj ceny počas niekoľkých hodín):



Zdroj: <http://finance.google.com>

:: Wienerov proces a Brownov pohyb ::

- Základným náhodným procesom, z ktorého sú ostatné odvodené, je **Wienerov proces**. Pripomeňme si jeho definíciu:

Náhodný proces $\{W(t), t \geq 0\}$ sa nazýva **Wienerov proces**, ak

- prírastky $W(t+\Delta t) - W(t)$ majú normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a s disperziou Δt ,
- pre každé delenie $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ sú prírastky $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa predchádzajúceho bodu,
- $W(0)=0$,
- trajektórie sú spojité.

Ďalej bude w všade označovať Wienerov proces.

- Ako získame realizáciu Wienerovho procesu?

- Budeme generovať aproximáciu - hodnoty v diskretných bodoch typu (čas, hodnota), ktoré pospájame.
- Hodnoty budú v bodoch $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$, kde Δt je dostatočne malý časový krok.
- Hodnota v čase 0 je 0.
- Prírastok na intervale $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ je náhodná premenná s nulovou strednou hodnotou a varianciou Δt .

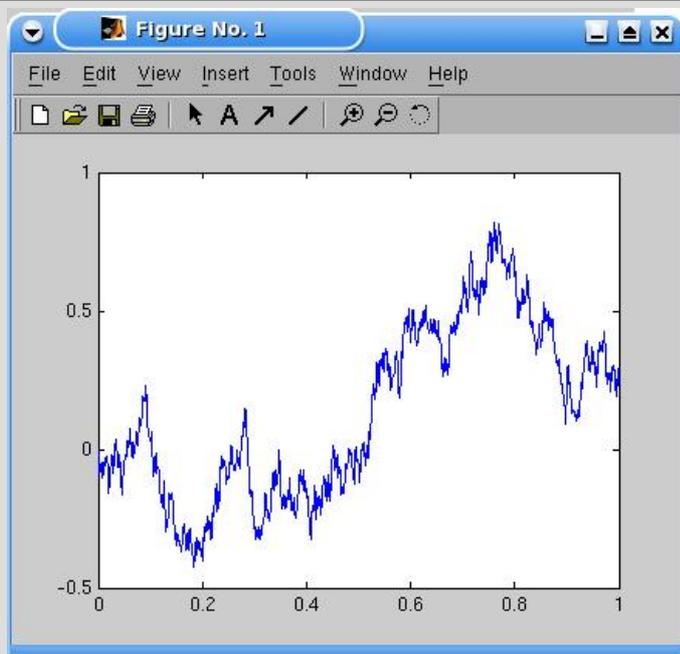
V Matlabe:

```
%-----  
% SIMULACIA WIENEROVHO PROCESU  
%-----  
  
T=1;           % do casu T  
dt=0.001;     % casovy krok dt  
t=(0:dt:T);   % vektor casov, v ktorych generujeme hodnoty procesu  
n=length(t);  
  
w(1)=0;       % Wienerov proces zacina z nuly  
for i=1:n-1   % prvu hodnotu mame, potrebujeme zvyšnych n-1  
    dw=sqrt(dt)*randn; % prirastok dw; randn ~ N(0,1) => dw ~ N(0,dt)  
    w(i+1)=w(i)+dw;   % nova hodnota = povodna + prirastok  
end;  
  
plot(t,w);    % vykreslime priebeh
```

Poznamenajme, že na zrýchlenie výpočtov v Matlabe sa dajú využiť funkcie pre prácu s vektormi (namiesto cyklov):

```
%-----  
% RYCHLEJSIA SIMULACIA WIENEROVHO PROCESU  
%-----  
  
T=1;           % do casu T  
dt=0.001;     % casovy krok dt  
t=(0:dt:T);   % vektor casov, v ktorych generujeme hodnoty procesu  
n=length(t);  
  
dw=sqrt(dt)*randn(n-1,1); % vektor prirastkov - nezavisle N(0,dt)  
w=[0;cumsum(dw)];        % zaciname z nuly, dalej kumulativne sucky dw  
  
plot(t,w);    % vykreslime priebeh
```

Ukážka výstupu:



- Ak k násobku Wienerovho procesu pridáme lineárny trend:

