Lelandov model: zahrnutie transakčných nákladov do oceňovania opcií

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, SvF STU, LS 2011/2012

I.

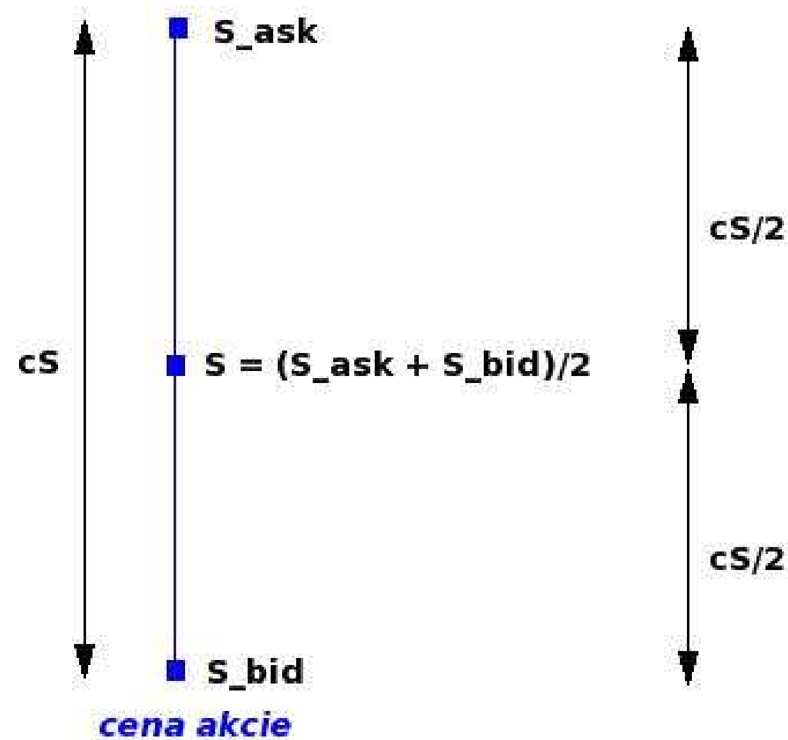
Odvodenie PDR pre cenu derivátu

Pôvodný článok:

Hayne E. Leland: **Option Pricing and Replication with Transactions Costs**, 1985

Predpoklady modelu

- Transakčné náklady sú charakterizované konštantou $c = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S}$, kde S je priemer bid a ask ceny akcie



- S sa riadi geometrickým Brownovym pohybom $dS = \mu S dt + \sigma S dw$

Výpočet konštanty c

PRÍKLAD 1:

- Informácie o akcii:

Google Inc. (GOOG) - NasdaqGS

609.61 ↑ 2.81 (0.46%) 9:36AM EST - Nasdaq Real Tim

Prev Close:	606.80	Day's Range:	608.29 - 611.50
Open:	N/A	52wk Range:	473.02 - 670.25
Bid:	610.15 x 100	Volume:	79,197
Ask:	610.50 x 300	Avg Vol (3m):	2,793,610
1y Target Est:	706.37	Market Cap:	197.29B
Beta:	1.13	P/E (ttm):	20.39
Next Earnings Date:	N/A	EPS (ttm):	29.76
		Div & Yield:	N/A (N/A)

- Z dát: $S_{bid} = 610.15, S_{ask} = 610.50$
- Priemer bid a ask ceny: $S = 610.325$
- $c = \frac{0.35}{610.325} = 5.7346 \times 10^{-4}$

Výpočet konštanty c

PRÍKLAD 2:

- Informácie o akcii:

International Business Machines (IBM) - NYSE

198.80 ↑ 1.03 (0.52%) 9:38AM EST - Nasdaq Real Time

Prev Close:	197.77
Open:	N/A
Bid:	198.82 x 200
Ask:	198.90 x 100
1y Target Est:	200.76
Beta:	0.6
Next Earnings Date:	N/A

Day's Range:	198.77 - 199.39
52wk Range:	151.71 - 201.19
Volume:	86,842
Avg Vol (3m):	4,759,040
Market Cap:	229.15B
P/E (ttm):	15.14
EPS (ttm):	13.06
Div & Yield:	3.00 (1.50%)

