# *Numerické metódy: oceňovanie európskych opcií*

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, SvF STU, LS 2011/2012

# *Transformácia na RVT*

- Vieme, že transformácia $V(S,t) = e^{-\alpha x - \beta\tau} u(x,\tau)$, kde $\alpha = \frac{r-q}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{r+q}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{(r-q)^2}{2\sigma^2}$, $\tau = T - t$, $x = \ln(S/E)$, vedie od Black-Scholesovej rovnice k rovnici vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

  pre $x \in \mathbb{R}, \tau \in [0, T]$
- Začiatočná podmienka: $u(x, 0) = g(x)$
  - pre call opciu: $g(x) = Ee^{\alpha x + \beta\tau} \max(e^x - 1, 0)$
  - pre put opciu: $g(x) = Ee^{\alpha x + \beta\tau} \max(1 - e^x, 0)$

# *Okrajové podmienky*

- Pri numerickom riešení potrebujeme aj okrajové podmienky - na základe toho, akú hodnotu má call a put opcia pre vel'mi malé a vel'mi vel'ké ceny akcie
- Call opcia:
  - $V(0,t) = 0$
  - pre $S \to \infty$ platí: $V(S,t) \sim Se^{-q(T-t)}$, presnejšia podmienka: $V(S,t) \sim Se^{-q(T-t)} - Ee{-}r(T-t)$
- Put opcia:
  - $V(0,t) = Ee^{-r(T-t)}$
  - $V(S,t) \to 0$ pre $S \to \infty$

# *Aproximácia riešenia*

- Numerické riešenie na ohraničenom priestorovom intervale $x \in [-L, L]$
- Delenie v čase a priestore:

$$x_i = ih, \;\; i = -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...n,$$

$$\tau_j = jk, \; j = 0, 1, ..., m.$$

pričom $h = L/n, k = T/m$

- Aproximáciu riešenia $u$ v bode $(x_i, \tau_j)$ označíme

$$u_i^j \approx u(x_i, \tau_j), \qquad g_i^j \approx g(x_i, \tau_j)$$

# *Aproximácia riešenia*

- Okrajové podmienky:
  - pre call opciu:

$$\begin{aligned}\phi^j &:= u^j_{-N} = 0\\ \psi^j &:= u^j_N = Ee^{(\alpha+1)Nh+(\beta-q)jk}\end{aligned}$$

  - pre put opciu:

$$\begin{aligned}\phi^j &:= u^j_{-N} = Ee^{-\alpha Nh+(\beta-r)jk}\\ \psi^j &:= u^j_N = 0\end{aligned}$$

# *Aproximácia derivácií v PDR*

- Dve aproximácie časovej derivácie - vedú k dvom numerickým schémam:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i,\tau_j) \approx \frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i,\tau_j) \approx \frac{u_i^{j}-u_i^{j-1}}{k}$$

- Aproximácia priestorovej derivácie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,\tau_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

# *Implicitná a explicitná schéma*

- Explicitná:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

- Implicitná:

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

# *Explicitná schéma*

- Daá sa zapísať: $u_i^{j+1} = \gamma u_{i-1}^j + (1-2\gamma)u_i^j + \gamma u_{i+1}^j$, kde $\gamma = \frac{\sigma^2 k}{2h^2}$
- V maticovom tvare: $u^{j+1} = \mathbf{A}u^j + b^j$ pre $j = 0, 1, \ldots, m-1$ kde $\mathbf{A}$ je trojdiagonálna matica:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-2\gamma & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma & 1-2\gamma & \gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & \gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma & 1-2\gamma \end{pmatrix},$$

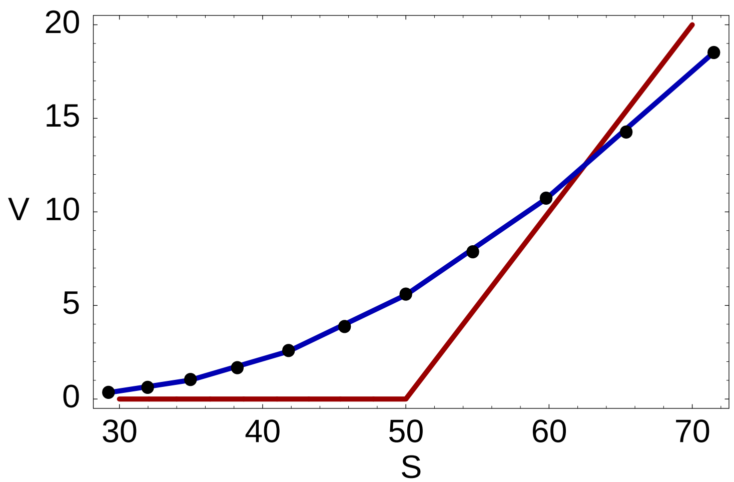
$$b^j = (\gamma\phi^j, 0, \ldots, 0, \gamma\psi^j)^T$$

