Modelovanie okamžitej úrokovej miery

Beáta Stehlíková

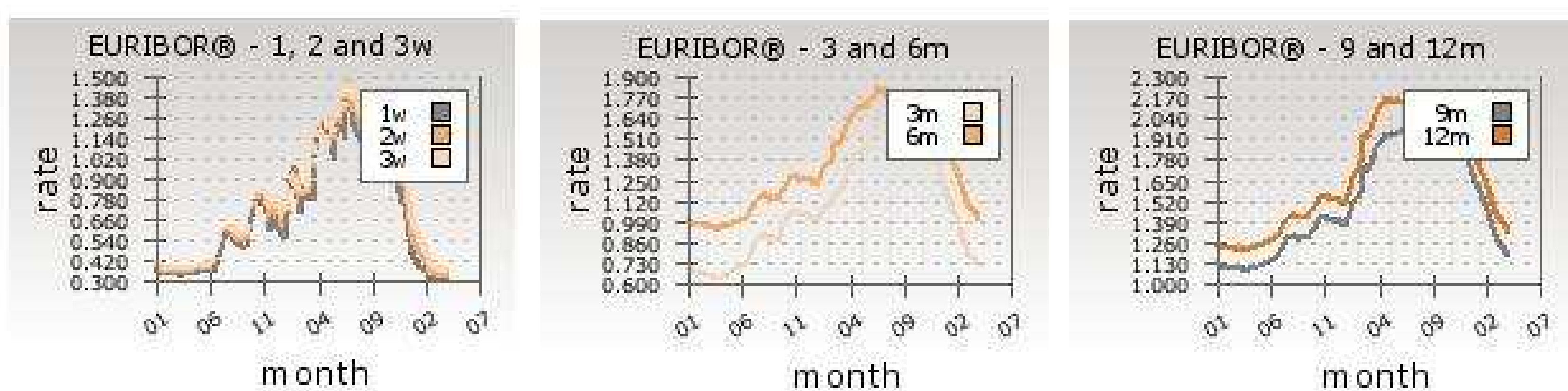
Finančné deriváty, SvF STU, LS 2011/2012

I.

Modelovanie okamžitej úrokovej miery

Úrokové miery

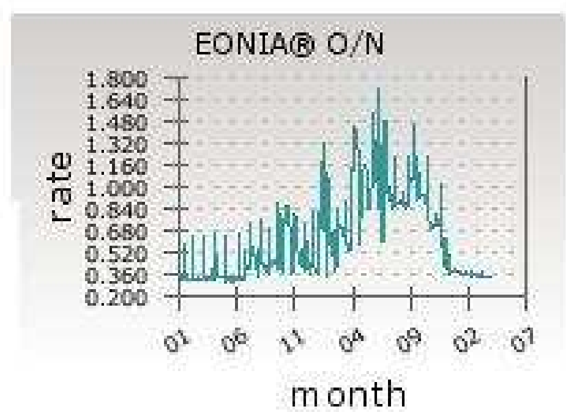
- Doteraz sme predpokladali, že úroková miera je konštantná, napr. pri oceňovaní bezrizikového portfólia pri odvodení Black-Scholesovho modelu: $dP = rPdt$
- V skutočnosti:
  - ◇ úroková miera nie je konštantná
  - ◇ existujú úrokové miery s rôznymi splatnosťami
- Ukážka - Euribor (European Inter-Bank Offered Rate)



http://www.euribor-ebf.eu/

Short rate modely

- Short rate
  - teoreticky: okamžitá úroková miera, na nekonečne krátky čas
  - prakticky: môžeme si ju predstaviť ako úrokovú mieru na veľmi krátky čas
- Ukážka - EONIA (overnight)



http://www.euribor-ebf.eu/

Short rate modely

- Short rate modelujeme pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice
- Ostatné úrokové miery, deriváty - riešením parciálnej diferenciálnej rovnice
- Označenie: r - short rate
- Mean reversion modely:
  - Short rate sa približuje k dlhodobo rovnovážnej hodnote
  - K tomuto trendu sa pridávajú náhodné fluktuácie
  - SDR: $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma(r)dw$, kde $\kappa, \theta, \sigma > 0$
  - $\Rightarrow$ ODR pre strednú hodnotu $dE[r] = \kappa(\theta - E[r])dt$, jej riešenie: $E[r_t] = r_0 e^{-\kappa t} + (1 - e^{-\kappa t})\theta$