- Z dát: $S_{bid} = 198.82, S_{ask} = 198.90$
- Priemer bid a ask ceny: $S = 198.86$
- $c = \frac{0.08}{198.86} = 4.0229 \times 10^{-4}$

Odvodenie PDR

- Portfólio:
  - jedna opcia a δ akcií, pričom počet akcií určujeme pomocou delta hedžingu, teda $\delta = -\partial V/\partial S$
  - hodnota portfólia: $P = V + \delta S$
  - kvôli transakčným nákladom sa zloženie portfólia nedá meniť spojito $\rightarrow$ meníme ho v intervaloch dĺžky Δt
- Zmena hodnoty portfólia:
  - počet transakcií s akciami je $\Delta\delta$
  - náklady na jednu transakciu sú $cS/2 \Rightarrow$ celkové náklady sú $\frac{cS}{2}|\Delta\delta|$
  - zmena hodnoty portfólia preto je:

$$\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - \frac{cS}{2}|\Delta\delta|$$

Odvodenie PDR

- Máme teda $\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - \frac{cS}{2}|\Delta \delta|$, pričom
  - $\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta w$ z predpokladu o geometrickom Brownovom pohybe
  - $\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \Delta w$ podľa Itóovej lemy
  - zostáva ešte určiť $\Delta \delta$
- Platí $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$, preto $\frac{\partial \delta}{\partial S} = -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$, z čoho dostaneme:

$$\Delta \delta \approx \frac{\partial \delta}{\partial S} \Delta S = -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta S$$

- Sem dosadíme ΔS z geometrického Brownovho pohybu

Odvodenie PDR

- Zatiaľ máme:

$$\Delta\delta \approx -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\mu S\Delta t - \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma S\Delta w \qquad (1)$$

- Leland ukázal:
  - vo vzťahu (1) stačí zobrať členy najnižšieho ráu (t.j. zoberieme len $\Delta w \approx (\Delta t)^{1/2}$, a Δt zanedbáme)
  - pri výpočte absolútnej hodnoty sa $|\Delta w|$ dá nahradiť strednou hodnotou $\mathbb{E}[|\Delta w|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}\Delta t}$

- Teda:

$$\begin{aligned} \Delta\delta &\approx -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma S\Delta w \\ |\Delta\delta| &\approx \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\sigma S|\Delta w| \approx \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\sigma S\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

Odvodenie PDR

- Dosadíme všetko do zmeny hodnoty portfólia $\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - \frac{cS}{2}|\Delta\delta|$:

$$\Delta P = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{c}{2} S \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sigma S \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \right) \Delta t \quad (2)$$

- Portfólio je bezrizikové $\Rightarrow$ musí platiť $\Delta P = rP\Delta t$
- Portfólio obsahuje jednu opciu a $\delta = -\partial V / \partial S$ akcií $\Rightarrow$ $P = V + \delta S = V - \frac{\partial V}{\partial S}$, a teda

$$\Delta P = r(V - \frac{\partial V}{\partial S} S)\Delta t \quad (3)$$

- Porovnáme (2) a (3):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{c}{2} S \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sigma S \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} = r(V - \frac{\partial V}{\partial S} S)$$

Odvodenie PDR

- Získanú PDR ešte upravíme do výsledného tvaru:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left[1-\frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}sign\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\right]+\frac{\partial V}{\partial S}S-rV=0$$

- Rovnica platí pre $S > 0, t \in [0, T]$, pridáva sa k nej koncová podmienka $V(S < T)$ v závislosti od typu derivátu, napr. $V(S, T) = \max(0, S - E)$ pre $S > 0$ v prípade call opcie
- Nelineárna parciálna diferenciálna rovnica kvôi členu obsahujúcemu funkciu signum
- Pre call a put opciu ju však budeme vedieť explicitne vyriešiť

Poznámka ku kombinovaným stratégiám

- Cena kombinovaných stratégií sa už (na rozdiel od Black-Scholesa) nedá vypočítat' tak, že oceníme každú opciu zvlášt' a výsledok zložíme

MATEMATICKY:

- PDR v Lelandovom modeli nie je lineárna $\Rightarrow$ napr. súčet, rozdiel alebo nejaká iná kombinácia riešení už nie je riešením.

