Black-Scholesov model: implikovaná volatilita, greeks

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, SvF STU, LS 2011/2012

VI.

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- 29.2.2012, posledné dáta pred zatvorením burzy
- Call opcie firmy Google:

Google Inc. (GOOG) - NasdaqGS

618.25 Feb 29, 4:00PM EST

Options

View By Expiration: **Mar 12** | Apr 12 | Jun 12 | Sep 12 | Jan 13 | Jan 14

Call Options — Expire at close Friday, March 16, 2012

Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
610.00	GOOG120317C00610000	**14.80**	**0.00**	N/A	N/A	658	3,630
615.00	GOOG120317C00615000	**11.80**	0.00	N/A	N/A	1,673	2,492
620.00	GOOG120317C00620000	**9.00**	**0.00**	N/A	N/A	2,672	5,369
625.00	GOOG120317C00625000	**6.77**	0.00	N/A	N/A	2,328	2,585
630.00	GOOG120317C00630000	**5.00**	0.00	N/A	N/A	1,570	6,240
635.00	GOOG120317C00635000	**3.70**	**0.00**	N/A	N/A	558	2,255

- Aká by bolo cena týchto opcií v Black- Scholesovom modeli?

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Pripomeňme si Black-Scholesov vzorec pre call opciu:

$$V(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

kde $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi$ je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$ a

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Potrebujeme teda nasledujúce hodnoty:
  - ◇ S = cena akcie
  - ◇ E = expiračná cena
  - ◇ $T - t$ = čas zostávajúci do expirácie
  - ◇ σ = volatilita akcie
  - ◇ r = úroková miera

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Cena akcie:

Google Inc. (GOOG) - NasdaqGS

618.25 Feb 29, 4:00PM EST

Options

View By Expiration: **Mar 12** | Apr 12 | Jun 12 | Sep 12 | Jan 13 | Jan 14

Call Options Expire at close Friday, March 16, 2012

Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
610.00	GOOG120317C00610000	**14.80**	**0.00**	N/A	N/A	658	3,630

- Teda: $S = 618.25$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Expiračná cena opcie:

Options

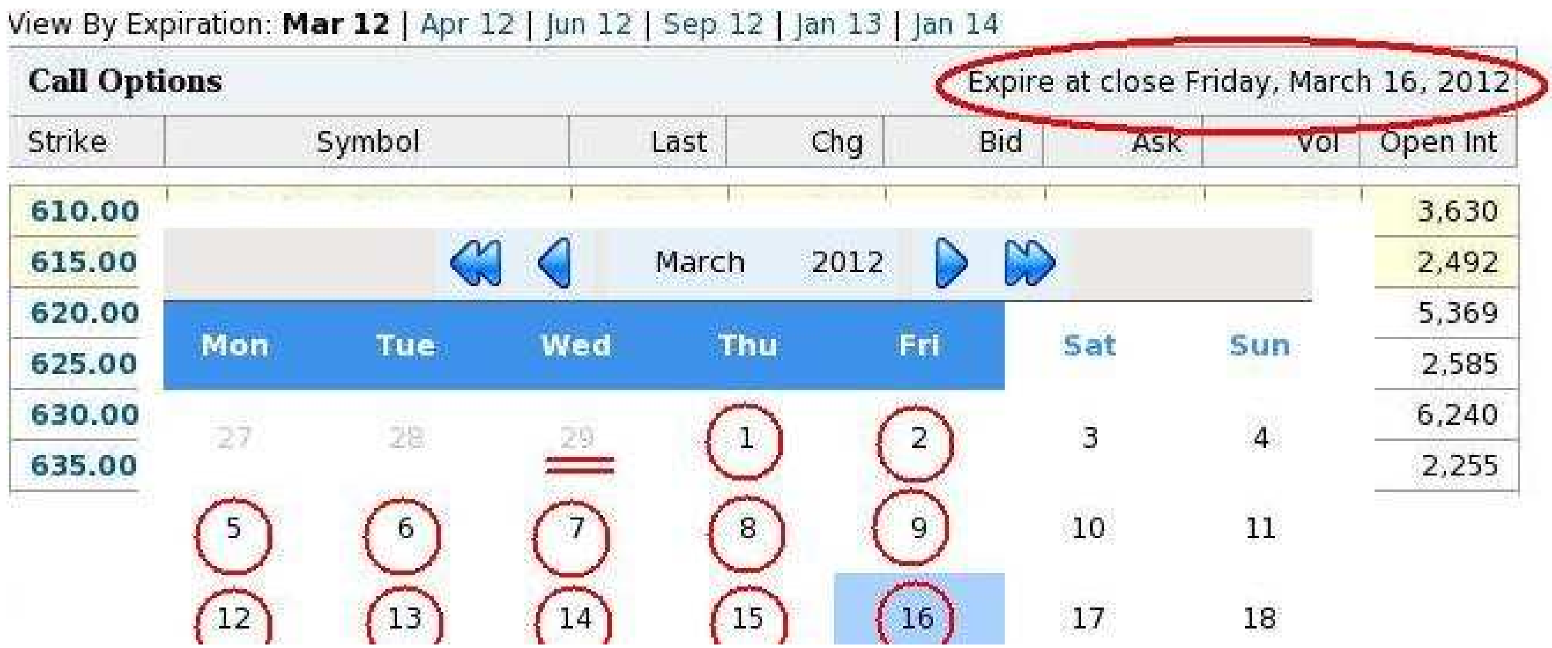
View By Expiration: **Mar 12** | Apr 12 | Jun 12 | Sep 12 | Jan 13 | Jan 14