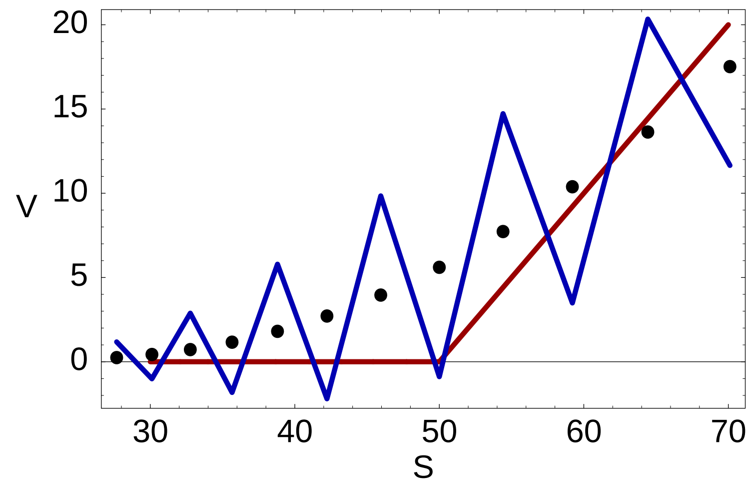
# *Explicitná schéma*

- Podmienka stability - Courant–Fridrichs–Lewy (CFL):

$$0 < \gamma \leq \frac{1}{2}, \qquad \text{t. j.} \qquad \frac{\sigma^2 k}{h^2} \leq 1$$

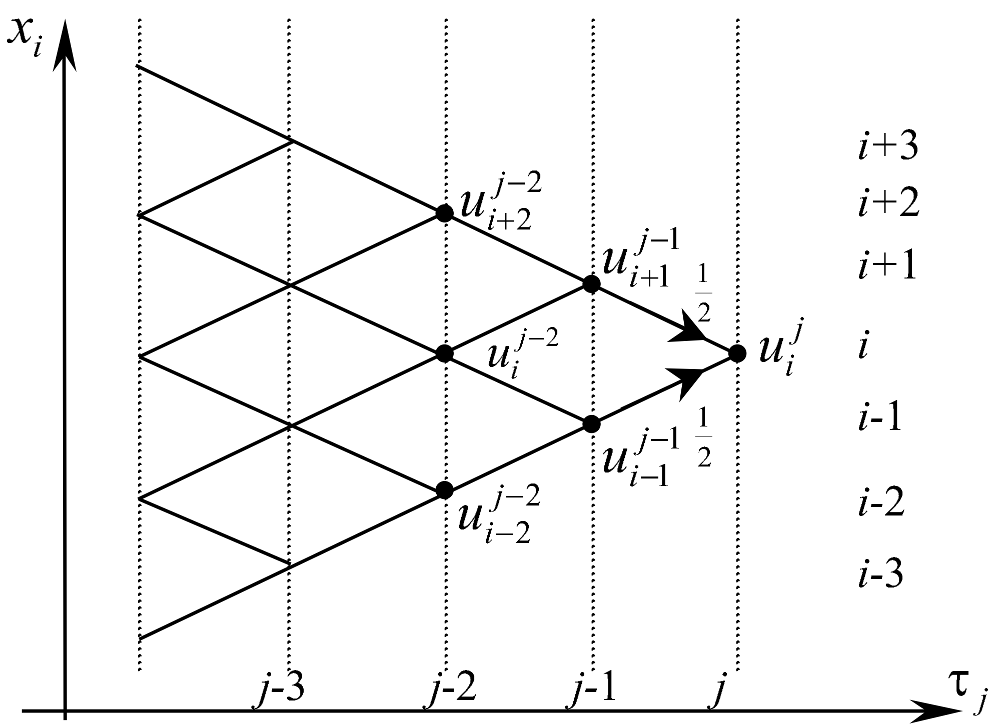
- Vľavo - podmienka je splnená, vpravo - nie je splnená



