

Oceňovanie amerických opcií

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, SvF STU, LS 2011/2012

I.

Oceňovanie amerických opcií pomocou PDR

Európske a americké typy derivátov

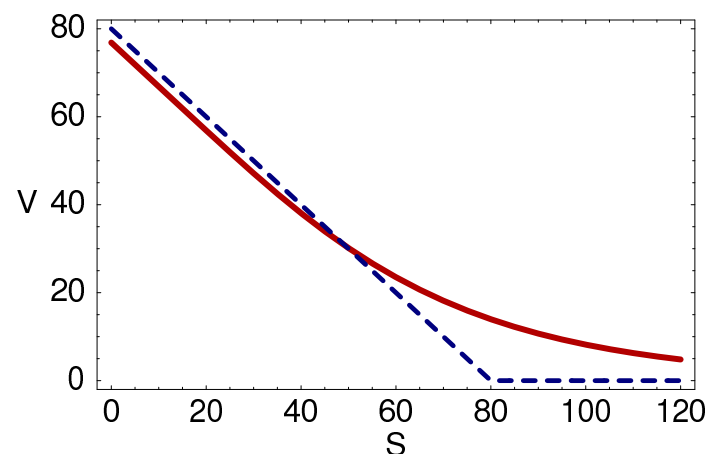
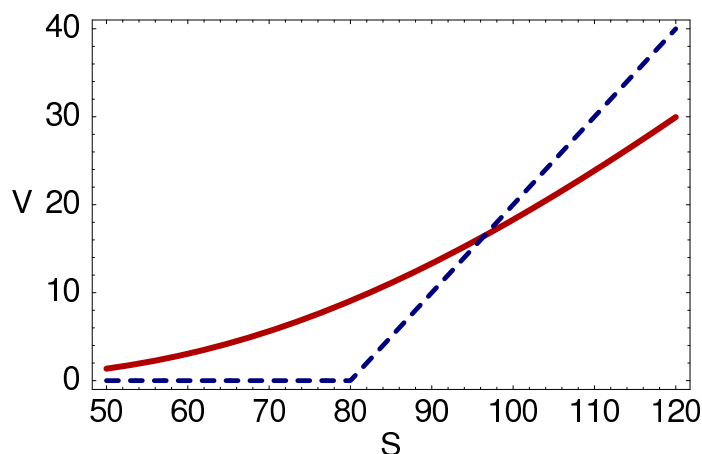
- Uvažujme put opciu s expiračnou cenou 150 USD - teda právo predať akciu za 150 USD. Nech expirácia opcie je o mesiac.
 - ◇ ak je opcia **európskeho typu**: toto právo môžeme využiť v čase expirácie - teda o mesiac
 - ◇ ak je opcia **amerického typu**: toto právo môžeme využiť **kedykoľvek odteraz do času expirácie**
- Ak táto opcia stojí 20 USD a dnešná cena akcie je 110 USD:
 - ◇ ak je opcia **európskeho typu**: zisk závisí od toho, ako sa bude cena akcie ďalej vyvíjať
 - ◇ ak je opcia **amerického typu**: kúpime opciu a hneď ju uplatníme → **okamžitý bezrizikový zisk**
- **CVIČENIE: Vymyslite podobný príklad pre call.**

Európske a americké typy derivátov

- Ohraničenie, ktoré musí byť splnené, aby nebola príležitosť na bezrizikový zisk (t.j. arbitráž):

cena amerického derivátu nesmie byť pod payoffom

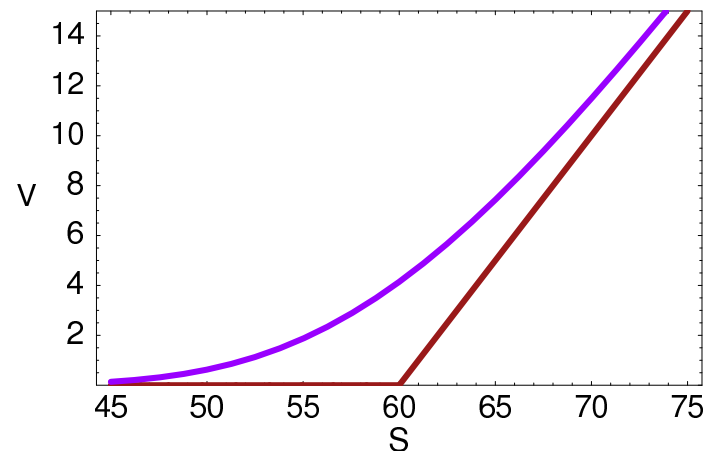
- Európske typy derivátov: call na akciu vyplácajúcu dividendy, put na akúkoľvek akciu