Poznámka ku kombinovaným stratégiám

FINANČNE:

- Ak oceníme každú opciu samostatne, zarátavame tak transakčné náklady vznikajúce z udržiavania každého portfólia zvlášť.
- Ak nemáme transakčné náklady, nevadí, že máme akoby dve portfóliá. Môže sa stať, že v jednom akcie kupujeme a v druhom predávame. Žiadne náklady z toho však nevznikajú.
- V prípade transakčných nákladov to už nie je pravda. Vtedy treba portfólio uvažovať ako celok, a v prípade uvedenej situácie nerobiť zbytočné transakcie.

II.

Riešenie pre call a put opciu

Riešenie pre call a put opciu

- Pripomeňme si, že pre Black-Scholesovu cenu call a put opcie platí

$$\frac{\partial^2 V_{call}}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 V_{put}}{\partial S^2} = \frac{\exp(-\frac{1}{2}d_1^2)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}S} > 0$$

a teda

$$sign\left(\frac{\partial^2 V_{call}}{\partial S^2}\right) = sign\left(\frac{\partial^2 V_{put}}{\partial S^2}\right) = 1$$

Riešenie pre call a put opciu

- Definujme Lelandovo číslo

$$Le = \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

- PDR potom je:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left[1 - Le\ sign\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0$$

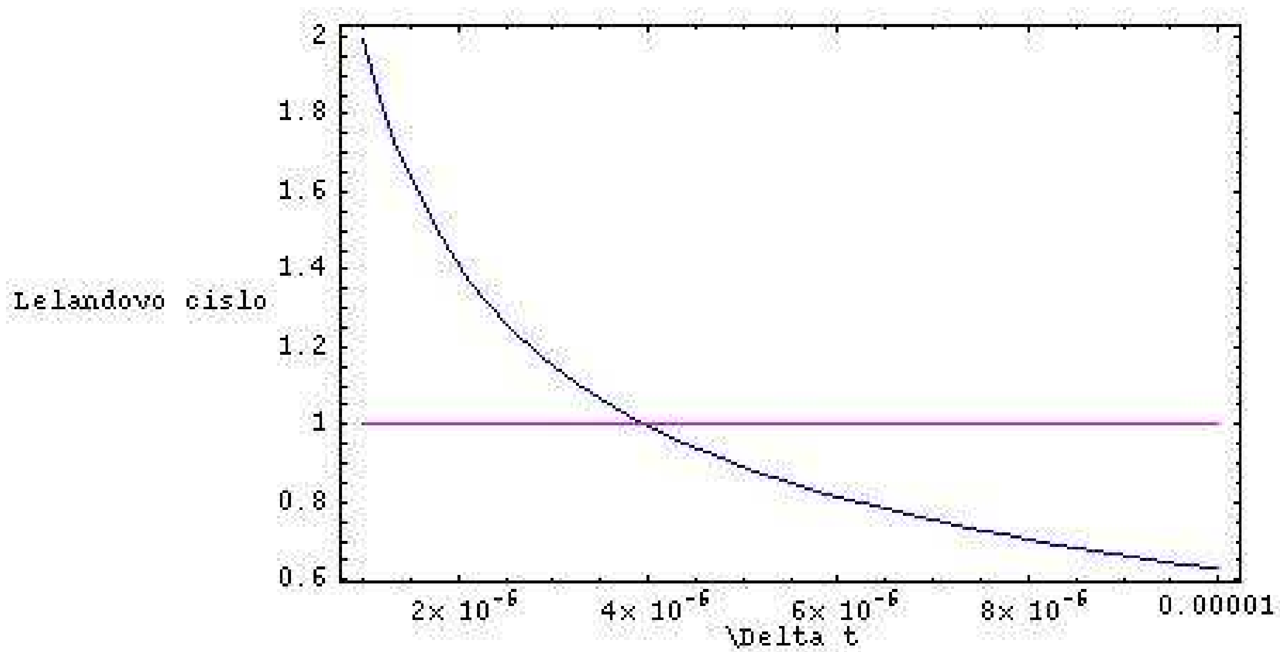
- Riešenie pre call a put: Black-Scholesova cena s upravenou volatilitou - namiesto σ^2 dosadzujeme do Black-Scholesovho vzorca

$$\sigma_{TC}^2 = (1 - Le)\sigma^2$$

- Dôkaz: dosadíme do PDR a využijeme, že druhá derivácia podľa S je kladná

Čas medzi dvoma zmenami portfólia

- Musí byť $\sigma^2_{TC} > 0 \Rightarrow$ dostávame podmienku, ktorú musí spĺňať čas medzi dvoma zmenami portfólia Δt
- PRÍKLAD:
  Závislosť Lelandovho čísla od Δt, ak $c = 5 \times 10^{-4}$, $\sigma = 0.2$



Čas medzi dvoma zmenami portfólia

- Prípustné časy medzi dvoma zmenami portfólia - musia byť väčšie ako:

```
NSolve[Le[dt] == 1, dt]
{{dt → 3.97887 × 10^-6}}
```

- Toto je čas v rokoch, vyjadrime ho v minútach:

```
%[[1, 1, 2]] * 252 * 7 * 60
0.421124
```

  Uvažujeme 252 pracovných dní v roku a burzu otvorenú 7 hodín denne.

Výpočet cien opcií

- Zoberme $\Delta t = 5\,min. = 5/(252 \times 7 \times 60) rokov$
- Nech cena akcie je $S = 100$, úroková miera $r = 0.01$
- Cena call opcie s expiračnou cenou $E = 110$ a expiráciou o mesiac (t. j. $\tau = 1/12$) je potom 1.61:

```
deltaT = 5 / (252 * 7 * 60);
Le[deltaT]

0.290215

sigmaTC = Sqrt[(1 - %) * sigma ^2]

0.168497

call[100, 110, 0.01, sigmaTC, 1 / 2]

1.6109
```

- Pre porovnanie - tá istá opcia bez transakčných nákladov:

```
call[100, 110, 0.01, sigma, 1 / 2]

2.33942
```

III.

Modelovanie bid a ask cien opcií

Bid a ask ceny opcií

- Reálne dáta - aj pri opciách sa odlišuje bid a ask cena:

International Business Machines (IBM) - NYSE

199.00 ↑ **1.23 (0.62%)** 9:56AM EST - Nasdaq Real Time Price

Options **Get Options**

View By Expiration: Mar 12 | **Apr 12** | Jul 12 | Oct 12 | Jan 13 | Jan 14

Call Options Expire at close Friday, April 20, 2012

Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
85.00	IBM120421C00085000	**15.80**	**0.00**	112.25	116.20	1	1
95.00	IBM120421C00095000	**103.14**	**0.00**	102.25	106.25	1	1
105.00	IBM120421C00105000	**87.09**	**0.00**	93.80	94.80	1	3
120.00	IBM120421C00120000	**8.75**	**0.00**	77.35	79.65	1	11
125.00	IBM120421C00125000	**74.64**	**0.00**	74.15	74.50	2	19
140.00	IBM120421C00140000	**57.25**	**0.00**	57.85	59.65	31	64

Bid a ask ceny opcií v Lelandovom modeli

- Pri odvodení Lelandovej PDR sme mali portfólio: jedna opcia, δ akcií $\Rightarrow$ získaná cena je ponuka na kúpu opcie (teda *bid*)
- Zoberme portfólio mínus jedna opcia, δ akcií $\Rightarrow$ získaná cena je ponuka na predaj opcie (teda *ask*)
- Rovnakým postupom dostaneme, že ask cena spĺňa:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left[1+\frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}sign\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\right]+\frac{\partial V}{\partial S}S-rV=0$$

- Call a put opcia: Black-Scholesova cena s upravenou volatilitou $\sigma^2_{TC}=(1+Le)\sigma^2$

Implikované parametre

- Ak teda máme bid a ask ceny akcie a opcie, vieme vypočítať implikovanú volatilitu a implikovaný čas medzi dvoma zmenami portfólia (t.j. také hodnoty, pri ktorých sa teoretická bid a ask cena opcie bude rovnať skutočnej)

VSTUPY:

- Akcia - bid a ask cena S_{bid}, S_{ask}
- Opcia - bid a ask cena V_{bid}, V_{ask}, expiračná cena E, čas zostávajúci do expirácie τ
- Ostatné parametre trhu: úroková miera r

Implikované parametre

POSTUP:

- Z bid a ask ceny akcie vypočítame $S = (S_{ask} + S_{bid})/2$ a $c = (S_{ask} - S_{bid})/S$
- Pomocou S, E, r, τ a
  - V_{bid} vypočítame Black-Scholesovu implikovanú volatilitu, to je $\sqrt{(1 - Le)\sigma^2} := \sigma_{bid}$
  - V_{ask} vypočítame Black-Scholesovu implikovanú volatilitu, to je $\sqrt{(1 + Le)\sigma^2} := \sigma_{ask}$
- Riešením sústavy rovníc $(1 - Le)\sigma^2 = \sigma_{bid}^2$, $(1 + Le)\sigma^2 = \sigma_{ask}^2$ vypočítame implikovanú volatilitu σ a Lelandovo číslo Le
- Z definície Lelandovho čísla nakoniec vyjadríme implikovaný čas medzi dvoma zmenami portfólia Δt

Implikované parametre

PRÍKLAD:

- Akcie Google, zo začiatku obchodovania dňa 8.3.2012
- Akcia:

Google Inc. (GOOG) - NasdaqGS

609.61 ↑2.81 (0.46%) 9:36AM EST - Nasdaq Real Tim

Prev Close:	606.80	Day's Range:	608.29 - 611.50
Open:	N/A	52wk Range:	473.02 - 670.25
Bid:	610.15 x 100	Volume:	79,197
Ask:	610.50 x 300	Avg Vol (3m):	2,793,610

- Opcie - zoberme opciu s expiračnou cenou 630:

Call Options Expire at close Friday, April 20, 2012

Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
610.00	GOOG120421C00610000	24.61	↑1.18	24.00	24.50	5	717
615.00	GOOG120421C00615000	22.09	↑1.29	21.50	22.00	4	1,214
620.00	GOOG120421C00620000	18.68	0.00	19.10	19.60	173	788
625.00	GOOG120421C00625000	16.50	0.00	17.00	17.50	162	533
630.00	GOOG120421C00630000	14.48	0.00	15.00	15.50	547	1,389

Implikované parametre

- Máme teda vstupné dáta:
  - ◇ akcia: $S_{bid} = 610.15, S_{ask} = 610.50$
  - ◇ opcia: $V_{bid} = 15.00, V_{ask} = 15.50, E = 630$, do expirácie je 31 dní, teda $\tau = 31/252$

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat	Sun
27	28	29	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	1
2	3	4	5	$\boxed{6}$	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22

2012 - Stock Market Holidays **All Major US Stock Exchanges**	**Date**
New Year's Day	January 2, 2012 (o
Martin Luther King, Jr. Day	January 16, 2
Washington's Birthday (Presidents' Day)	February 20, 2
Good Friday	April 6, 201

  - ◇ úroková miera (3-mesačné dlhopisy) je 0.06 percenta, teda $r = 0.06/100$

Implikované parametre

- S, c sme už počítali:

$$S = 610.325, \; c = \frac{0.35}{610.325} = 5.7346 \times 10^{-4}$$

- Implikované volatility:

```
pom = FindRoot[call[S, e, r, sig, tau] == Vbid, {sig, 0.3}];
sigmaBid = pom[[1, 2]]

pom = FindRoot[call[S, e, r, sig, tau] == Vask, {sig, 0.3}];
sigmaAsk = pom[[1, 2]]

0.271212

0.277302
```

Dostávame: $\sigma^2_{bid} = 0.271212, \sigma^2_{ask} = 0.277302$

Implikované parametre

- Riešime sústavu rovníc:

```
FindRoot[{(1 - LE) * s2 == sigmaBid ^ 2,
  (1 + LE) * s2 == sigmaAsk ^ 2}, {LE, 0.5}, {s2, 0.05}]
{LE → 0.0222051, s2 → 0.0752262}
```

  z toho vypočítame $\sigma = 0.274274$

- Nakoniec vyjadríme $\Delta t = 0.0056444\ rokov = \ 9.96\ hod.$

ZÁVER:

- implikovaná volatilita je 0.27
- implikovaný čas medzi zmenami portfólia je 9.96 hod.