Konkrétne modely

- Vašíčkov model:
  - Konštantná volatilita: $\sigma(r,t) = \sigma$
  - SDR pre short rate: $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw$
- Cox-Ingersoll-Rossov model:
  - Volatilita úmerná odmocnine úrokovej miery: $\sigma(r,t) = \sigma\sqrt{r}$
  - SDR pre short rate: $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw$
  - Výhoda: nepripúšťa záporné úrokové miery (nulová short rate $\Rightarrow$ kladný drift)
- Zovšeobecnenie - Chan, Karolyi, Sangstaff, Sanders:
  - Volatilita úmerná všeobecnej mocnine úrokovej miery: $\sigma(r,t) = \sigma r^\gamma$
  - SDR pre short rate: $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw$

II.

Fokker-Planckova PDR

Fokker-Planckova PDR

- Odvodili sme strednú hodnotu r_t pri danej hodnote r_0
- Fokker-Planckova PDR - jej riešením je hustota pravdepodobnostného rozdelenia r_t pri danej začiatočnej hodnote r_0
- Všeobecný proces $dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw \Rightarrow$ hustota $g(x,t)$ rozdelenia v čase t je riešením PDR

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma(x,t)^2 g(x,t)\right) - \frac{\partial}{\partial x}((\mu(x,t)g(x,t))$$

$$g(x,0) = \delta(x - x_0),$$

kde δ je Diracova delta funkcia

Dôkaz: [Ševčovič, Stehlíková, Mikula, str. 116-117]

Fokker-Planckova PDR - príklad

- Vašíčkov model $dx = \kappa(\theta - x)dt + \sigma dw$
- Hustota $g(x,t)$ rozdelenia v čase t teda spĺňa

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}((\kappa(\theta - x)g(x,t))$$

$$g(x,0) = \delta(x - x_0)$$

- Riešením je hustota normálneho rozdelenia
  $g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}_t^2}}e^{-\frac{(x-\bar{x}_t)^2}{2\bar{\sigma}_t^2}}$, ktorého parametre sú
  $\bar{x}_t = \theta(1 - e^{-\kappa t}) + x_0 e^{-\kappa t}$, $\bar{\sigma}_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})$.
- Výpočet je zdĺhavý [Ševčovič, Stehlíková, Mikula, str. 118-119], ukážeme si niečo kratšie - výpočet limitného rozdelenia

Limitné pravdepodobnostné rozdelenie

- Limitná hustota $\tilde{g}(x)$:limita $g(x,t) \to \tilde{g}(x)$, ktorá už nezávisí od času t
- Spĺňa Fokker-Planckovu PDR, ale $\partial\tilde{g}/\partial t = 0$ - vo všeobecnosti

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\sigma(x,t)^2\tilde{g}(x)\right) - \frac{d}{dx}((\mu(x,t)\tilde{g}(x)) = 0$$