⇒ cena amerického derivátu sa tu teda nerovná cene európskeho

Európske a americké typy derivátov

- Európske typy derivátov - pokračovanie: call na akciu nevyplácajúcu dividendy



cena je stále nad payoffom \Rightarrow cena amerického derivátu sa rovná cene európskeho

Európske a americké typy derivátov

- Je to takto aj vo všeobecnosti - dokážeme:
 - ◇ Ak akcia nevypláca dividendy, tak cena call opcie je vždy nad payoffom.
 - ◇ Ak akcia vypláca dividendy, cena call opcie vždy pretne payoff.
 - ◇ Cena put opcie vždy pretne payoff.

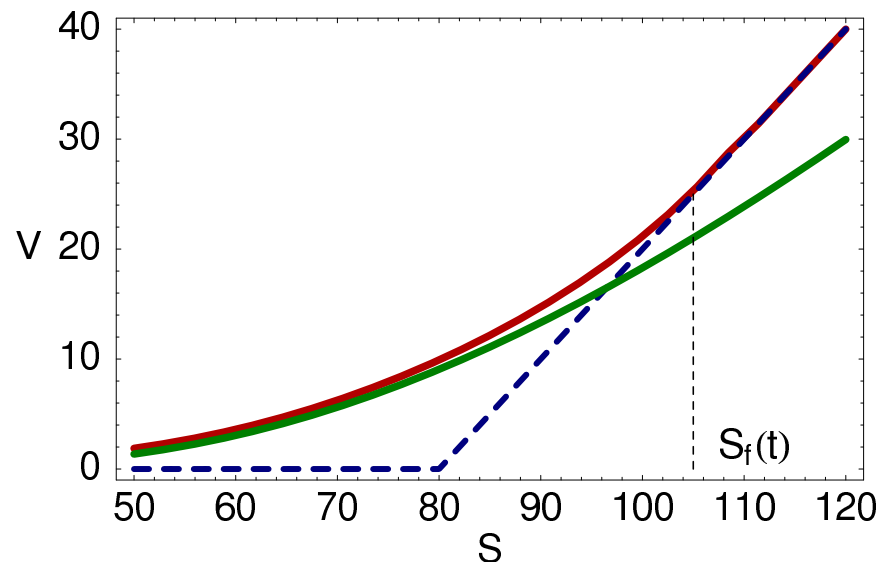
Základná myšlienka: budeme počítat' limitu

$V(S, t)/S$, ak $S \rightarrow \infty$ (pre call), resp. $S \rightarrow 0^+$ (pre put)

- Preto:
 - ◇ Cena amerického callu na akciu bez dividend sa rovná cene európskeho callu
 - ◇ Cenu amerického callu na akciu s dividendami a cenu putu na hocijakú akciu treba počítat' inak

Americké typy derivátov

- Nemôžeme zobrať $\max(\text{euróska opcia, payoff})$ - graf musí byť **hladká funkcia**
- Prečo musí byť hladká - matematické odvodenie:
Ševčovič, Stehlíková, Mikula: **Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov**, str. 155-156
- Ako bude riešenie vyzerat' :



Americké typy derivátov

- Priebeh riešenia (pre call):
 - ◇ ak $S < S_f(t)$: cena **spĺňa Black-Scholesovu PDR**, opciu držíme (neuplatňujeme)
 - ◇ ak $S > S_f(t)$: cena **sa rovná payoffu**, opciu uplatníme)
 - ◇ ak $S = S_f(t)$: cena má v tomto bode **rovnakú hodnotu** (kvôli spojitosti) **aj deriváciu** (kvôli hladkosti napojenia) ako payoff
- $S_f(t)$ - **hranica predčasného uplatnenia**, matematicky je to **vol'ná hranica**

Matematická formulácia úlohy

- Pre call opciu:
 - ◇ funkcia $V(S, t)$ je riešením Black-Scholesovej PDR

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

na časovo závislej oblasti $0 < t < T, 0 < S < S_f(t)$.

