# *Stochastické procesy*

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, SvF STU, LS 2011/2012

*I.*

# *Wienerov proces, Brownov pohyb*

# *Stochastické procesy*

- Stochastický proces - $t$-parametrický systém of náhodných premenných $\{X(t), t \in I\}$, kde $I$ je interval alebo diskrétna množina
- Markovov proces - pre danú hodnotu $X(s)$, nasledujúce hodnoty $X(t)$ pre $t > s$ závisia od $X(s)$, ale nie od starších hodnôt $X(u)$, $u < s$

# Wienerov proces

- Wienerov proces $\{w(t), t \geq 0\}$ je náhodný proces, ktorý spĺňa:
  i) $w(0) = 0$
  ii) prírastky $w(t + \Delta) - w(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $0$ a disperziou $\Delta$
  iii) pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_n$ sú prírastky $w(t_1) - w(t_0)$, $w(t_2) - w(t_1)$, $\ldots$, $w(t_n) - w(t_{n-1})$ nezávislé
  iv) trajektórie sú spojité
- Prečo je v bode i) disperzia práve $\Delta$ , a nie napríklad $\Delta^2, \sqrt{\Delta}, \ldots$ $\rightarrow$ také voľby disperzie by viedli k sporu

# *Wienerov proces - disperzia*

- Nech $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ je delenie intervalu $[0, t]$. Potom:

$$w(t) - w(0) = \sum_{i=1}^{n} w(t_i) - w(t_{i-1}). \tag{1}$$

- Z nezávislosti prírastkov (súčet disperzií nezávislých náhodných premenných je súčet ich disperzií):

$$\mathbb{D}\left[\sum_{i=1}^{n} w(t_i) - w(t_{i-1})\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}[w(t_i) - w(t_{i-1})]$$

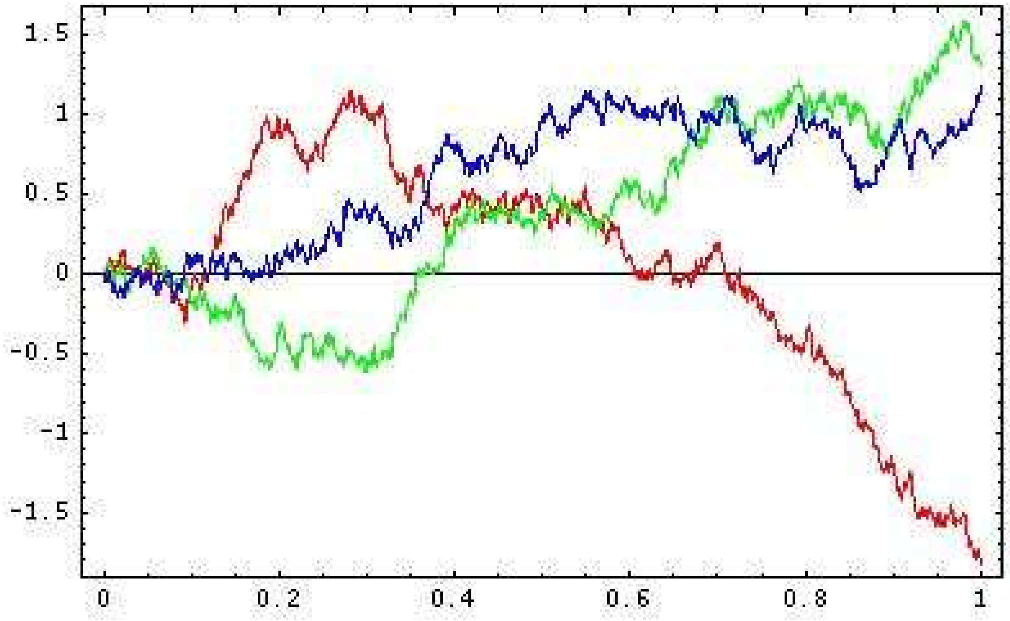
- Disperzia l'avej a pravej strany (1) sa musí rovnat':

$$\mathbb{D}\left[w(t) - w(0)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}[w(t_i) - w(t_{i-1})]$$

