

Black-Scholesov model

:: Cena európskej call a put opcie ::

• Call opcia:

```
function [v]=call(S,E,r,sigma,tau)
d1=(log(S/E)+(r+0.5*sigma^2)*tau)/(sigma*sqrt(tau));
d2=(log(S/E)+(r-0.5*sigma^2)*tau)/(sigma*sqrt(tau));
v=S*normcdf(d1)-E*exp(-r*tau)*normcdf(d2)
```

• Príklad:

Úroková miera je jedno percento. Aká je cena call opcie s expiračnou cenou 120 USD a s expiračným časom pol roka, ak dnešná cena akcie je 100 USD a volatilita akcie σ je 0.3?

```
>> call(100,120,0.01,0.3,0.5)
ans =
    2.6056
```

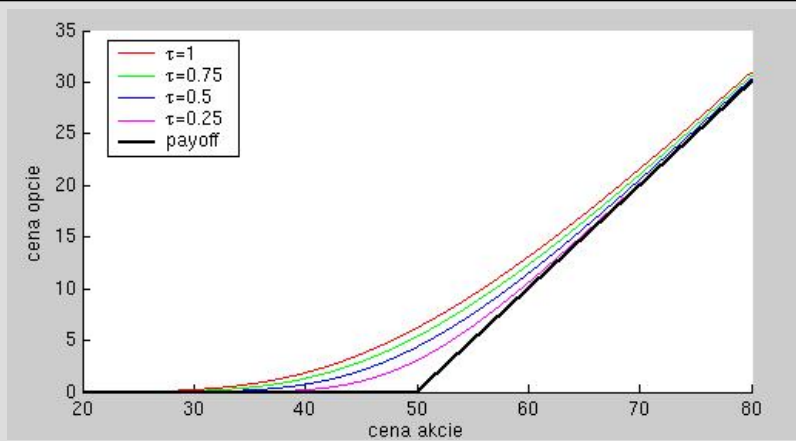
• Put opcia: dá sa oceniť napríklad pomocou put-call parity:

- o Uvažujme portfólio zložené z mínus jednej call opcie, jednej put opcie (na tú istú akciu, s rovnakou expiračnou cenou E a rovnakým expiračným časom) a jednej príslušnej akcie.
 - o V čase expirácie je hodnota portfólia E.
 - o Preto ak do expirácie zostáva čas τ , hodnota portfólia je $Ee^{-r\tau}$ - cenu callu poznáme, takže môžeme vyjadriť cenu putu.
- Z linearity Black-Scholesovej rovnice vyplýva, že ak je koncová podmienka derivátu lineárnou kombináciou call a put opcií, rovnakou lineárnou kombináciou cien call a put opcií dostaneme cenu tohto derivátu.

:: Cvičenia (1) ::

1. Vypočítajte cenu európskej call opcie s expiráciou o pol roka, ktorej expiračná cena je 50 USD. Dnešná cena akcie je 41 USD, jej volatilita je 0.3. Úroková miera je pol percenta.
2. Nakreslite graf s cenou akcie na x-ovej osi, na ktorom bude payoff call opcie a jej cena pre niekoľko časov do expirácie.

Ukážka výstupu..



3. Analýza reálnych cien opcií.

- o V súbore [ibm-data.txt](#) si stiahnite denné dáta cien akcie firmy IBM a odhadnite z nich parameter σ geometrického Brownovho pohybu - tzv. **historickú volatilitu**.
- o Túto odhadnutú volatilitu budeme teraz dosadzovať do Black-Scholesovho vzorca. Uvažujme nasledujúce dáta zo 16. marca 2011 pre ceny akcie a call opcií:

International Business Machines Corp. (IBM) On Mar 16: 153.00

Options

View By Expiration: Mar 11 | **Apr 11** | Jul 11 | Oct 11 | Jan 12 | Jan 13

Call Options		Expire at close Friday, April 15, 2011					
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
105.00	IBM110416C00105000	59.00	0.00	N/A	N/A	0	1
110.00	IBM110416C00110000	47.15	0.00	N/A	N/A	2	89
115.00	IBM110416C00115000	45.35	0.00	N/A	N/A	0	115
120.00	IBM110416C00120000	33.50	0.00	N/A	N/A	6	75
125.00	IBM110416C00125000	22.05	0.00	N/A	N/A	10	125

125.00	IBM110416C00125000	28.95	0.00	N/A	N/A	18	125
130.00	IBM110416C00130000	24.30	0.00	N/A	N/A	7	88
135.00	IBM110416C00135000	19.10	0.00	N/A	N/A	25	133
140.00	IBM110416C00140000	14.40	0.00	N/A	N/A	281	531
145.00	IBM110416C00145000	10.20	0.00	N/A	N/A	694	2,284
150.00	IBM110416C00150000	6.65	0.00	N/A	N/A	2,159	5,837
155.00	IBM110416C00155000	3.80	0.00	N/A	N/A	4,270	6,577
160.00	IBM110416C00160000	1.90	0.00	N/A	N/A	7,142	8,793
165.00	IBM110416C00165000	0.89	0.00	N/A	N/A	9,309	10,151
170.00	IBM110416C00170000	0.39	0.00	N/A	N/A	2,235	7,909
175.00	IBM110416C00175000	0.18	0.00	N/A	N/A	559	4,750
180.00	IBM110416C00180000	0.09	0.00	N/A	N/A	99	1,999
185.00	IBM110416C00185000	0.05	0.00	N/A	N/A	14	679
190.00	IBM110416C00190000	0.03	0.00	N/A	N/A	19	225

- o Za bezrizikovú úrokovú mieru zoberieme výnos 3-mesačných Treasury bonds:

Maturity	Yield	Yesterday	Last Week	Last Month
3 Month	0.06	0.07	0.07	0.09
6 Month	0.12	0.12	0.14	0.14
2 Year	0.55	0.60	0.69	0.84
3 Year	0.97	1.06	1.06	1.41
5 Year	1.85	1.96	2.14	2.36
10 Year	3.20	3.30	3.47	3.62
30 Year	4.38	4.45	4.60	4.67

- o Na výpočet času zostávajúceho do expirácie môžete využiť takýto výpočet (zohľadňuje soboty a nedele, prípadné sviatky treba odpočítať samostatne):

```
% pocet pracovnych dni medzi x,y vo formate 'mm/dd/yy'
% ukazka vypoctu pre x=1.3.2011 a y=31.3.2011

x=datenum('03/01/11');
y=datenum('03/31/11');

pocDni=0;
for i=x+1:y
    den=weekday(i); % 1=nedela, 2=pondelok, ...
    if (den>1)&&(den<7) pocDni=pocDni+1; end;
end;
```

- o Vypočítajte Black-Scholesove ceny týchto opcií a porovnajte ich s reálnymi trhovými cenami. Aké sú rozdiely v centoch? Aké sú relatívne rozdiely v percentách?

:: Implikovaná volatilita ::

- Implikovaná volatilita je taká hodnota volatility σ , ktorej dosadením do Black-Scholesovho vzorca dostaneme trhovú cenu opcie.
- Závislosť ceny call opcie od volatility:
 - o Cena call opcie je rastúcou funkciou volatility.
 - o Ak volatilita konverguje k nule, limita ceny call opcie je $\max(0, S - E \cdot \exp(-r \tau))$.
 - o Ak, naopak, volatilita ide do nekonečna, limita ceny opcie je aktuálna cena akcie S.
 - o Ak je teda trhovú cenu call opcie z intervalu $(\max(0, S - E \cdot \exp(-r \tau)), S)$, tak implikovaná volatilita existuje a je jednoznačne určená.
- Je viacero možností, ako implikovanú volatilitu prakticky vypočítať, tu je jedna z nich:

Definujeme funkciu [rozdiel.m](#), ktorej parametrom je sigma a vracia rozdiel medzi skutočnou a Black-Scholesovou cenou. Ostatné parametre výpočtu sú definované ako globálne premenné:

```
Command Window
>> help rozdiel

vstup: sigma = volatilita (rocna, ako desatinne cislo, t.j. 0.3 = 30%)
vystup: rozdiel ceny europskej call opcie
        podľa Black-Scholesovho vzorca a realnej ceny

--- Globalne premenne: ---
s = cena akcie
e = expiracna cena
tau = expiracia (v rokoch)
r = urokovna miera (p.a., ako desatinne cislo, t.j. 0.01 = 1%)
v = cena opcie
```

Príklad použitia:

```
global s;
global e;
```

```

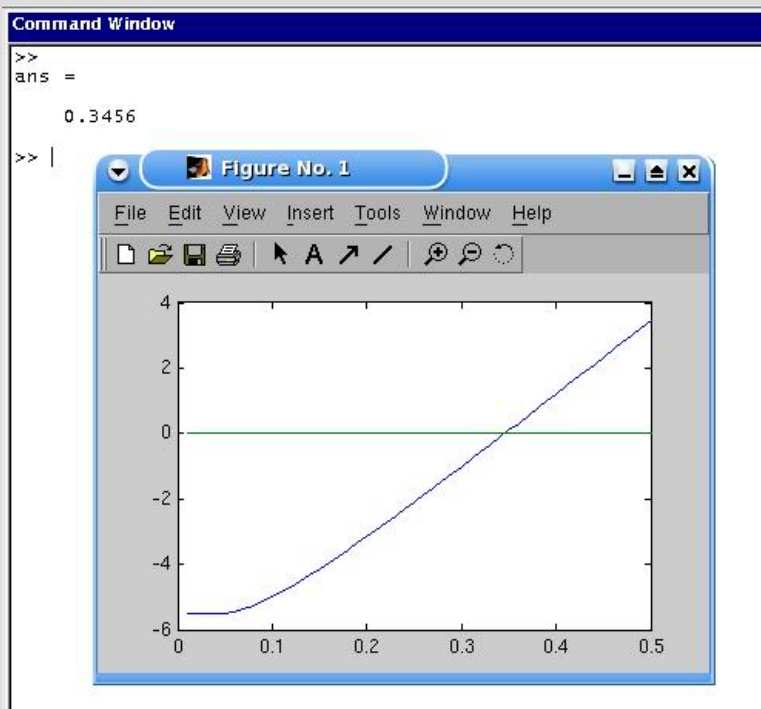
global tau;
global r;
global v;

s=85.2;
e=80;
r=0.01;
tau=0.5;
v=11.12;

% hladame nulovy bod tejto funkcie
sig=0.01:0.01:0.5;
plot(sig,rozdiel(sig),sig,zeros(1,length(sig)));
% vypocet
sImpl=fzero(@rozdiel,0.4);

```

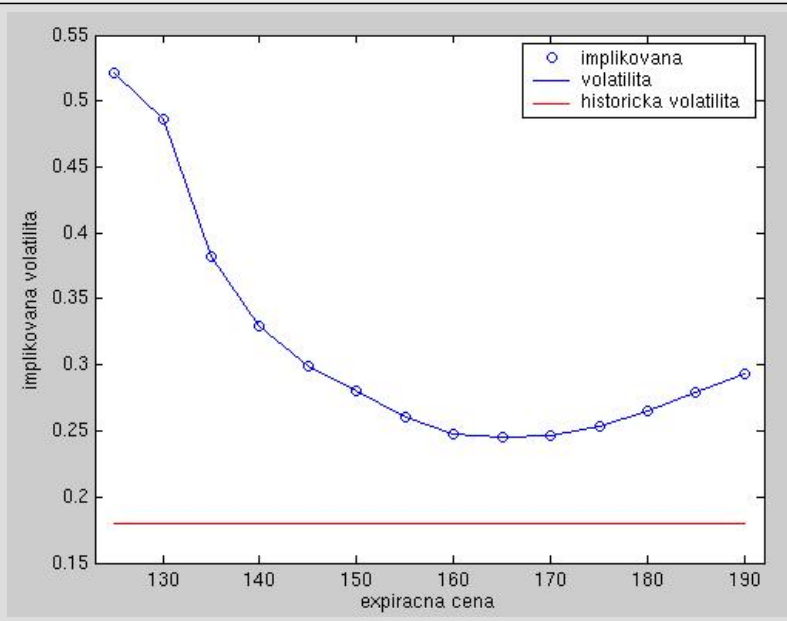
Výstup:



:: Cvičenia (2) ::

1. Vyčítajte implikovanú volatilitu pre opcie na akcie IBM z cvičenia (1)/3. Zakreslite ich do grafu v závislosti od expiračnej ceny a pridajte do grafu historickú volatilitu.

Výsledok - po vynechaní opcií s najnižšími expiračnými cenami (s ktorými sa veľmi málo obchodovalo) dostávame typický **volatility smile**:



:: Delta opcie ::

- Delta opcie je derivácia ceny opcie podľa ceny akcie. Pre call opciu sa rovná $N(d_1)$
- Z odvodenia Black-Scholesovho vzorca vidieť, že predstavuje **počet akcií, ktoré kúpime pri hedžovaní jednej predanej opcie.**

:: Cvičenia (3) ::

1. Nakreslite graf závislosti delty call opcie od aktuálnej ceny akcie. Nakreslite do jedného grafu deltu pre rôzne časy do expirácie. V čom sa líšia?
2. Na základe hedžovania predanej opcie vysvetlite priebeh grafu z predchádzajúcej úlohy - znamienko, monotónnosť, priebeh pre tau blízke nule.
3. V súbore [msft.txt](#) je vývoj cien akcie firmy MSFT a opcií na tieto akcie. Formát:

dátum a čas	bid, ask cena akcie	opcia: rok a mesiac expirácie, expiračná cena, typ opcie	bid, ask cena opcie
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 25.00 CALL	0.95 1.10
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 25.00 PUT	0.05 0.15
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 27.50 CALL	0.05 0.10
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 27.50 PUT	1.50 1.65
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 30.00 CALL	0 0.05
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 30.00 PUT	3.90 4.10
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 32.50 CALL	0 0.05
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 32.50 PUT	6.40 6.60
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 35.00 CALL	0 0.05
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 35.00 PUT	8.90 9.10

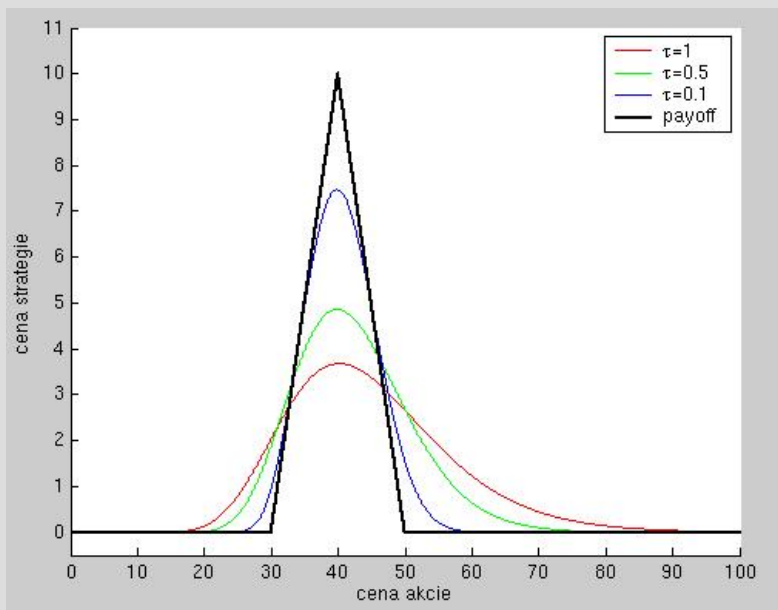
Zvoľte si deň a načítajte dáta o vývoji akcie počas tohto dňa. Zvoľte si opciu a načítajte dáta o vývoji ceny tejto opcie v danom dni. V súbore [msft-call-apr-25.txt](#) sú tieto hodnoty pre call opciu s expiračnou cenou 25 USD a expiráciou v apríli (bid cena akcie, ask cena akcie, bid cena opcie, ask cena opcie).