- ◇ Koncová podmienka:

$$V(S, T) = \max(S - E, 0).$$

- ◇ Okrajové podmienky na hranici $S = 0$ a $S = S_f(t)$ pre $0 < t < T$:

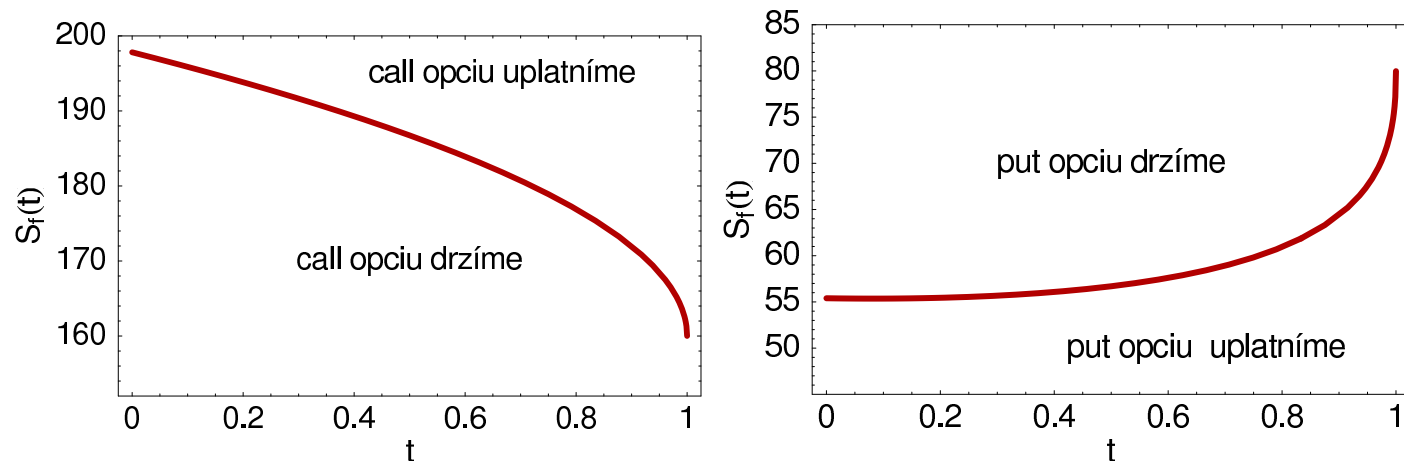
$$V(0, t) = 0, \quad V(S_f(t), t) = S_f(t) - E, \quad \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = 1$$

Matematická formulácia úlohy

- Čo treba zmeniť pre put opciu:
 - ◇ časovo závislú oblasť na $0 < t < T, S > S_f(t)$
 - ◇ koncovú podmienku na $V(S, T) = \max(E - S, 0)$
 - ◇ okrajové podmienky na $V(+\infty, t) = 0,$
 $V(S_f(t), t) = E - S_f(t), \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = -1$

Výstup

- Vyriešením úlohy dostaneme:
 - ◇ cenu opcie $V(S, t)$ v závislosti od ceny akcie a času
 - ◇ hranicu predčasného uplatnenia - t.j. či pre daný čas a cenu akcie opciu uplatniť, alebo nie



II.

Analýza priebehu hranice $S_f(t)$

Analýza priebehu hranice $S_f(t)$

- Predmet výskumu vo finančnej matematike
- Ukážeme si jednu ohraničenie na $S_f(t)$ pre call opciu
- Budeme ho **potrebovať** pri odvodení numerickej **schémy** oceňovania amerických opcií

Ohraničenie pre $S_f(t)$

- Je zrejmé, že $S_f(t) \geq E$
- Otázka: vieme povedať niečo viac?