Call Options							Expire at close Friday, March 16, 2012
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
610.00	GOOG120317C00610000	**14.80**	**0.00**	N/A	N/A	658	3,630
615.00	GOOG120317C00615000	**11.80**	0.00	N/A	N/A	1,673	2,492
620.00	GOOG120317C00620000	**9.00**	**0.00**	N/A	N/A	2,672	5,369
625.00	GOOG120317C00625000	**6.77**	0.00	N/A	N/A	2,328	2,585
630.00	GOOG120317C00630000	**5.00**	0.00	N/A	N/A	1,570	6,240
635.00	GOOG120317C00635000	**3.70**	**0.00**	N/A	N/A	558	2,255

- Teda jednotlivé opcie majú expiračné ceny: $E = 610$, $E = 615$, $E = 620$, $E = 625$, $E = 630$, $E = 635$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Čas zostávajúci do expirácie:

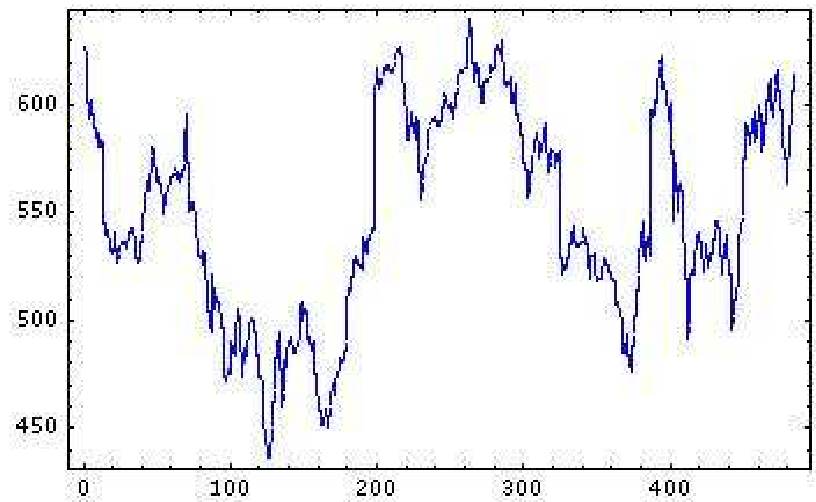


- Expirácia je po zatvorení burzy 16.3.2012, čo je o 12 pracovných dní
- Čas má byť v modeli zadaný v rokoch, uvažujme 252 pracových dní v roku → $T - t = 12/252$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Volatilita akcie: odhadneme historickú volatilitu z denných dát z rokov 2010 a 2011:

```
ListPlot[sGOOG, Frame → True, PlotRange → All,
  PlotStyle → {Thickness[0.005], RGBColor[0, 0, 1]},
  PlotJoined → True, Axes → None];
```




```
dt = 1 / 252;
vynosy = Table[Log[sGOOG[[i + 1]] / sGOOG[[i]]], {i, 1, n - 1}];
sigma = Sqrt[Variance[vynosy] / dt]
0.290095
```

- Teda: $\sigma = 0.29$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Úroková miera (bonds.yahoo.com):