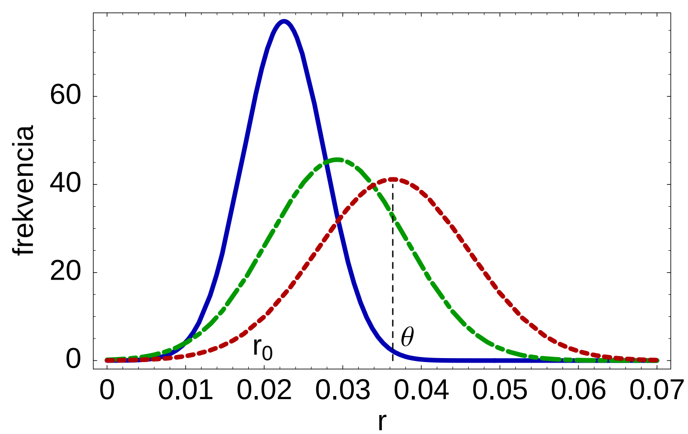
- Vyriešime túto ODR (+ normalizačná podmienka $\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(x)dx = 1$, lebo ide o hustotu) pre Vašíčkov model $\Rightarrow$ dostaneme hustotu normálneho rozdelenia $N(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa})$
- DÚ: Nájdite limitné rozdelenie úrokovej miery v CIR modeli

III.

Short rate modely

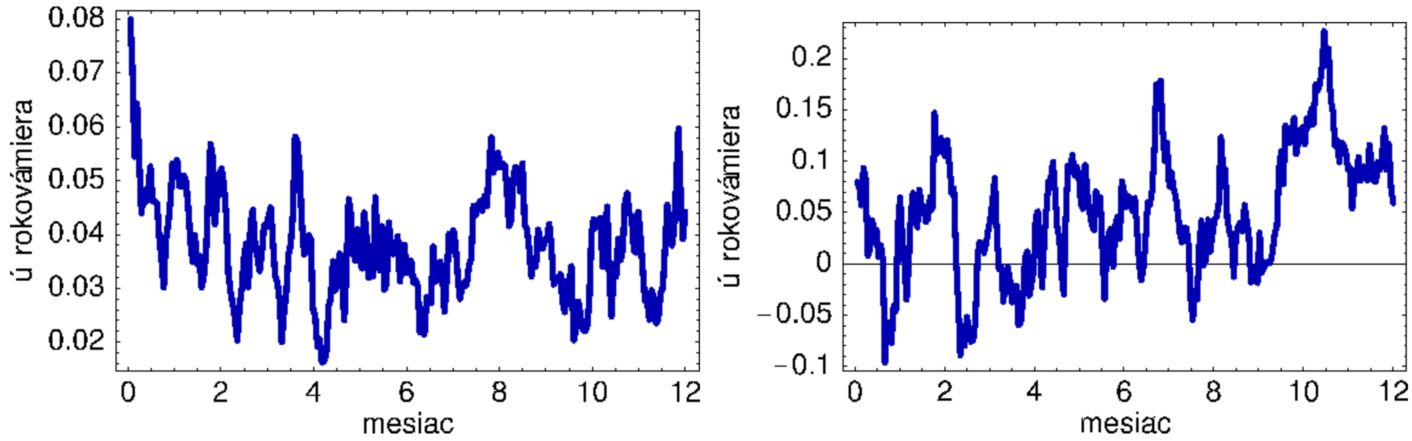
Vašíčkov model

- Normálne rozdelenie úrokovej miery vo Vaščkovom modeli $\Rightarrow$ nepríjemná vlastnosť: možnosť záporných úrokových mier
- Pravdepodobnosť týchto záporných úrokových mier závisí od parametrov modelu
- Pre parametre odhadnuté z reálnych dát [Ševčovič, Urbánová-Csajková] - hustoty $g(x, t)$ pre niekoľko časov t



Vašíčkov model

- Problémom môže byť proces s vyššou volatilitou - obr. vpravo:



- Toto odstraňuje CIR a CKLS model

Ceny dlhopisov

- Dlhopis
  - základný derivát úrokovej miery
  - cenný papier, ktorý v stanovenom čase vyplatí 1 USD
  - v short rate modeloch je jeho cena riešením PDR
- Vašíčkov a CIR model - explicitné riešenie pre cenu dlhopisu
- Všeobecný CKLS model - explicitné riešenie nie je známe $\Rightarrow$ numerické riešenie, analytické aproximačné formuly ([Choi, Wirjanto], [Stehlíková, Ševčovič], [Stehlíková, Zíková, Halgašová])