LEMA: $\partial V / \partial t = 0$ pre $S = S_f(t)$

DÔKAZ:

- Zoberieme identitu $V(S_f(t), t) = S_f(t) - E$
- Zderivujeme podľa t
- Využijeme okrajovú podmienku (hladkosť v bode $S = S_f(t)$)

Ohraničenie pre $S_f(t)$

- Zoberieme Black-Scholesovu PDR pre $S < S_f$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- Spravíme limitu $S \rightarrow S_f$, pričom využijeme:
 - ◇ prechádzajúcu lemu
 - ◇ konvexnosť V vzhľadom na S
 - ◇ okrajovú podmienku

Dostaneme:

$$(r - q)S_f(t) - r(S_f(t) - E) \leq 0 \Rightarrow S_f(t) \geq \frac{r}{q}E$$

- Takže:

$$S_f(t) \geq E \max(1, r/q)$$

Ukážky výskumu vo fin. mat.

J. N. Dewyne, S. D. Howison, J. Ruf, P. Wilmott (1993): **Some mathematical results in the pricing of American options.** Euro. Journal on Applied Mathematics 4, 381-398

- Asymptotika pre call opciu, ak $r \leq q$ a $t \rightarrow T$:

$$S_f(t) \approx E(1 + 0.638\sigma\sqrt{T-t})$$

D. Ševčovič (2001): **Analysis of the free boundary for the pricing of an American Call option.** Euro. Journal on Applied Mathematics 12, 25-37.

- Nelineárna integrálna rovnica pre $S_f(t)$ a jej numerické riešenie

S. P. Zhu (2006): **A new analytical approximation formula for the optimal exercise boundary of American put options.** International Journal of Theoretical and Applied Finance 9, 1141-1177.

- Aproximácia $S_f(t)$ v analytickom tvare

III.

*Oceňovanie amerických opcí pomocou
lineárnej komplementarity*

Oceň. pomocou lin. komplementarity

- Označme $V(S, t)$ cenu americkej opcie a $\bar{V}(S)$ jej payoff
- Vieme, že musí platiť $V(S, t) \geq \bar{V}(S)$
- Ukážeme (pre prípad callu), že

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0$$

- ◇ ak $S < S_f$: nastáva rovnosť
- ◇ ak $S \geq S_f$: vtedy $V(S, t) = S - E$ (lebo $S_f \geq E$);
dosadíme do ľavej strany a využijeme, že
 $S_f \geq Er/q$
- Súčasne vidíme, že nemôžu byť ostré obe nerovnosti súčasne

Oceň. pomocou lin. komplementarity

- Máme teda úlohu o lineárnej komplementarite:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0$$

$$V(S, t) \geq \bar{V}(S)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) (V(S, t) - \bar{V}(S)) = 0$$

pre $S \in (0, \infty), 0 < \tau < T$.

Oceň. pomocou lin. komplementarity

- Postupnosť transformácií z predch. prednášok:

$$V(S, t) \rightarrow Z(x, \tau) \rightarrow u(x, \tau)$$

- Úloha pre $u(x, \tau)$ v prípade callu:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (u(x, \tau) - g(x, \tau)) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq 0, \quad u(x, \tau) - g(x, \tau) \geq 0$$

pre $x \in \mathbb{R}, 0 < \tau < T$, kde

- ◇ $g(x, \tau) = Ee^{\alpha x + \beta \tau} \max(0, e^x - 1)$ je transformovaný payoff (α, β v prech. pred.)
- ◇ $g(x, 0)$ je začiatočná podmienka $u(x, 0)$

- Pre put sa zmení: $g(x, \tau) = Ee^{\alpha x + \beta \tau} \max(0, 1 - e^x)$

IV.