# *Explicitná schéma a binomický strom*

- Ak zvolíme časový a priestorový krok tak, ž e $h = \sigma\sqrt{k}$, tak $\gamma = 1/2$ a $u_i^{j+1} = \frac{1}{2}u_{i-1}^j + \frac{1}{2}u_{i+1}^j$.
- $u_i^{j+1}$ v čase $\tau_{j+1}$ je priemerom hodnôt $u_{i-1}^j$, $u_{i+1}^j$
- Binomický strom:



# *Implicitná schéma*

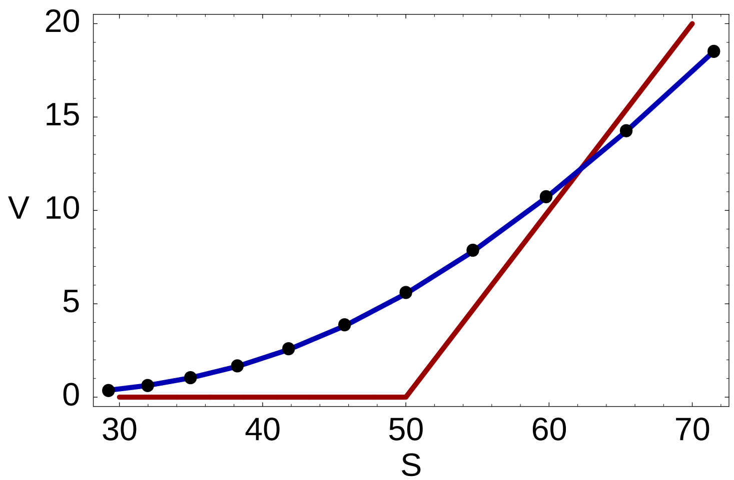
- Dá sa zapísať v tvare:
  $-\gamma u_{i-1}^{j} + (1+2\gamma)u_i^j - \gamma u_{i+1}^j = u_i^{j-1}$, kde $\gamma = \frac{\sigma^2 k}{2h^2}$,
- Maticovo: $\mathbf{A}u^j = u^{j-1} + b^{j-1}$ pre $j = 1, 2, \ldots, m$ kde

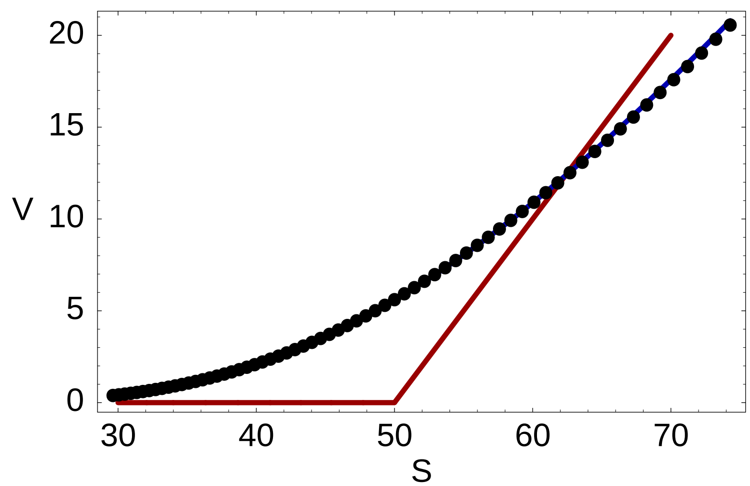
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & -\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix},$$

$$b^j = (\gamma\phi^j, 0, \ldots, 0, \gamma\psi^j)^T$$

# *Implicitná schéma*

- Nevyžaduje splnenie CLF podmienky
- Vl'avo - podmienka je splnená, vpravo - nie je splnená



# *Riešenie sústavy z implicitnej schémy*

- Sústava tvaru $\mathbf{A}x = b$ s maticou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & -\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix}$$

- Zopakujeme si postup pomocou Gauss-Seidelovej metódy a jej zovšeobecnenia - SOR metódy (jej modifikácia sa bude používať pri oceňovaní amerických opcií)
- *Vybrané časti z materiálu k bakalárskej štatnici + čo to znamená pre náš konkrétny problém*

# *Implicitná schéma*

- SOR metóda - použitie pri výpočte jednej časovej vrstvy pre rôzne hodnoty parametra $\omega$
- Norma iteračnej matice a počet potrebných iterácií: