Ceny dlhopisov v short rate modeloch

Beáta Stehlíková

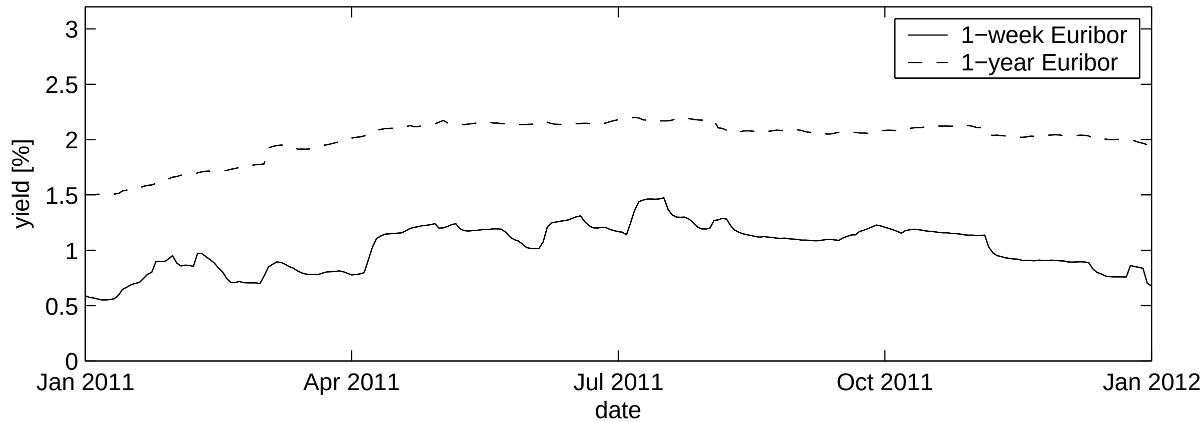
Finančné deriváty, SvF STU, LS 2011/2012

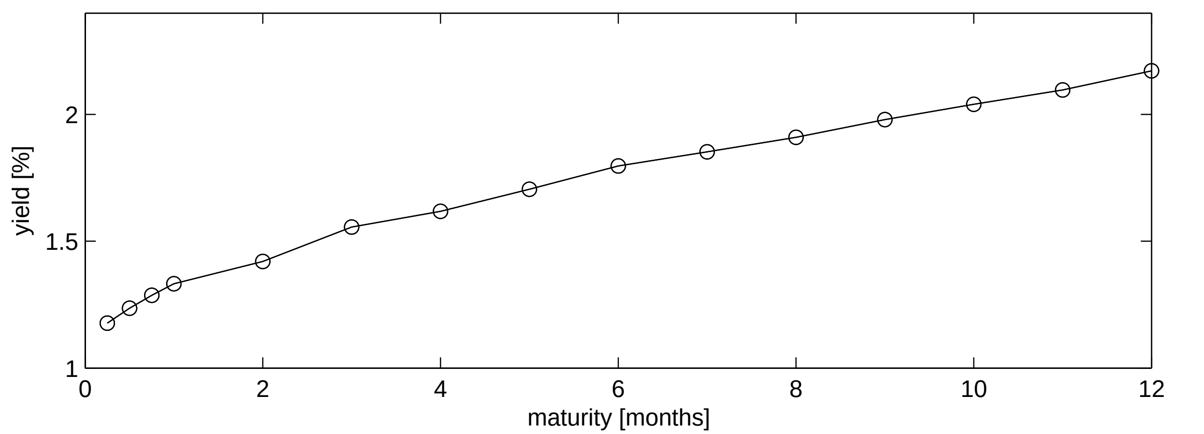
I.

Ceny dlhopisov v short rate modeloch

Úrokové miery

- Doteraz sme modelovali okamžitú úrokovú mieru
- Teraz: úrokové miery s ostatnými splatnosťami





http://www.euribor-ebf.eu/

Dlhopisy

- Dlhopis
  - cenný papier, ktorý v stanovenom čase (naz. sa splatnosť alebo maturita dlhopisu) vyplatí dohodnutú sumu - nech je to 1 USD
  - $P(t,T)$ = cena dlhopisu v čase t, ak jeho maturita je v čase T
  - $R(t,T)$ = úroková miera s maturitou T v čase t
  - Platí:

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \Rightarrow R(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{T-t}$$

- V short rate modeloch: cena dlhopisu P je riešením PDR, $P = P(r,t,T)$

Odvodenie PDR pre dlhopis

- SDR pre short rate:

$$dr = \tilde{\mu}(t,r)dt + \tilde{\sigma}(t,r)dw$$

- Uvažujme dlhopis s maturitou T, potom Itóova lema dáva:

$$dP = \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \tilde{\mu}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right)}_{\mu_B(t,r)} dt + \underbrace{\tilde{\sigma}\frac{\partial P}{\partial r}}_{\sigma_B(t,r)} dw$$

- Portfólio: 1 dlhopis s maturitou T_1 a Δ dlhopisov s maturitou T_1; jeho hodnota:

$$\Pi = P(r,t,T_1) + \Delta P(r,t,T_2)$$

Odvodenie PDR pre dlhopis

- Zmena hodnoty portfólia:

$$\begin{aligned} d\Pi &= dP(r,t,T_1) + \Delta dP(r,t,T_2) \\ &= (\mu_B(r,t,T_1) + \Delta\mu_B(r,t,T_2))\, dt \\ &\quad +(\sigma_B(r,t,T_1) + \Delta\sigma_B(r,t,T_2))\, dw \end{aligned}$$

- Eliminujeme náhodnosť tým, že zvolíme

$$\Delta = -\frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)},$$

potom

$$d\Pi = \left(\mu_B(t,r,T_1) - \frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)} \mu_B(t,r,T_2) \right) dt$$

Odvodenie PDR pre dlhopis

- Výnos bezrizikového portfólia musí byť r (okamžitá úroková miera), t.j. $d\Pi = r\Pi dt$:

$$\mu_B(t,r,T_1) - \frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)}\mu_B(t,r,T_2) = r\Pi$$

- Dosadíme:

$$\mu_B(t,r,T_1) - \frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)}\mu_B(t,r,T_2)$$

$$= r\left(P(t,r,T_1) - \frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)}P(t,r,T_2)\right)$$

Odvodenie PDR pre dlhopis

- Maturity T_1, T_2 boli l'ubovol'né, preto musí existovat' $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(r,t)$ tak, že pre každé t:

$$\tilde{\lambda}(r,t) = \frac{\mu_B(r,t,T) - rP(r,t,T)}{\sigma_B(r,t,T)}$$

- Funkcia $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(r,t)$ nezávisí od maturity T; nazýva sa trhová cena rizika
- Záver: PDR pre cenu dlhopisu $P = P(r,t)$ je

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\tilde{\mu}(r,t) - \tilde{\lambda}(r,t)\tilde{\sigma}(r,t))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\tilde{\sigma}^2(r,t)}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0.$$

pre $r \in (0,\infty), t \in (0,T)$ s koncovou podmienkou $P(r,T) = 1$ pre $r \in (0,\infty)$

II.

Špeciálne prípady: Vašíčkov a CIR model

Explicitné riešenia

- Explicitné riešenie pre cenu dlhopisu:
  - Vašíčkov model s trhovou cenou rizika $\tilde{\lambda}(r,t) = \lambda$
  - CIR model s trhovou cenou rizika $\tilde{\lambda}(r,t) = \lambda\sqrt{r}$
- Riešenie hľadáme v tvare

$$P(r,\tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r},$$

  kde $\tau = T - t$

- Dosadíme do PDR pre cenu dlhopisu $\Rightarrow$ dostaneme systém obyčajných diferenciálnych rovníc pre funkcie $A(\tau), B(\tau)$ $\Rightarrow$ tento systém sa dá explicitne vyriešiť

Explicitné riešenia

- Funkcie A, B:

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa},$$

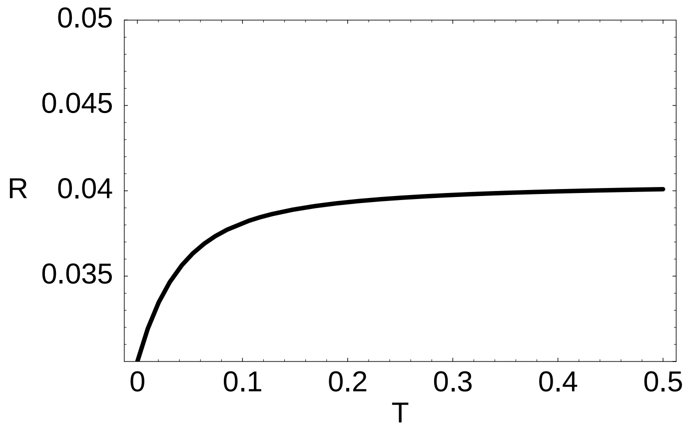
$$\log A(\tau) = \left[\frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau}) - \tau\right] R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-\kappa\tau})^2,$$

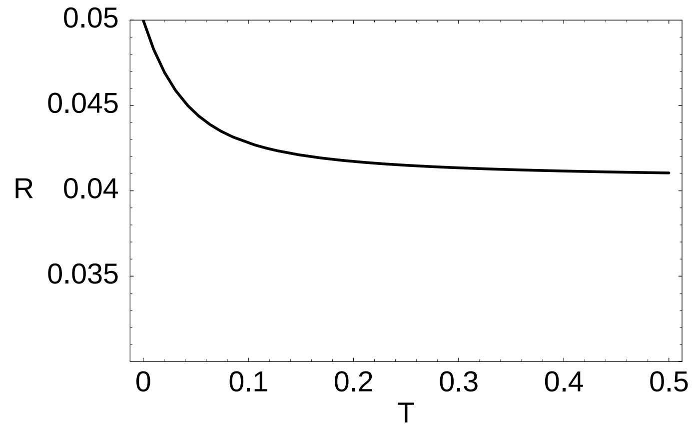
  kde $R_\infty = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$

- Platí: R_∞ je limita výnosových kriviek

Explicitné riešenia

- Ukaážka výnosových kriviek vo Vašíčkovom modeli:





- DÚ: Odvoď'te systém ODR pre funkcie $A(\tau), B(\tau)$ v CIR modeli