*Numerické oceňovanie amerických opcí:
PSOR algoritmus*

Numerické riešenie

- Pripomeňme si:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (u(x, \tau) - g(x, \tau)) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq 0, \quad u(x, \tau) - g(x, \tau) \geq 0$$

- Diskretizácia ako pri implicitnej metóde pre európske opcie:

$$\mathbf{A}u^{j+1} \geq u^j + b^j, \quad u^{j+1} \geq g^{j+1} \quad \text{pre } j = 0, 1, \dots, m-1,$$
$$(\mathbf{A}u^{j+1} - u^j - b^j)_i (u^{j+1} - g^{j+1})_i = 0 \quad \text{pre každé } i$$

Numerické riešenie

- Matica A a vektor b zostávajú rovnaké:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2\gamma & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 1 + 2\gamma & -\gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & & -\gamma & 1 + 2\gamma & -\gamma \\ 0 & \dots & 0 & -\gamma & 1 + 2\gamma \end{pmatrix},$$

$$b^j = (\gamma\phi^j, 0, \dots, 0, \gamma\psi^j)^T$$

kde $\gamma = \frac{\sigma^2 k}{2h^2}$

PSOR metóda

- Na každej časovej vrstve teda riešime úlohu typu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}u &\geq b, & u &\geq g, \\ (\mathbf{A}u - b)_i (u_i - g_i) &= 0 & \text{pre každé } i. \end{aligned}$$

- Definujme postupnosť

$$u^0 = 0, \quad u^{p+1} = \max(\mathbf{T}_\omega u^p + c_\omega, g) \quad \text{pre } p = 1, 2, \dots,$$

kde T_ω, c_ω sú z klasickej SOR metódy a maximum berieme po zložkách

- Projektovaný SOR \rightarrow označuje sa ako **PSOR metóda**

PSOR metóda

- PSOR po zložkách:

$$u_i^{p+1} = \max \left[\frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} A_{ij} u_j^{p+1} - \sum_{j > i} A_{ij} u_j^p \right) + (1 - \omega) u_i^p, g_i \right]$$

Konvergenca algoritmu k riešeniu

- Postupnosť u^p konverguje k nejakej limite u - dokáže sa Banachovou vetou o pevnom bode [Ševčovič, Stehlíková, Mikula: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov, str. 182-183]
- Táto limita je riešením:
 - ◇ $u_i^{p+1} \geq g_i \Rightarrow$ aj limita spĺňa $u_i \geq g_i$
 - ◇ $u_i^{p+1} \geq \frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} A_{ij} u_j^{p+1} - \sum_{j>i} A_{ij} u_j^p \right) + (1 - \omega) u_i^p \Rightarrow$ aj limita spĺňa $u_i \geq \frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} A_{ij} u_j - \sum_{j>i} A_{ij} u_j^p \right) + (1 - \omega) u_i$
využijeme $A_{ii} > 0, \omega > 0 \rightarrow$ dostaneme $(Au)_i \geq b_i$
 - ◇ ak $u_i > g_i$, tak od určitého indexu p_0 je $u_i^p > g_i$, pre tieto indexy:

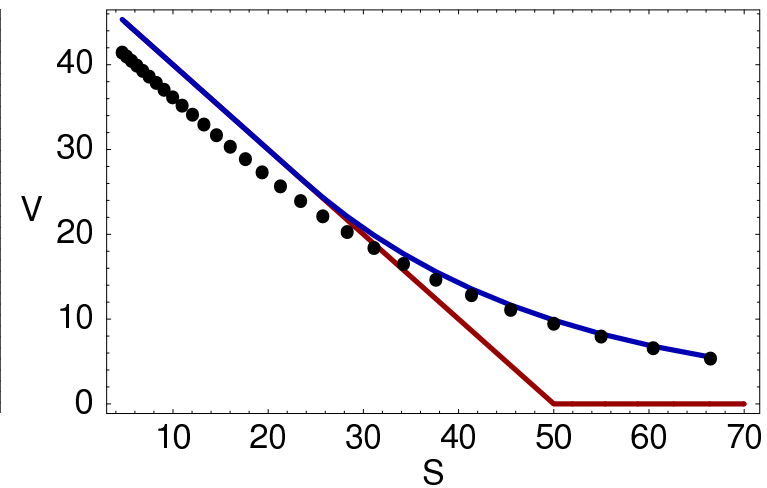
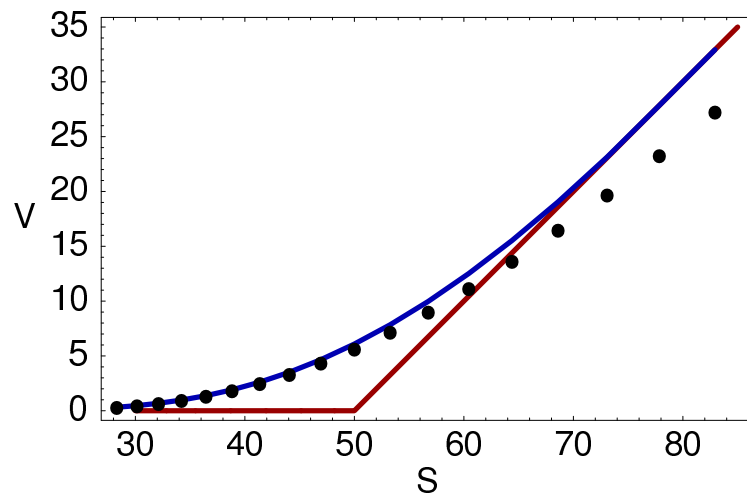
Konvergenca algoritmu k riešeniu