$$x(t) = \mu t + \sigma w(t)$$

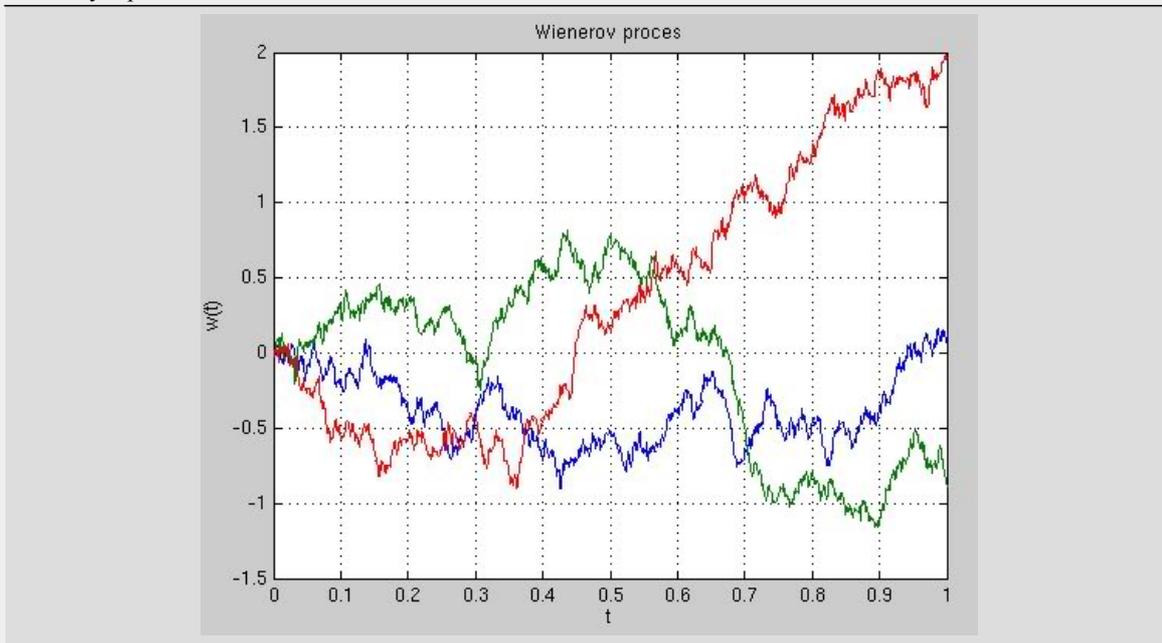
dostávame proces, ktorý sa nazýva **Brownov pohyb**.

Ak je parameter σ nulový, grafom je priamka. Pre nenulovú hodnotu σ sa k tomuto lineárnemu trendu pridávajú náhodné fluktuácie.

:: Cvičenia (1) ::

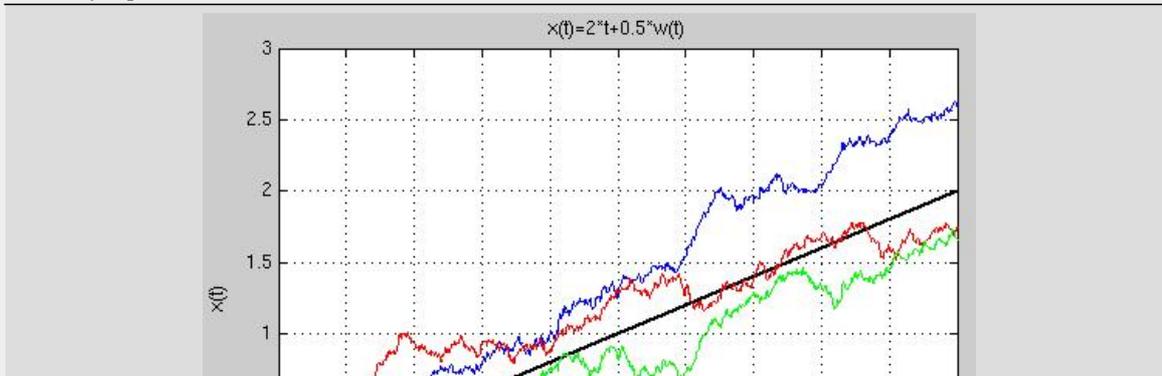
1. Nakreslite do jedného grafu niekoľko realizácií Wienerovho procesu.

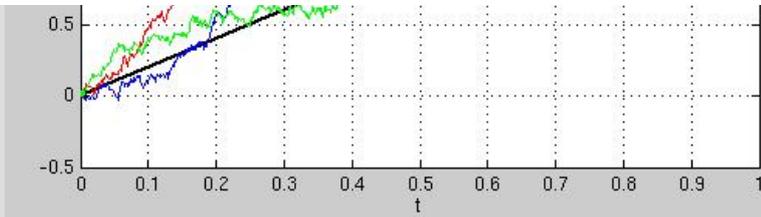
Ukážka výstupu:



2. Nakreslite do jedného grafu niekoľko realizácií Brownovho pohybu so zvolenými parametrami. Do toho istého grafu zakreslite strednú hodnotu tohto procesu.