US Treasury Bonds Rates

Maturity	Yield	Yesterday	Last Week	Last Month
3 Month	0.06	0.06	0.07	0.03
6 Month	0.11	0.12	0.11	0.07
2 Year	0.29	0.29	0.29	0.21
3 Year	0.41	0.40	0.41	0.30
5 Year	0.84	0.82	0.86	0.73
10 Year	1.97	1.94	2.00	1.84
30 Year	3.08	3.07	3.15	3.00

- Dosť štandardnou voľbou sú trojmesačné dlhopisy.
- Úroková miera má byť daná ako desatinné číslo, takže: $r = 0.06/100$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Môžeme teda dosadiť tieto hodnoty do Black-Scholesovho vzorca:

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
F[x_] := CDF[NormalDistribution[0, 1], x];

call[s_, e_, r_, sigma_, tau_] := Module[{d1, d2},
  d1 = (Log[s / e] + (r + 0.5 * sigma ^2) * tau) / (sigma * Sqrt[tau]);
  d2 = (Log[s / e] + (r - 0.5 * sigma ^2) * tau) / (sigma * Sqrt[tau]);
  Return[s * F[d1] - e * Exp[-r * tau] * F[d2]];
 ]

call[618.25, 610, 0.06 / 100, 0.29, 12 / 252]

19.9846
```

- Model dáva cenu opcie bola 19.98 USD
- Skutočná cena opcie bola 14.80 USD

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Podobne ostatné opcie:

Google Inc. (GOOG) - NasdaqGS

618.25 Feb 29, 4:00PM EST

Options

View By Expiration: **Mar 12** | Apr 12 | Jun 12 | Sep 1

Call Options

Strike	Symbol	Last
610.00	GOOG120317C00610000	14.80
615.00	GOOG120317C00615000	11.80
620.00	GOOG120317C00620000	9.00
625.00	GOOG120317C00625000	6.77

```
call[618.25, 615, 0.06/100, 0.29, 12/252]
17.253
call[618.25, 620, 0.06/100, 0.29, 12/252]
14.7769
call[618.25, 625, 0.06/100, 0.29, 12/252]
12.554
```

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Prečo také rozdiely?
- Cena akcie, expiračné ceny, čas expirácie sú jednoznačne dané.
- Môžeme skúsiť zobrať inú úrokovú mieru, napr. polročnú (0.11 %)

```
call[618.25, 610, 0.06 / 100, 0.29, 12 / 252]
19.9846
call[618.25, 610, 0.11 / 100, 0.29, 12 / 252]
19.993
```

  \- rozdiel je malý a navyše opačným smerom, ako by sme potrebovali

- Volatilita - tú sme len odhadli, odhad nemusí byť presný $\rightarrow$ koncept implikovanej volatility

VII.

Implikovaná volatilita

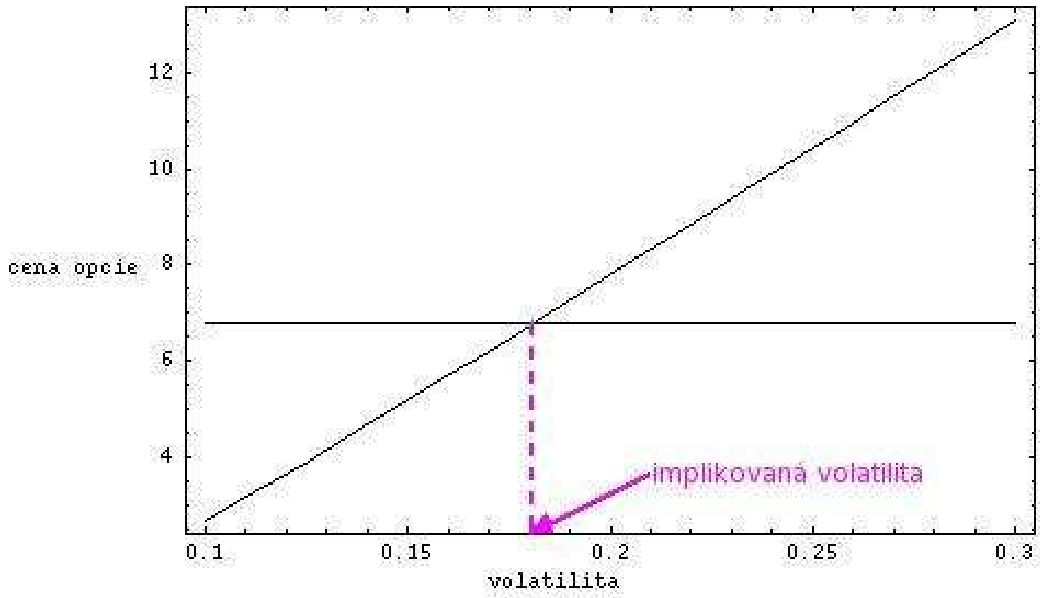
Implikovaná volatilita

- Otázka: Pre akú hodnotu volatility by sa Black-Scholesova cena rovnala reálnej trhovej cene?
  Táto hodnota volatility sa nazýva implikovaná volatilita
- Zoberme z predchádzajúcich dát opciu s $E = 625$, jej cena bola 6.77.
- Skúsme meniť volatilitu:

```
call[618.25, 625, 0.06 / 100, 0.29, 12 / 252]
12.554
call[618.25, 625, 0.06 / 100, 0.25, 12 / 252]
10.4268
call[618.25, 625, 0.06 / 100, 0.20, 12 / 252]
7.78765
call[618.25, 625, 0.06 / 100, 0.15, 12 / 252]
5.19115
```

Implikovaná volatilita

- Ako závisí Black-Scholesova cena tejto opcie od volatility:



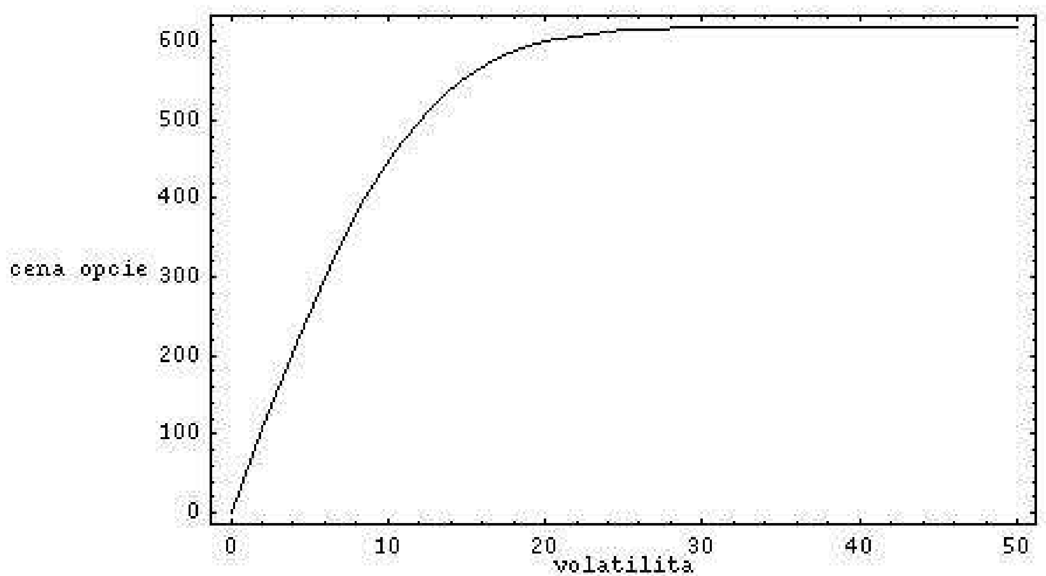
- Numericky nájdeme hodnotu implikovanej volatility:

```
bs[sigma_] := call[618.25, 625, 0.06 / 100, sigma, 12 / 252];
v = 6.77;
FindRoot[bs[sigma] == v, {sigma, 0.17}]