- to platí, ak $\mathbb{D}[w(t + \Delta) - w(t)]$ je násobkom $\Delta$, znormujeme na $\Delta$

# *Wienerov proces - ukážka*

- Ukážka trajektórií Wienerovho procesu:

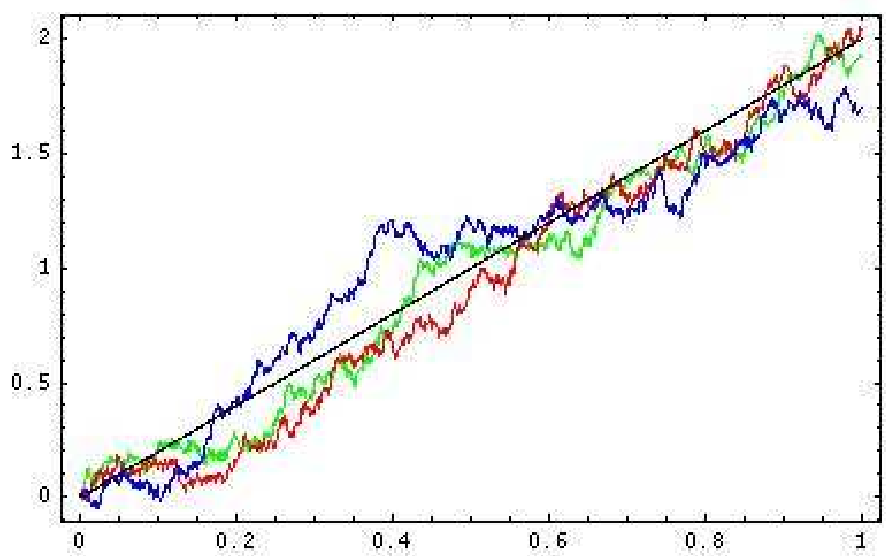



- Pre rozdelenie Wienerovho procesu v čase $t$ platí:

$$w(t) = w(t) - w(0) \sim N(0, t)$$

# *Brownov pohyb*

- Brownov pohyb:
$$x(t) = \mu t + \sigma w(t),$$
kde $w(t)$ je Wienerov proces
- Pravdepodobnostné rozdelenie:
$$x(t) = \mu t + \sigma w(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$$
- Ukážka trajektórií spolu so strednou hodnotou:



*II.*

*Geometrický Brownov pohyb, ceny akcií*

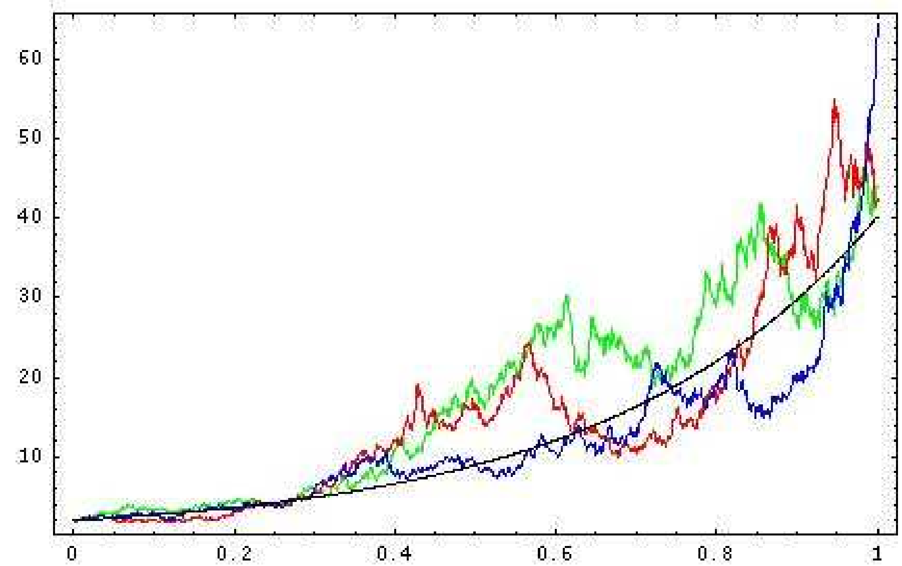
# Geometrický Brownov pohyb

- Geometrický Brownov pohyb:

$$x(t) = x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t)),$$

  kde $w(t)$ je Wienerov proces

- Ukážka trajektórií spolu so strednou hodnotou:




- Odvodíme teraz strednú hodnotu a disperziu geometrického Brownovho pohybu.

# GBP - stredná hodnota, disperzia

- Pripomeňme si z pravdepodobnosti:
  *Ak $X$ je náhodná premenná s hustotou $f$, tak stedná hodnota náhodnej premennej $g(X)$ je $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$.*
- Takže napríklad: $\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f(x)dx$.
- V našom prípade:

$$\mathbb{E}\left[x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))\right] = x_0 \mathbb{E}\left[\exp(\mu t + \sigma w(t))\right],$$

pričom

$$\mu t + \sigma w(t) \sim N(\mu t, \sigma t),$$

takže $\mu t + \sigma w(t)$ má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}$$

# GBP - stredná hodnota, disperzia

- Takže:

$$\mathbb{E}\left[e^{\mu t+\sigma w(t)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\left[\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}-x\right]} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{[x-(\mu t+\sigma^2 t)]^2-2\mu\sigma^2 t^2-\sigma^4 t^2}{2\sigma^2 t}} dx \\
&= e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{[x-(\mu t+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2 t}} dx \\
&= e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t}{2}}
\end{aligned}$$

# *GBP - stredná hodnota, disperzia*

- Disperzia:

$$\mathbb{D}\left[x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))\right] = x_0^2\, \mathbb{D}\left[\exp(\mu t + \sigma w(t))\right]$$

- Využijeme, že disperziu náhodnej premennej $X$ vieme vyjadriť ako $\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ - potrebujeme teda $\mathbb{E}\left[\left(e^{\mu t + \sigma w(t)}\right)^2\right]$
- Podobne ako pri výpočte strednej hodnoty:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(e^{\mu t+\sigma w(t)}\right)^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^x)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}\, dx \\ &= e^{2\mu t + 2\sigma^2 t} \end{aligned}$$

# *GBP - stredná hodnota, disperzia*

- Zhrnutie:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))\right] &= x_0\, e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \\
\mathbb{D}\left[x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))\right] &= x_0^2\, e^{2\mu t + \sigma^2 t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)
\end{aligned}
$$

- Iné odvodenie týchto vzt'ahov:
  - vypočítame hustotu rozdelenia geometrického Brownovho pohybu (lognormálne rozdelenie - uvedené v príkladoch na precvičenie z prvého cvičenia) a z nej zrátame strednú hodnotu a disperziu $\longrightarrow$ učebnica [Ševčovič, Stehlíková, Mikula], str. 25-26
  - použitím Itóovej lemy $\longrightarrow$ neskôr na tejto prednáške

# *Model pre ceny akcií*

- Motivácia - reálne ceny akcie, vyznačený trend

# *Model pre ceny akcií*

- Model: cena akcie $S(t)$ sa riadi geometrickým Brownovym pohybom:

$$S(t) = S_0 \exp(\mu t + \sigma w(t)),$$

- Výnosy:
  - výpočet I: $\frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}$ - zodpovedá diskrétnemu úročeniu:

$$\frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}} = r \Rightarrow S_t = (1+r) S_{t-\Delta t}$$

  - výpočet II: $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right)$ - zodpovedá spojitému úročeniu:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) = r \Rightarrow S_t = e^r S_{t-\Delta t}$$

