# *Finančné deriváty - úvod*

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, SvF STU, LS 2011/2012

# *I.*

# *Čo sú finančné deriváty*

# Čo sú finančné deriváty

- Heslo DERIVATIVE v slovníku:

*noun*

**1** something which is based on another source:

*the aircraft is a derivative of the Falcon 20G*

a word derived from another or from a root in the same or another language:
*'fly-tip' is a derivative of the phrase 'on the fly'*

a substance that is derived chemically from a specified compound:
*crack is a highly addictive cocaine derivative*

**2** (often **derivatives**) a financial product (such as a future, option, or warrant) whose value derives from and is dependent on the value of an underlying asset:
*[as modifier]:*

*the derivatives market*

**3** *Mathematics* an expression representing the rate of change of a function with respect to an independent variable.

http://oxforddictionaries.com/definition/derivative

# *Deriváty*

- Aristoteles o Thalesovi z Milétu (Politika, kapitola XI):

  *... while it was yet winter, having got a little money, he gave earnest for all the oil works that were in Miletus and Chios, which he hired at a low price, there being no one to bid against him; but when the season came for making oil, many persons wanting them, he all at once let them upon what terms he pleased.*

  Anglický preklad: http://www.gutenberg.org/

- Hodnota práva použiť všetky lisy na olivy závisí od úrody olív v danom roku
- V prípade nízkej úrody by niektoré lisy zostali nevyužité → Thales mal právo, ale nie povinnosť použiť lisy

# *Deriváty*

- Právo a súčasne povinnosť realizovať v danom čase vopred dohodnutý obchod; ukážky z histórie:
  - Anglicko, Francúzsko, 12. storočie - dohoda budúceho obchodu na trhu na základe vzorky, *"lettre de faire"*
  - Japonsko, 17. storočie - štandardizované kontrakty s ryžou
  - Chicago, 19. storočie - obilie, vznik *Chicago Board of Trade* (1848)
  - 1898 - *Chicago Mercantile Trading*, maslo a vajcia, postupne aj rôzne iné poľnohospodárske produkty
  - 1978 - *International Monetary Market* ako súčasť *Chicago Mercantile Trading*, cudzie meny, neskôr napr. aj deriváty akciového indexu S&P 500

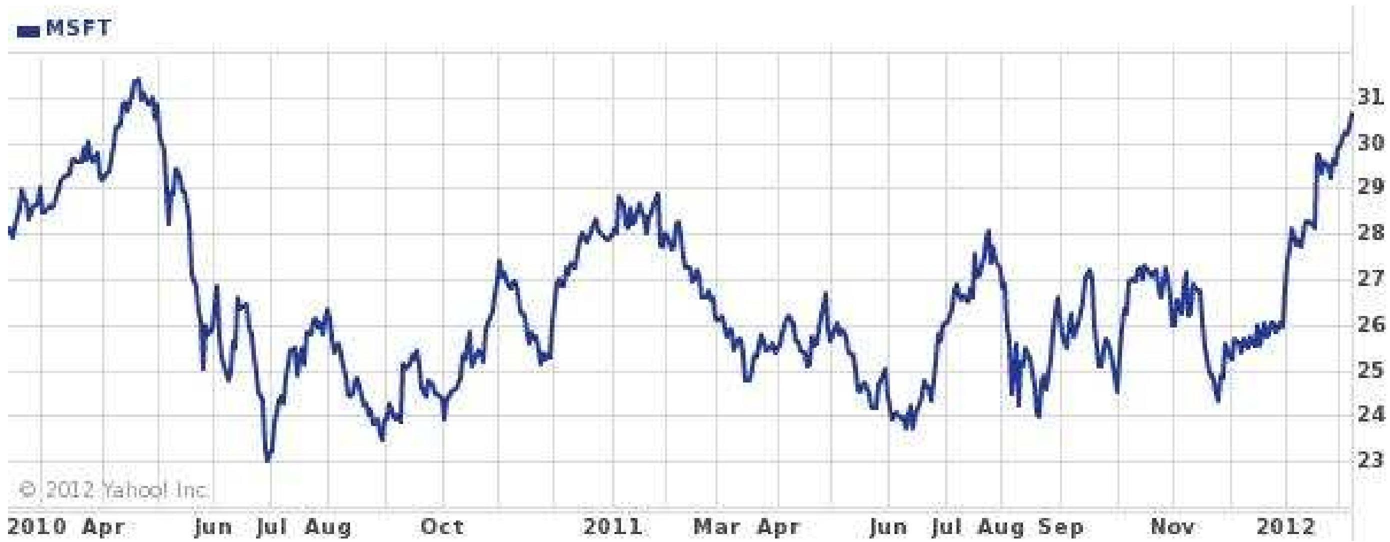
# *Akcie*

- Väčšinu semestra sa budeme zaoberať derivátmi akcií
- Ukážka vývoja cien akcií:


http://finance.google.com

# Akcie

- Ukážka vývoja cien akcií:




http://finance.yahoo.com

## *II.*

## *Forwardy na akcie*

# *Forward na akciu*

- Dnešná (čas $t$) cena akcie je $S_t$.
- Forwardový kontrakt znamená právo a súčasne povinnosť kúpiť vo vopred dohodnutom čase $T$ akciu za vopred dohodnutú cenu $F$.
- Za podpísanie forwardového kontraktu neplatíme nič.
- Úroková miera - ročná (p. a.), ako desatinné číslo - je $r$
- Otázka: Čomu sa má rovnať $F$?