Ukážka výstupu:

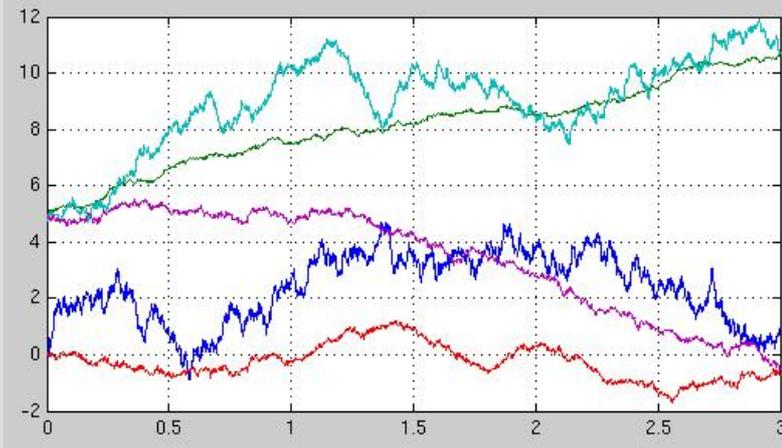




3. Prirad'te procesy

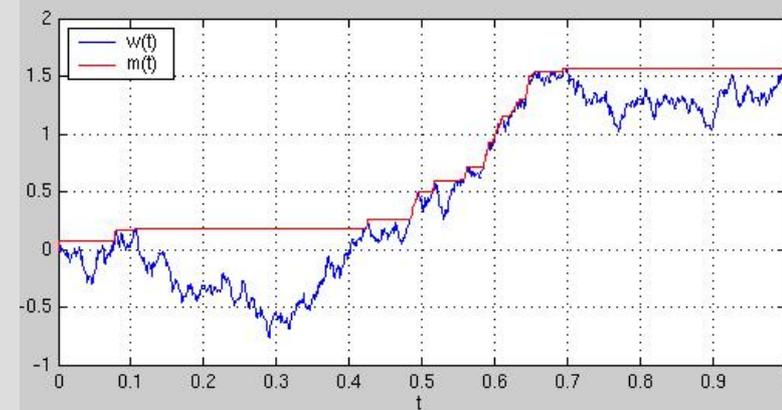
- o $x_1(t)=w(t)$
- o $x_2(t)=3*w(t)$
- o $x_3(t)=5+2*t+w(t)$
- o $x_4(t)=5+2*t+0.5*w(t)$
- o $x_5(t)=5-3*t+w(t)$

k ich realizáciám na grafe:



4. Definujme proces $m(t)=\max(w(s), s \leq t)$, t. j. maximum Wienerovho procesu na intervale $[0,t]$. Zobrazte do jedného grafu trajektóriu Wienerovho procesu a trajektóriu procesu $m(t)$ (počítaného z tejto realizácie Wienerovho procesu).

Ukážka výstupu:



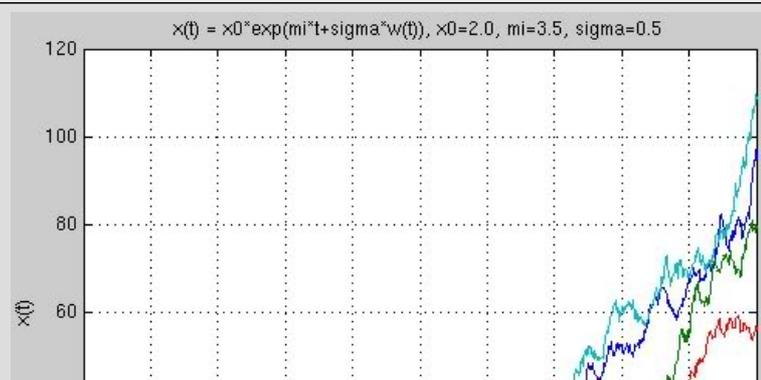
:: Geometrický Brownov pohyb ::

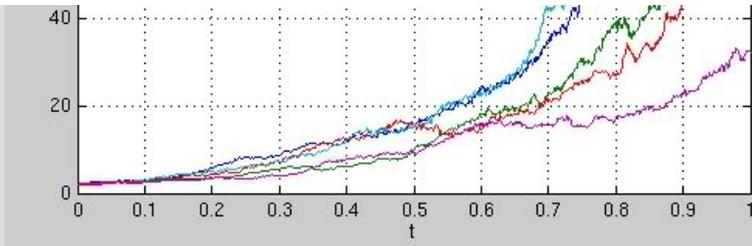
- Geometrický Brownov pohyb je proces definovaný vzťahom

$$x(t) = x_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$$

pričom x_0 predstavuje hodnotu procesu v čase 0.

- Ukážka trajektórií geometrického Brownovho pohybu:





:: Modelovanie cien akcií pomocou geometrického Brownovho pohybu ::

- Cenu akcie S modelujeme geometrickým Brownovým pohybom:

$$S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$$

- Na výpočet výnosov sa používa veličina

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) = \ln\left(1 + \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}\right) \approx \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}},$$

pričom posledná aproximácia vyplýva z toho, že

$$\ln(1+x) \approx x \text{ pre } x \approx 0$$

- Ak sa cena akcie S riadi geometrickým Brownovým pohybom, tak pre výnosy dostávame

$$v_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) = \mu\Delta t + \sigma(w(t) - w(t-\Delta t)) \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$$

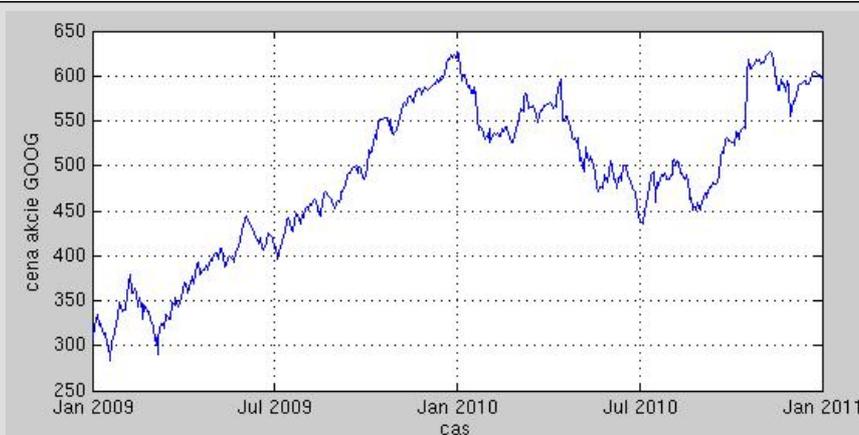
teda výnosy sú nezávislé náhodné premenné s normálnym rozdelením a uvedenými parametrami.

- **Ako získať parametre geometrického Brownovho pohybu z dát** - odhadom parametrov normálneho rozdelenia z výnosov:

- Zo súboru [goog.txt](#) načítame dáta do Matlabu. Ide o denné dáta cien akcie firmy Google v rokoch 2009 a 2010, na začiatku súboru sú najstaršie dáta.

```
s=load('goog.txt');
dt=1/252; % denne data, cas sa v modeli pocita v rokoch
```

Priebeh ceny je nasledovný:



- Definujeme výnosy - napríklad takto:

```
n=length(s);
for i=1:n-1
    v(i)=log(s(i+1)/s(i));
end;
% alebo vektorovo namiesto cyklu:
% v=log(s(2:n)./s(1:n-1));
```

- Vieme, že tieto výnosy majú normálne rozdelenie. Ďalej vieme, že strednú hodnotu normálneho rozdelenia odhadujeme aritmetickým priemerom a disperziu výberovou disperziou. Vypočítame teda priemer a výberovú disperziu vektora v - budú to odhady veličín $\mu\Delta t$ a $\sigma^2\Delta t$

```
miDelta=mean(v); % odhad mi*dt
s2Delta=var(v); % odhad (sigma^2)*dt
```

- Nakoniec vypočítame odhady samotných parametrov μ a σ^2 :

```
mi=miDelta/dt; % odhad parametra mi
sigma=sqrt(s2Delta/dt); % odhad parametra sigma
```

- Dostaneme:

```
>> mi
```

```

mi =
    0.3225

>> sigma

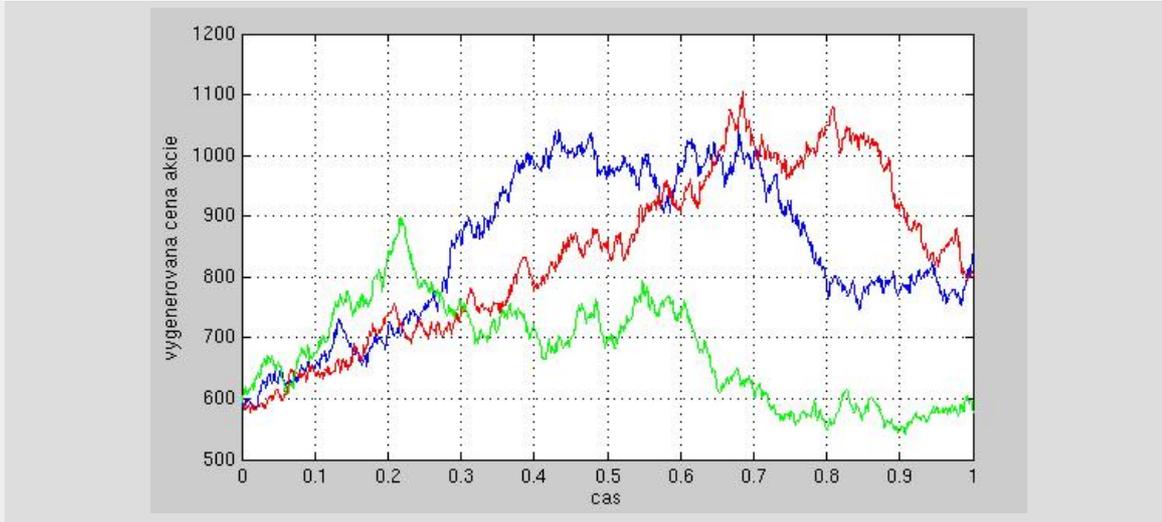
sigma =
    0.2877

```

:: Cvičenie (2) ::

1. Pre vývoj ceny akcie uvažujme parametre geometrického Brownovho pohybu odhadnuté v predchádzajúcom výpočte a poslednú hodnotu cenu akcie z dát (t. j. 593.97). Vygenerujte niekoľko priebehov ceny akcie počas nasledujúceho roka, štartujúcich z tejto hodnoty.

Ukážka výstupu:



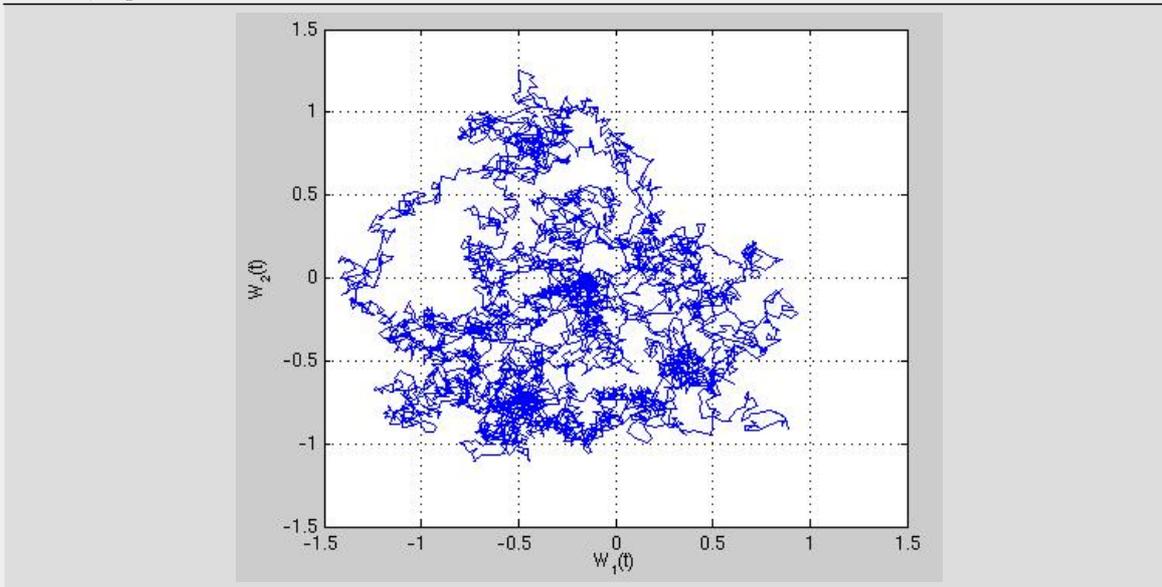
:: Ďalšie príklady na precvičenie ::

1. **Dvojrozmerný Brownov pohyb s nekorelovanými zložkami** je proces (w_1, w_2) , kde w_1, w_2 sú Wienerove procesy a pre ich prírastky na intervale $[s, t]$ platí

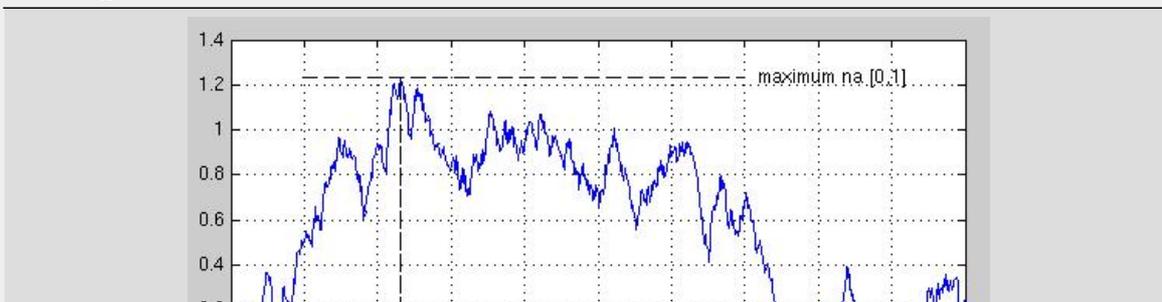
$$\text{cor}(w_1(t) - w_1(s), w_2(t) - w_2(s)) = 0$$

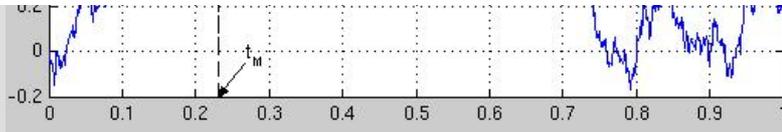
Vygenerujte trajektóriu takéhoto procesu a zobrazte ju (ako krivku v rovine).