{sigma → 0.180538}
```

Existencia implikovanej volatility

- Pre väčší rozsah hodnôt volatility:



- Vo všeobecnosti ukážeme, že:
  - ◇ Cena call opcie je rastúcou funkciou volatility.
  - ◇ Existujú limity $V_0 := \lim_{\sigma\to 0^+} V(S,t;\sigma)$ a $V_\infty := \lim_{\sigma\to\infty} V(S,t;\sigma)$

Potom zo spojitosti V $\Rightarrow$ pre každú reálnu cenu opcie z intervalu (V_0, V_∞) existuje implikovaná volatilita

Existencia implikovanej volatility

- Rastúcosť:
  - ◇ Počítame deriváciu (platí $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \sigma} &= SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\ &= \left(SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\right)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \\ &\quad + Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t}\end{aligned}$$

  - ◇ Derivácia distribučnej funkcie je funkcia hustoty: $N'(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$
  - ◇ Užitočná lema: $SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2) = 0$
  - ◇ Takže:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t} > 0$$

Existencia implikovanej volatility

- Limity:
  - Využijeme limitné vlastnosti distribučnej funkcie:

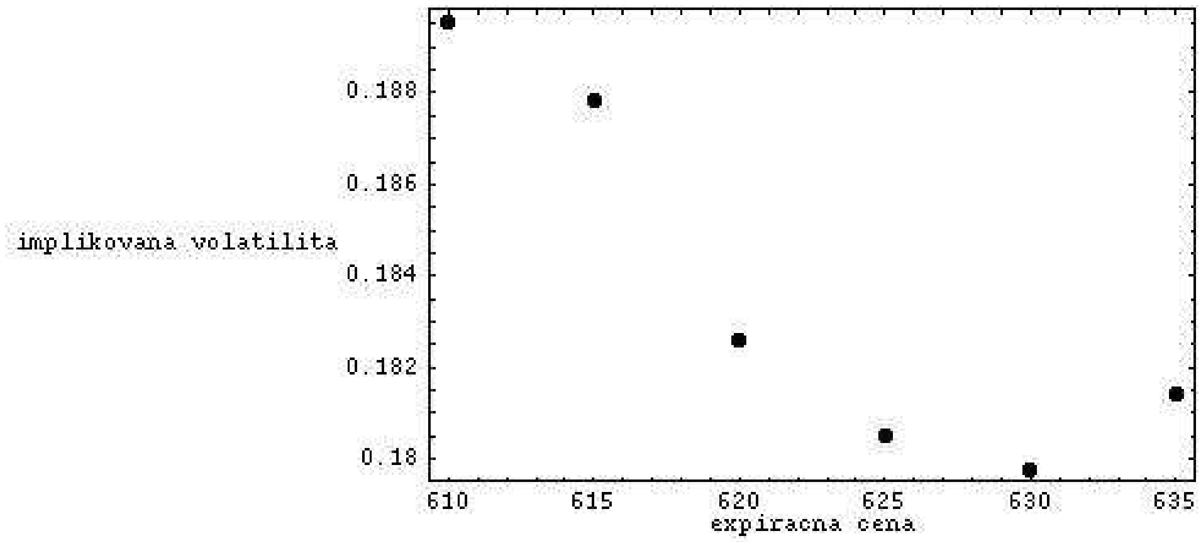
$$\lim_{x\to-\infty} N(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} N(x) = 1$$

  - Z toho:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma\to 0^+} V(S,t;\sigma) &= \max(0, S - Ee^{-r(T-t)}) \\ \lim_{\sigma\to\infty} V(S,t;\sigma) &= S \end{aligned}$$

Volatility smile