$$u_i^{p+1} = \frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} A_{ij} u_j^{p+1} - \sum_{j > i} A_{ij} u_j^p \right) + (1 - \omega) u_i^p,$$

v limite pre $p \rightarrow \infty$ dostaneme $(Au)_i = b_i \Rightarrow$ podmienka $(Au - b)_i (u_i - g_i) = 0$ je splnená

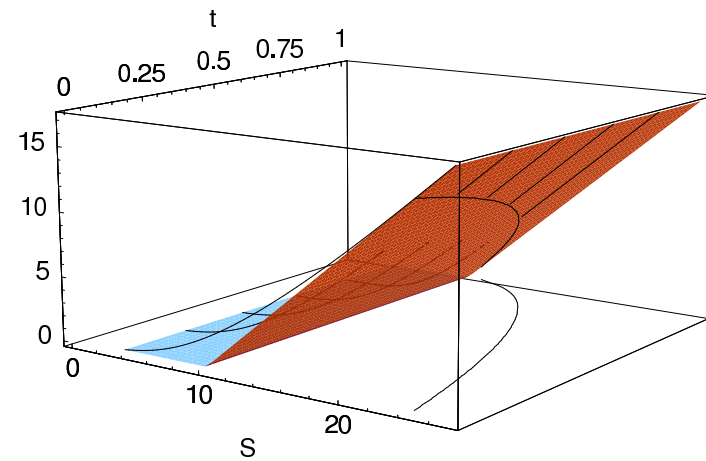
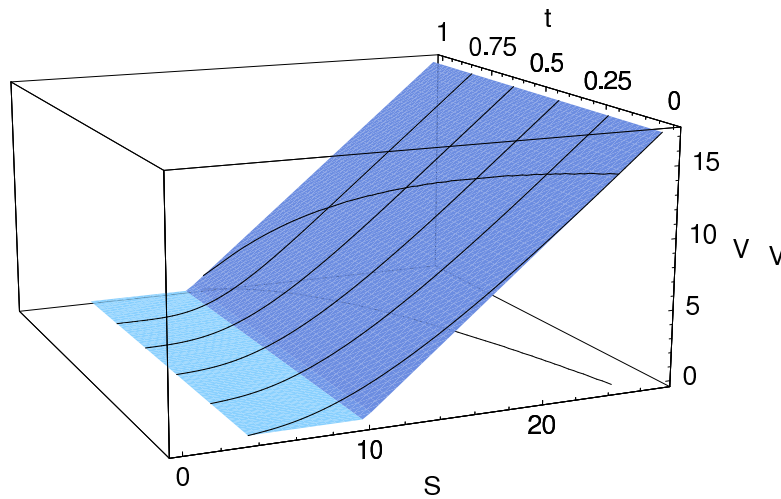
Ukážka numerických výsledkov

- Oceňovanie americkej call a put opcie (na porovnanie bodkami cena európskej opcie)



Ukážka numerických výsledkov

- 3D graf s vyznačenou voľnou hranicou pre call opciu:



Ukážka numerických výsledkov

- Numerický výpočet vol'nej hranice a porovnanie s aproximačnou formulou