Ukážka výstupu:



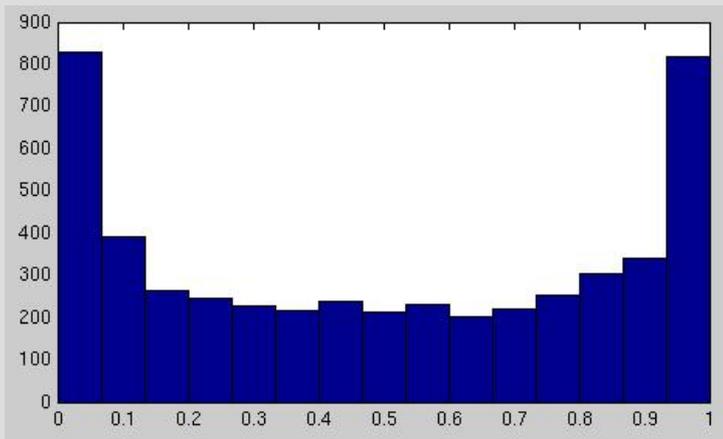
2. Označme t_M čas, v ktorom nadobudol Wienerov proces maximum na časovom intervale $[0,1]$:



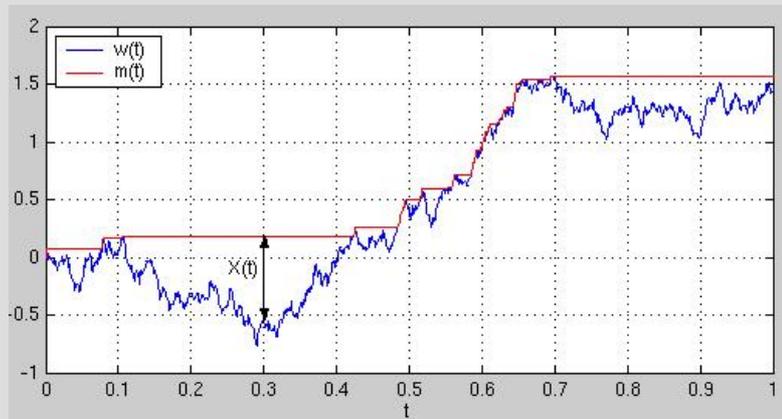


Spravte simulácie a zobrazte histogram náhodnej premennej t_M .

Ukážka výstupu:



3. V cvičení (1)/4 sme definovali proces m , najvyššiu hodnotu Wienerovho procesu, ktorú doteraz dosiahol. Definujte teraz proces X , ktorý vyjadruje vzdialenosť aktuálnej hodnoty Wienerovho procesu od doteraz dosiahnutého maxima:



Doplňte do takéhoto grafu priebeh procesu X .

4. Vyberte si akciu a stiahnite si z <http://finance.yahoo.com> historické dáta cien tejto akcie počas zvoleného časového obdobia. Predpokladajte, že cena akcie sa dá popísať geometrickým Brownovým pohybom a odhadnite jeho parametre.

Historické ceny akcií:

- o Chodte na stránku <http://finance.yahoo.com>.
- o Zadaťte kód firmy alebo jej názov:



Potom kliknite na **Get Quotes**.

- o Vľavo kliknite na **Historical Prices**:



- o Tu zvolte obdobie, za ktoré chcete dáta a ich frekvenciu:

Historical Prices

[Get Historical Price](#)

Set Date Range

Start Date: Jan 1 2010 Eg. Jan 1, 2010
 End Date: Dec 31 2010

Daily
 Weekly
 Monthly
 Dividends Only

Get Prices

o Dostanete tabuľku s dátami (na začiatku sú najnovšie), potrebujete z nej stĺpec **Adj Close**.

| Prices | | | | | | |
|--------------|-------|-------|-------|-------|------------|------------|
| Date | Open | High | Low | Close | Volume | Adj Close* |
| Dec 31, 2010 | 27.80 | 27.92 | 27.63 | 27.91 | 24,752,000 | 27.75 |
| Dec 30, 2010 | 27.92 | 28.00 | 27.78 | 27.85 | 20,786,100 | 27.69 |
| Dec 29, 2010 | 27.94 | 28.12 | 27.88 | 27.97 | 19,502,500 | 27.81 |
| Dec 28, 2010 | 27.97 | 28.17 | 27.96 | 28.01 | 23,042,200 | 27.85 |
| Dec 27, 2010 | 28.12 | 28.20 | 27.88 | 28.07 | 21,652,800 | 27.91 |
| Dec 23, 2010 | 27.97 | 28.32 | 27.96 | 28.30 | 24,902,500 | 28.13 |
| Dec 22, 2010 | 28.01 | 28.40 | 27.98 | 28.19 | 42,252,300 | 28.02 |
| Dec 21, 2010 | 27.85 | 28.14 | 27.76 | 28.07 | 38,153,000 | 27.91 |
| Dec 20, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 17, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 16, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 15, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 14, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 13, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 10, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 9, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 8, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 7, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 6, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 5, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 4, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 3, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 2, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Dec 1, 2010 | 27.85 | 27.88 | 27.68 | 27.81 | 53,811,000 | 27.65 |
| Sep 30, 2010 | 24.61 | 24.83 | 24.36 | 24.49 | 61,262,700 | 24.20 |
| Sep 29, 2010 | 24.63 | 24.66 | 24.40 | 24.50 | 44,318,900 | 24.21 |

* Close price adjusted for dividends and splits.