- Implikovaná volatilita pre opcie v príklade - v závislosti od expiračnej ceny opcií:



- Typický priebeh, kvôli svojmu tvaru sa nazýva volatility smile
- Motivácia pre zložitejšie modely (B&S model vychádza z konštantnej volatility, a vychádza takáto implikovaná volatilita)

VIII.

Greeks - analýza citlivosti

Greeks

- Greeks:
  - derivácie ceny opcie podľa jednotlivých parametrov
  - vyjadrujú teda citlivosť ceny opcie na tieto parametre
- Už sme vypočítali $\frac{\partial V_{call}}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t}$, označuje sa Υ (vega)
- Ostatné:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \ \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \ P = \frac{\partial V}{\partial r}, \ \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

  Pozn.: P je grécke písmeno ró
- Označenie: V^{ec} = cena európskeho callu, V^{ep} = cena európskeho putu; analogicky greeks pre call a put

Delta

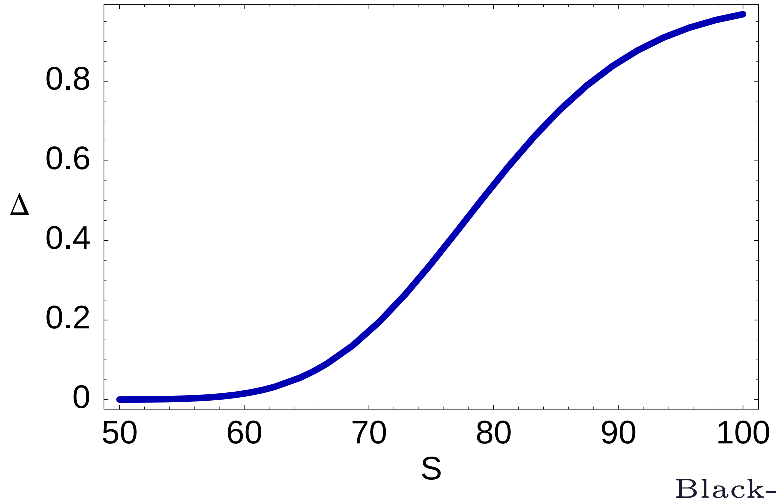
- Výsledok pre call opciu - z Black-Scholesovho vzorca, tá istá lema ako pri volatilite:

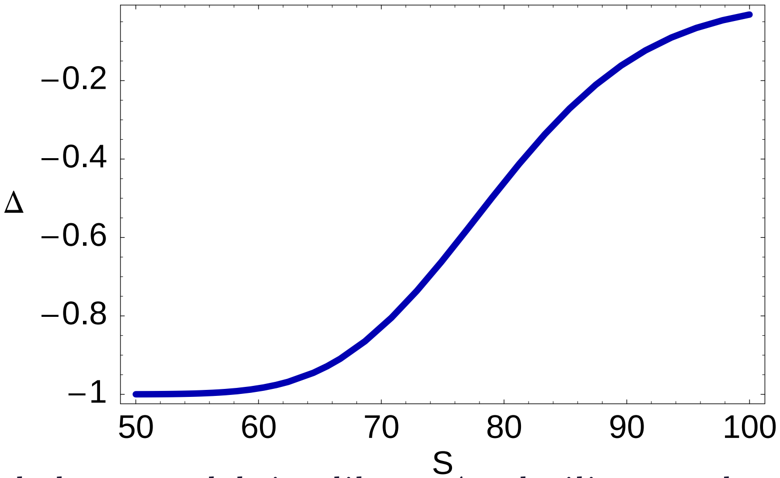
$$\Delta^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S} = N(d_1) \in (0,1)$$

- Pre put opciu - nemusíme derivovať, stačí použiť put-call paritu:

$$\Delta^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial S} = -N(-d_1) \in (-1,0)$$

- Ukážka - call vľavo, put vravo:





Delta - delta hedžing

- Pripomeňme si odvodenie Black-Scholesovho modelu a konštrukciu bezrizikového portfólia:

$$\frac{Q_S}{Q_V} = -\frac{\partial V}{\partial S} = -\Delta$$

  kde Q_V, Q_S je počet opcií a počet akcií v portfóliu
- Vytváraniu takéhoto portfólia sa hovorí delta hedžing (hedžing = zaist'ovanie proti riziku)
- DÚ: Kol'ko akcií musíme mat' v portfóliu pri delta hedžingu, ak
  - sme vypísali dve call opcie s expiračnou cenou 25 USD a expiráciou o pol roka,
  - sme vypísali dve put opcie s expiračnou cenou 20 USD a expiráciou o štrt' roka,
  - sme kúpili dve call opcie s expiračnou cenou 30 USD a expiráciou o rok,
  - sme kúpili dve put opcie s expiračnou cenou 20 USD a expiráciou o mesiac,

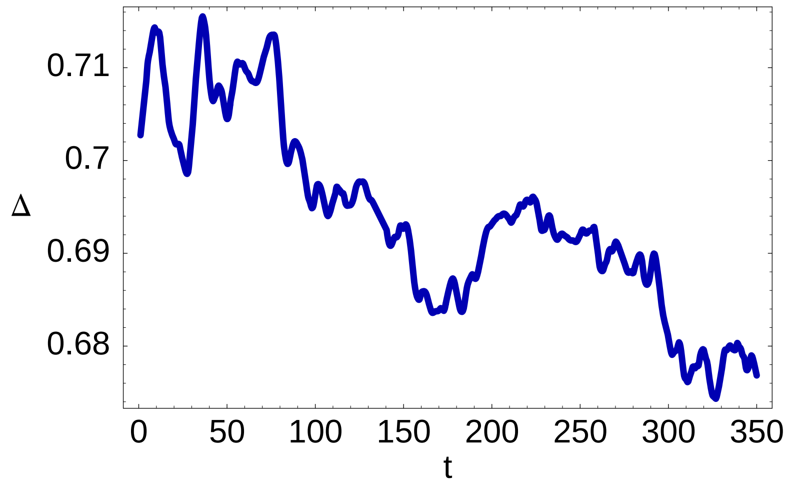
  ak dnešná cena akcie je 20 USD, volatilita je 0.3 a úroková miera je pol percenta?

Delta - ukážka delta hedžingu

- Príklad z reálnych dát - call opcia na akciu IBM, 21.5.2002, dáta v 5-minútových intervaloch
- V čase t:
  - máme k dispozícii cenu opcie $V_{real}(t)$ a cenu akcie $S_{real}(t)$
  - vypočítame implikovanú volatilitu, t. j. riešime rovnicu $V_{real}(t) = V^{ec}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}(t))$.
  - implikovanú volatilitu $\sigma_{impl}(t)$ dosadíme do delty call opcie: $\Delta^{ec}(t) = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}(t))$

Delta - ukážka delta hedžingu

- Ako sa počas dňa mení delta:



- Ak by sme vypísali jednu opciu, toto by bol počet akcií v našom portfóliu

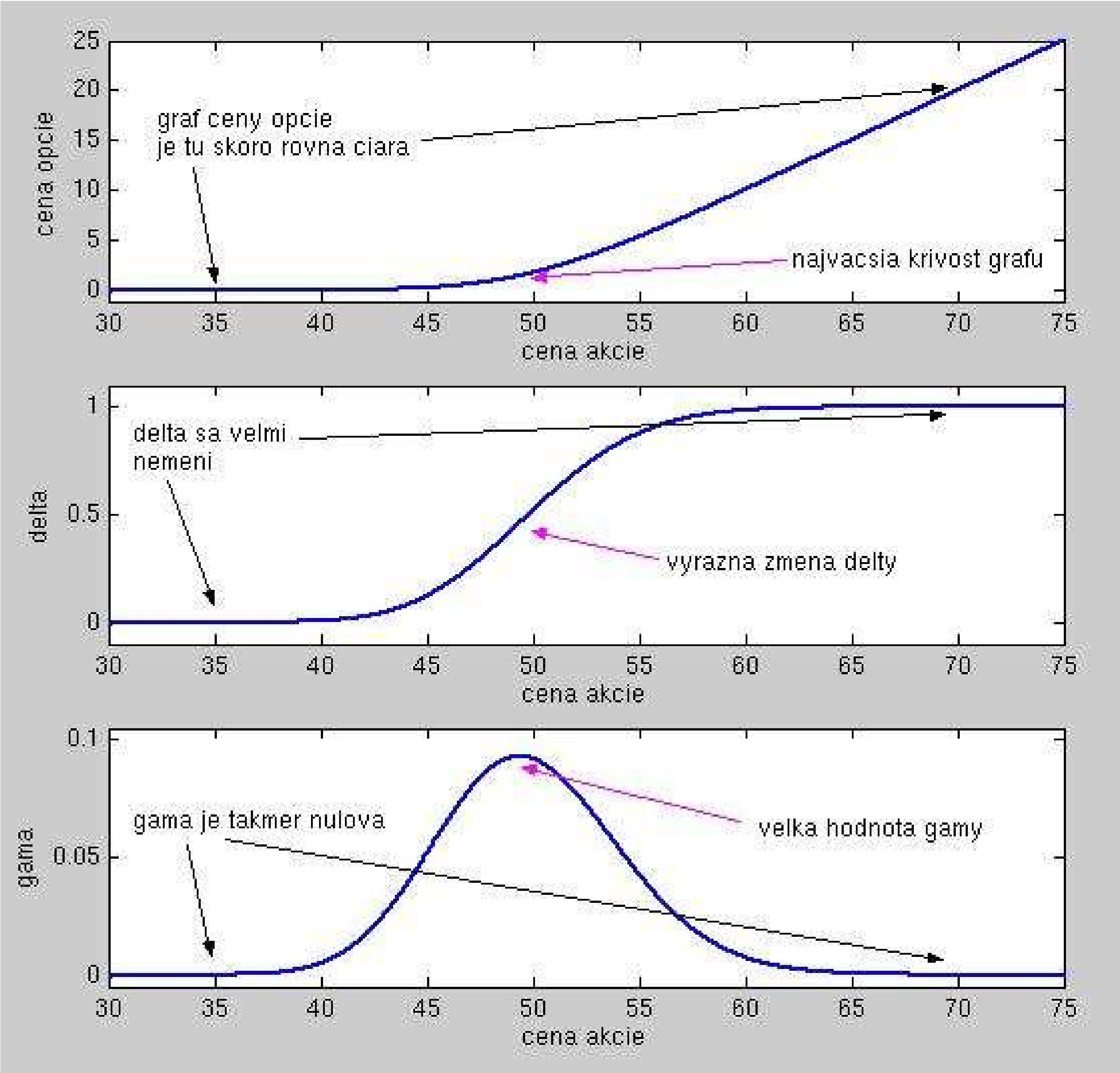
Gama

- Výpočet:

$$\begin{aligned}\Gamma^{ec} &= \frac{\partial \Delta^{ec}}{\partial S} = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\exp(-\frac{1}{2}d_1^2)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}S} > 0 \\ \Gamma^{ep} &= \Gamma^{ec}\end{aligned}$$