# *Model pre ceny akcií*

- Budeme používat' vzorec II:

$$vynos_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right)$$

- Poznamenajme, že tieto dva výpočty výnosu dajú podobný číselný výsledok:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) &= \ln\left(1 + \frac{S_t}{S_{t-\Delta t}} - 1\right) \\
&= \ln\left(1 + \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}\right) \\
&\approx \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}
\end{aligned}$$

lebo $\ln(1 + x) \approx x$ pre $x \approx 0$

# *Model pre ceny akcií*

- Pripomeňme si model pre akciu:

$$S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$$

- Pre výnosy potom dostaneme:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) &= \ln\left(\frac{S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}}{S_0 e^{\mu(t-\Delta t) + \sigma w(t-\Delta t)}}\right) \\
&= \ln\left(e^{\mu \Delta t + \sigma(w(t) - w(t-\Delta t))}\right) \\
&= \mu \Delta t + \sigma(w(t) - w(t - \Delta t)) \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 t)
\end{aligned}$$

a tieto výnosy sú nezávislé

# *Odhad parametrov GBP z cien akcií*

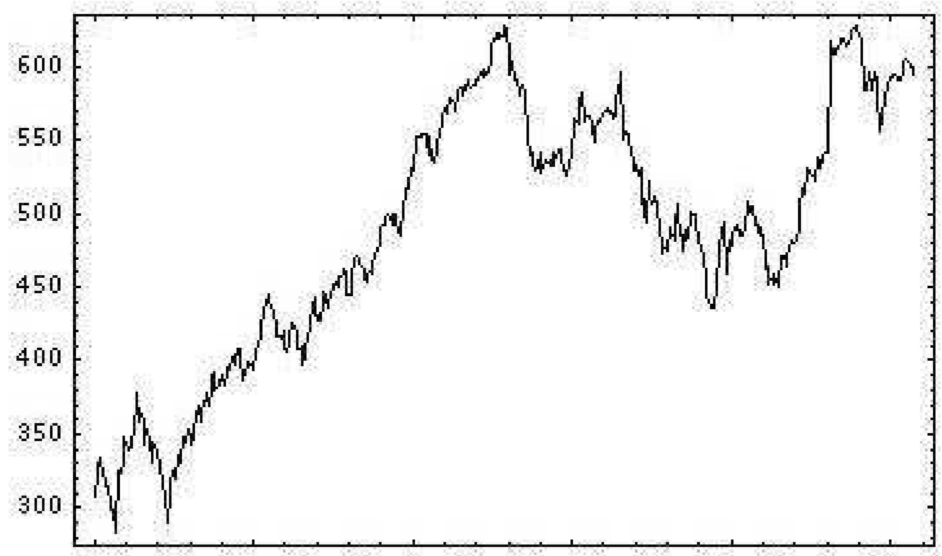
POSTUP:

1. Označme $\Delta t =$ časový interval medzi dvoma cenami akcií v rokoch
2. Vypočítame výnosy - podľa modelu sú nezávislé s rozdelením $N(\mu\Delta t, \sigma^2 t)$
3. Odhadneme ich strednú hodnotu a disperziu:
   - $m =$ aritmetický priemer výnosov $\rightarrow$ odhad strednej hodnoty $\mu\Delta$
   - $s^2 =$ výberová disperzia výnosov $\rightarrow$ odhad disperzie $\sigma^2\Delta$
4. Odhadneme parametre GBP:

$$\mu = \frac{m}{\Delta t}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{s^2}{\Delta t}}$$

# *Odhad parametrov z cien akcií - príklad*

- Dáta z prvého cvičenia - ceny GOOG v rokoch 2009 a 2010:




- Dostali sme odhady:

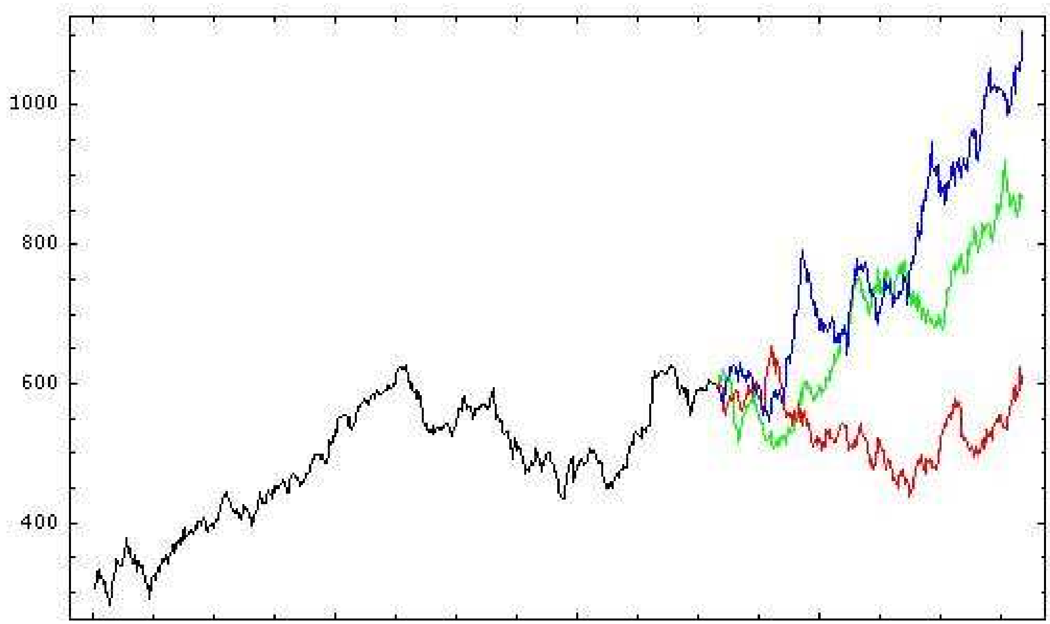
```
mi = miDelta / dt
sigma = Sqrt[s2Delta / dt]

0.322534

0.287669
```

# *Odhad parametrov z cien akcií - príklad*

- Simulácia vývoja v roku 2011 - niekol'ko trajektórií GBP s odhadnutými parametrami štartujúcich z posdlednej hodnoty v roku 2010:




- Stredná hodnota, porovnanie so skutočným vývojom - v príklaoch na precvičenie k prvému cvičeniu

# *III.*

# *Itóova lema*

# Itóova lema

*In precisely built mathematical structures, mathematicians find the same sort of beauty others find in enchanting pieces of music, or in magnificent architecture.*

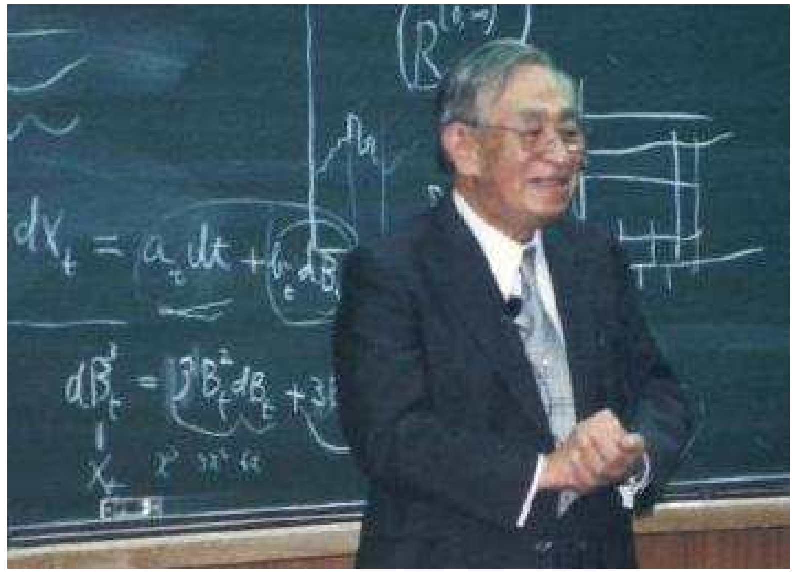
*...*

*...without numerical formulae, I could never communicate the sweet melody played in my heart. Stochastic differential equations, called "Ito Formula," are currently in wide use for describing phenomena of random fluctuations over time. When I first set forth stochastic differential equations, however, my paper did not attract attention. It was over ten years after my paper that other mathematicians began reading my "musical scores" and playing my "music" with their "instruments."*