- o Vypočítajte implikovanú volatilitu pre každú minútu. Budete potrebovať úrokovú mieru, dáta o úrokových mierach z 20. marca 2003 sú napr. na stránke <http://www.federalreserve.gov/releases/h15/20030324/>. Zobrazte priebeh implikovanej volatILITY.
- o Vypočítajte pre každú minútu deltu opcie, pričom za volatilitu budete dosadzovať implikovanú volatilitu z danej minúty. Zobrazte priebeh delty.

:: Ďalšie príklady na precvičenie ::

1. Napíšte funkciu, ktorá počíta cenu putu. Vypočítajte cenu put opcie s expiračnou cenou 105 USD a s expiračným časom pol roka, ak dnešná cena akcie je 100 USD a volatilita akcie σ je 0.3.
2. Vypočítajte hodnotu stratégie, ktorá pozostáva z kúpy call opcie s nízkou expiračnou cenou a predaja call opcie s vyššou expiračnou cenou s tou istou dobou splatnosti. Výpočet ceny stratégie realizujte pre nasledovné dáta: cena akcie 55 USD, volatilita akcie 0.4, úrok jeden a pol percenta, expiračná doba 3 mesiace, expiračné ceny sú 50 a 60 USD.
3. Zostrojte stratégiu typu [butterfly](#) pre zvolené parametre. Znovu nakreslite graf s cenou akcie na x-ovej osi, na ktorom bude payoff stratégie a jej ceny pre niekoľko časov do expirácie.

Ukážka výstupu pre nasledovné dáta: expiračné ceny 30, 40, 50 USD; volatilita akcie 0,25; úroková miera 0,01 (t.j. 1 percento).



4. Uvažujme call opciu na s expiračnou cenou 15 USD, ak dnešná cena akcie je 9 USD. Pre ktoré z nasledujúcich cien opcie -- 2 USD, 5 USD, 7 USD, 10 USD, 15 USD -- existuje implikovaná volatilita? Pre ktorú z nich je implikovaná volatilita najvyššia? Ako sa dá táto otázka zodpovedať bez výpočtu všetkých implikovaných volatilit?
5. Dokážte nasledovné tvrdenie o delte call opcie:

$$\frac{\partial c}{\partial S}$$

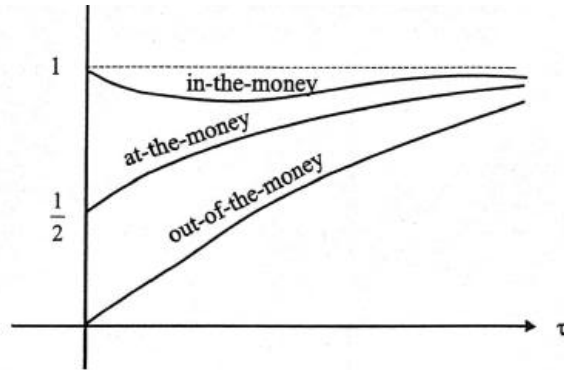


Fig. 2.4 Variation of the delta of the European vanilla call value with respect to time to expiry τ . The delta value always tends to one from below when the time to expiry tends to infinity. The delta value tends to different asymptotic limits as time comes closer to expiry, depending on whether the option is in-the-money, at-the-money or out-of-the-money.

Zdroj: Y.Kwok: *Mathematical Methods for Financial Derivatives*.

Cvičenia z finančných derivátov, 2011
Beáta Stehliková, FMFI UK Bratislava

E-mail: stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk
Web: <http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/>