- Meria citlivosť delty na zmenu ceny akcie

Gama

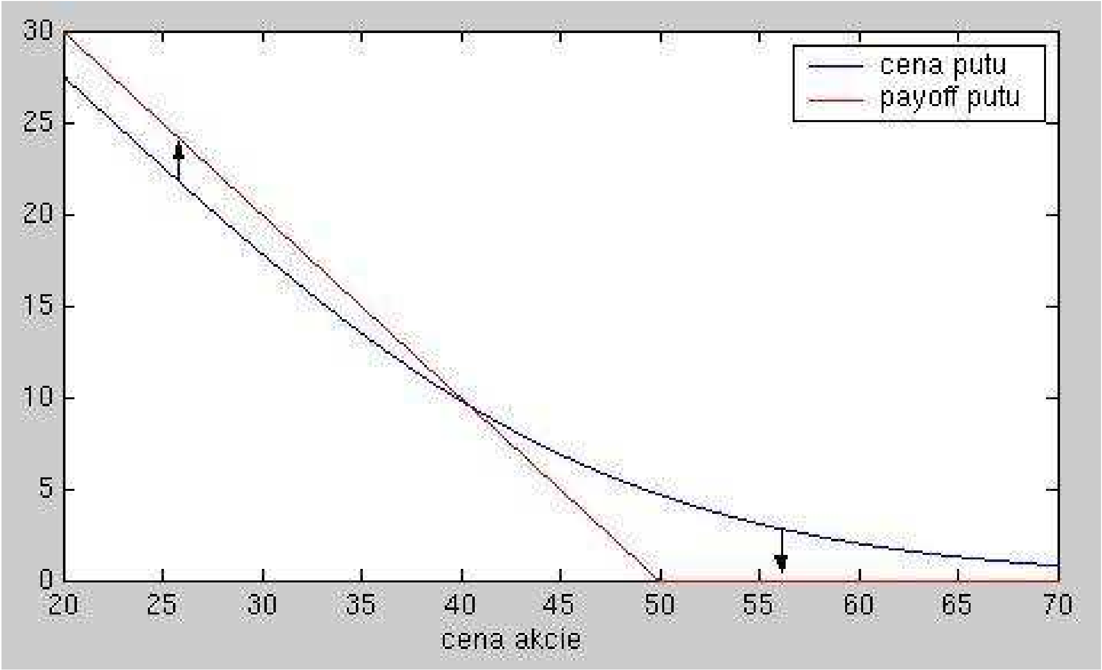

cena opcie
graf ceny opcie
je tu skoro rovna ciara
najvacsia krivost grafu
cena akcie
delta
delta sa velmi
nemeni
vyrazna zmena delty
cena akcie
gama
gama je takmer nulova
velka hodnota gamy
cena akcie

Vega, ró, theta

- Vega:
  - vypočítali sme už:
    $\Upsilon^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)} N'(d_2)\sqrt{T-t} > 0$
  - z put-call parity: $\Upsilon^{ep} = \Upsilon^{ec}$
  - väčšia volatilita $\Rightarrow$ väčšia pravdep. vysokých ziskov, pritom strata je ohraničená $\Rightarrow$ kladná vega
- Ró :
  - call: $P^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial r} = E(T-t)e^{-r(T-t)} N(d_2) > 0$
  - put: $P^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial r} = -E(T-t)e^{-r(T-t)} N(-d_2) < 0$
- Theta:
  - call: neskôr ukážeme, že ak akcia nevypláca dividendy, americkú call opciu sa neoplatí uplatniť skôr $\Rightarrow$ cena európskej a americkej opcie je rovnká $\Rightarrow \Theta^{ec} < 0$

Vega, ró, theta

- Theta:
  - put: nemá jednoznačne určené znamienko:



Ak je cena akcie nízka, hodnota putu leží pod payoffom. V čase expirácie bude cena opcie rovná payoffu $\Rightarrow$ niekedy do expirácie musí táto cena vzrásť.

Ak je cena akcie vysoká, hodnota putu leží nad payoffom. V čase expirácie bude cena opcie rovná payoffu $\Rightarrow$ niekedy do expirácie musí táto cena klesnúť.