K. Ito, My Sixty Years in Studies of Probability Theory : acceptance speech of the Kyoto Prize in Basic Sciences (1998).

# *Itóova lema*

- Itóova lema - ako počítať diferenciál náhodných funkcií:



- Na obrázku:
  Čomu sa rovná $dx$, ak $x = w^3$, kde $w$ je Wienerov proces?

# Itóova lema - znenie

Nech $f(x,t)$ je $C^2$ hladká funkcia premenných $x,t$ a nech proces $\{x(t), t \geq 0\}$ vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici:

$$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dW,$$

Potom

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}dw \end{aligned}$$

# *Itóova lema - intuitívny dôkaz*

- Taylorov rozvoj do druhého rádu:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}dx\,dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2\right) +$$

- Z toho, že $dw = \Phi\sqrt{dt}$, kde $\Phi \approx N(0,1)$, dostaneme

$$\begin{aligned}(dx)^2 &= \sigma^2(dw)^2 + 2\mu\sigma dw\,dt + \mu^2(dt)^2 \\ &\approx \sigma^2 dt + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)\end{aligned}$$

- Podobne: $dx\,dt = O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)$
- Členy rádu $dt, dw$ v rozvoji $df$ teda sú:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt$$

# *Itóova lema - príklady*

- Úloha z obrázku:

$$d(w^3) = 3w^2 dw + 3w dt$$

- Cena akcie riadiaca sa geometrickým Brownovym pohybom $S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$:

$$dS = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S dt + \sigma S dw$$

- Niekedy sa model pre cenu akcie píše v tvare

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

- tiež je to GBP, ale s inými parametrami:

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma w(t)}$$

# *Momenty GBP - výpočet Itóovou lemou*

- Nech $Y(t) = \exp(X(t))$, kde $dX(t) = \mu dt + \sigma dw$
- Zvolili sme $f(t,x) = e^x \Rightarrow$

$$dY = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) Y dt + \sigma Y dw$$

- Z toho:

$$\begin{aligned} d\mathbb{E}[Y] &= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \mathbb{E}[Y] dt + \sigma \mathbb{E}[Y dw] \\ &= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \mathbb{E}[Y] dt \end{aligned}$$

  čo je ODR pre $\mathbb{E}Y(t)$
- Začiatočná podmienka: $\mathbb{E}Y(0) = 1$

# *Momenty GBP - výpočet Itóovou lemou*

- K výpočtu $\mathbb{D}[Y]$ potrebujeme $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[\exp(X(t))^2]$
- Zvolíme $f(t,x) = (e^x)^2 = e^{2x} \Rightarrow$

$$d(Y(t)^2) = df = 2(\mu + \sigma^2)Y(t)^2 dt + 2\sigma Y(t)^2 dw$$

- Z toho:

$$d\mathbb{E}[(Y(t)^2)] = 2(\mu + \sigma^2)\mathbb{E}[(Y(t)^2]dt$$

  čo je ODR pre $\mathbb{E}[Y^2]$
- Začiatočná podmienka: $\mathbb{E}[Y(0)^2] = 1$

# *Itóova lema pri oceňovaní derivátov*

- Prvý krok pri odvodení Black-Scholesovho modelu na oceňovanie derivátov:
  - Predpokladajme, že cena akcie sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou $dS = \mu S dt + \sigma S dw$
  - Cena derivátu $V$ (napr. opcie) závisí od času $t$ a od ceny akcie $S$
  - Stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu potom dostaneme použitím Itóovej lemy