First | Previous | Next | Last

[Download to Spreadsheet](#)

Currency in USD.

o Kliknutím na **Download as Spreadsheet** si dáta uložíte v csv formáte:

```
Date,Open,High,Low,Close,Volume,Adj Close
2010-12-31,27.80,27.92,27.63,27.91,24752000,27.75
2010-12-30,27.92,28.00,27.78,27.85,20786100,27.69
2010-12-29,27.94,28.12,27.88,27.97,19502500,27.81
2010-12-28,27.97,28.17,27.96,28.01,23042200,27.85
2010-12-27,28.12,28.20,27.88,28.07,21652800,27.91
2010-12-23,27.97,28.32,27.96,28.30,24902500,28.13
2010-12-22,28.01,28.40,27.98,28.19,42252300,28.02
2010-12-21,27.85,28.14,27.76,28.07,38153000,27.91
2010-12-20,27.95,27.99,27.68,27.81,52811000,27.65
2010-12-17,27.92,28.09,27.75,27.90,87456500,27.74
2010-12-16,27.76,27.99,27.66,27.99,57680200,27.83
2010-12-15,27.53,27.80,27.53,27.85,60634200,27.60
```

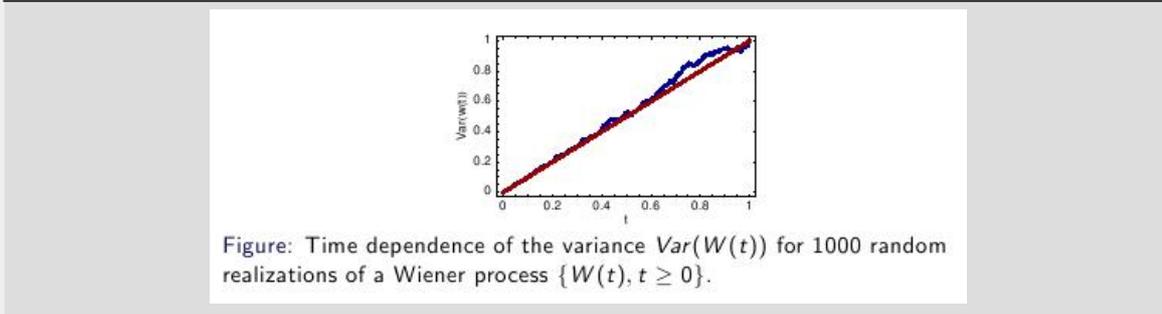
5. Prírastky a ich rozdelenie

- Definujme proces $\{Y(t), t \geq 0\}$, ktorého prírastky $Y(t+\Delta t) - Y(t)$ majú strednú hodnotu $(\Delta t)^2$ a disperziu Δt . Ďalej od procesu $Y(t)$ požadujeme, aby pre každé delenie $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ boli prírastky $Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}$ nezávislé náhodné premenné. Ukážte, že tieto predpoklady vedú k sporu, t. j. takýto proces neexistuje.
- Definujme proces $\{Y(t), t \geq 0\}$, ktorého prírastky $Y(t+\Delta t) - Y(t)$ majú nulovú strednú hodnotu a konštantnú nenulovú disperziu. Ďalej od procesu $Y(t)$ požadujeme, aby pre každé delenie $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ boli prírastky $Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}$ nezávislé náhodné premenné. Ukážte, že tieto predpoklady vedú k sporu, t. j. takýto proces neexistuje.
- Definujme proces $\{Y(t), t \geq 0\}$, ktorého prírastky $Y(t+\Delta t) - Y(t)$ majú nulovú strednú hodnotu a disperziu $(\Delta t)^2$.

Ďalej od procesu $Y(t)$ požadujeme, aby pre každé delenie $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ boli prírastky $Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}$ nezávislé náhodné premenné. Ukážte, že tieto predpoklady vedú k sporu, t. j. takýto proces neexistuje.

Návod: Prednáška, slajdy *Additive property of the Brownian motion - mean* a *Additive property of the Brownian motion - variance*.

6. Z prednášky:



Spravíme podobný obrázok pre varianciu a tiež pre strednú hodnotu:

- o Zvoľte si delenie intervalu $[0,1]$ a vytvorte maticu, v ktorej budú hodnoty 1000 trajektórií Wienerovho procesu v týchto bodoch.

Ukážka výstupu:

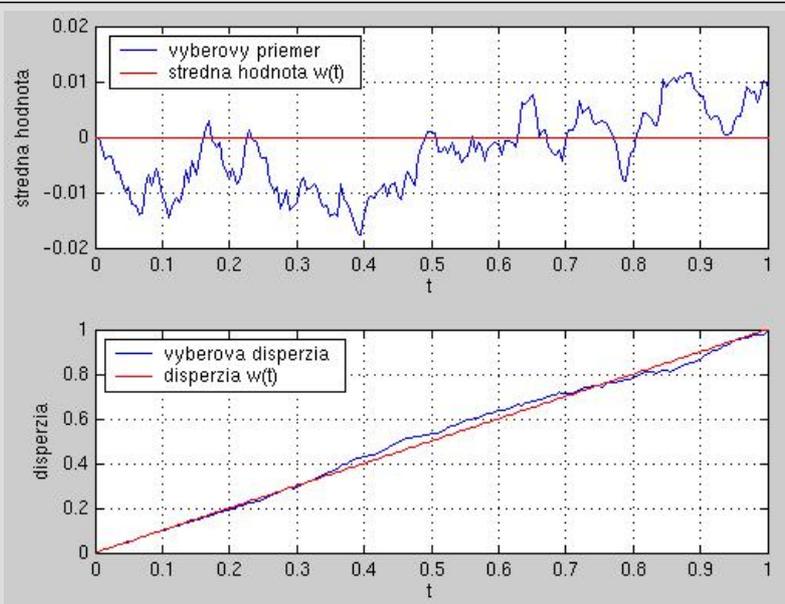
| | | | | | | | |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------------|
| 0 | 0.0506 | 0.1637 | 0.0177 | -0.0349 | -0.0225 | 0.0149 | 1. trajektória |
| 0 | -0.0051 | -0.0755 | -0.1283 | -0.1305 | -0.0606 | -0.1030 | 2. trajektória |
| 0 | 0.0375 | 0.1885 | 0.2135 | 0.2299 | 0.3210 | 0.3200 | |
| 0 | 0.0572 | 0.1936 | 0.2216 | 0.1607 | 0.3327 | 0.2733 | |
| 0 | -0.0174 | -0.0277 | -0.1104 | -0.1119 | -0.0682 | 0.0637 | |
| 0 | -0.0426 | -0.1129 | -0.0288 | 0.1401 | 0.3003 | 0.4630 | |
| 0 | 0.0327 | 0.1238 | 0.0562 | 0.1407 | 0.1120 | 0.0694 | |
| 0 | 0.1197 | 0.1521 | 0.2275 | 0.2185 | 0.2318 | 0.1998 | |
| 0 | -0.0231 | -0.0258 | 0.0713 | 0.0931 | 0.1103 | 0.1391 | |
| 0 | 0.0009 | -0.0650 | -0.0322 | -0.1364 | -0.1977 | -0.1926 | |

v bode t1 v bode t2

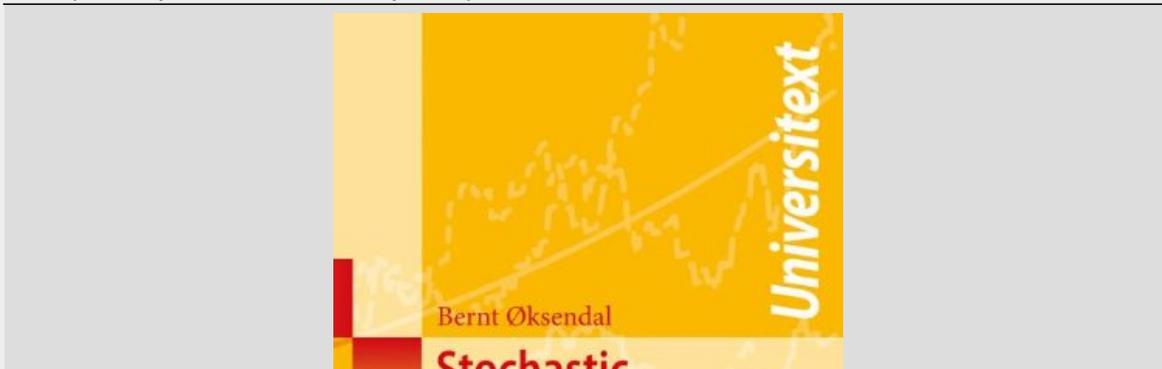
hodnoty trajektórií v bode t0

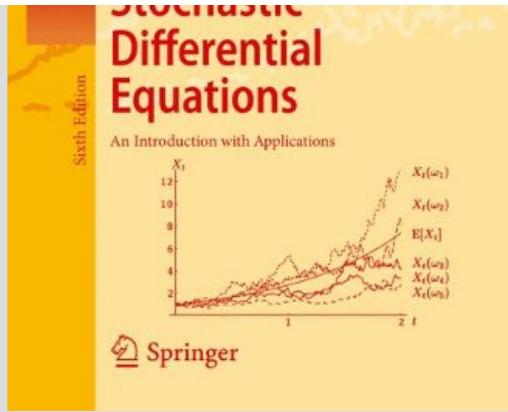
- o Vypočítajte výberový priemer a disperziu trajektórií v každom čase a zakreslite ich do grafu spolu s presnými hodnotami strednej hodnoty a disperzie.

Ukážka výstupu:



7. Čo si myslíte, čo je na obrázku na obale tejto knihy?





Vytvorte podobný obrázok.

Cvičenia z finančných derivátov, 2011
Beáta Stehliková, FMFI UK Bratislava

E-mail: stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk

Web: <http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/>