# *Forward na akciu*

- Uvažujme nasledovnú stratégiu:
  - ◇ dnes kúpim akciu za $S_t$, peniaze na ňu si požičiam v banke za úrok $r$ $\longrightarrow$ bilancia dnes $= 0$
  - ◇ potom v čase $T$ mám akciu a banke musím vrátiť $S_t e^{r(T-t)}$
- Čo robí forward:
  - ◇ dnes: bilancia $= 0$
  - ◇ v čase $T$: mám akciu, musím zaplatiť $F$
- Dva postupy vedú k tomu istému $\longrightarrow$ ich platby v čase $T$ musia byť rovnaké:

$$F = S_t e^{r(T-t)}$$

# *Forward na akciu*

- Ak by niekto ponúkal forward za nižšiu cenu, t.j. $F < S_t e^{r(T-t)}$:
  - v čase $t$ podpíšeme forwardový kontrakt, zároveň predáme akciu za $S_t$ (tzv. short selling) a získané peniaze vložím do banky
  - v čase $T$ kúpime akciu za $F$ a vrátime ju (dlhovali sme jednu akciu), z banky si vyberieme $S_t e^{r(T-t)}$
  - máme tak bezrizikový zisk $S_t e^{r(T-t)} - F > 0$
  - ale na trhu nemôže byť arbitráž (bezrizikový zisk) - každý by chcel takýto forward podpísať $\longrightarrow$ vysoký dopyt by spôsobil pokles ceny
- Toto je dôležitý princíp pri oceňovaní derivátov: pricíp vylúčenia arbitráže (cena musí byť taká, aby nevznikla arbitráž)

# *Forward na akciu*

- Podobne, ak by forward mal vyššiu cenu, t.j. $F > S_t e^{r(T-t)}$:
  - v čase $t$ si požičiame $S_t$, kúpime akciu za to akciu a vypíšeme forward (zaviažeme sa predať akciu za $F$)
  - v čase $T$ predáme akciu (ktorú vlastníme) za dohodnutú sumu $F$ a vrátime banke $S_t e^{r(T-t)}$
  - máme istý zisk $F - S_t e^{r(T-t)} > 0$

# III.

## Opcie na akcie

- Typy opcií
- Payoff a profit diagram
- Oceňovanie opcií - jednoduchý príklad
- Call-put parita
- Ohraničenia na cenu opcií
- Kombinované stratégie

# *Európske opcie na akciu*

- Európska call opcia je právo - ale nie povinnosť - kúpiť akciu za vopred dohodnutú cenu $E$ (expiračná cena, angl. *strike price*, *exercise price*) vo vopred dohodnutom čase $T$ (čas expirácie, splatnosť opcie, angl. *expiration time*)
- Európska put opcia je právo - ale nie povinnosť - predať akciu za vopred dohodnutú cenu $E$ (expiračná cena) vo vopred dohodnutom čase $T$ (čas expirácie, splatnosť opcie)
- Americká call, resp. put opcia - právo kúpiť, resp. predať akciu máme nielen v čase expirácie $T$, ale kedykoľvek do času expirácie

# *Opcia na akciu*

- Napríklad ceny z 31.1.2012:

View options by expiration Feb 18, 2012

Calls

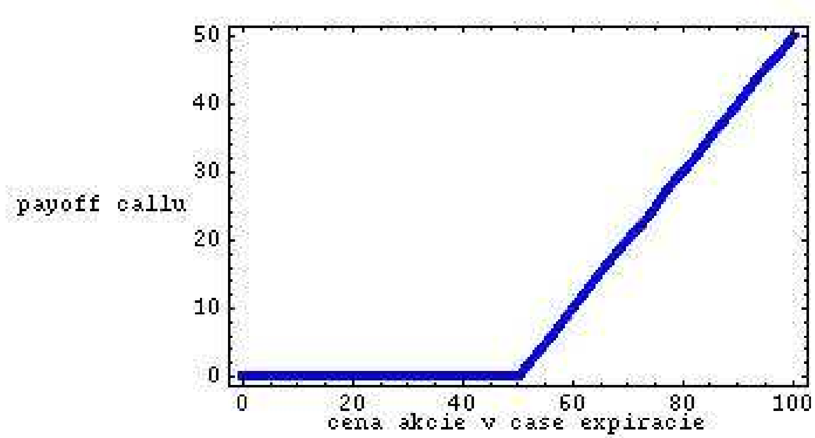
| Strike | Price | Change | Bid |
|---|---|---|---|
| 555.00 | 28.90 | +2.90 | 29.0 |
| 560.00 | 26.30 | +3.60 | 24.8 |
| 565.00 | 21.30 | +2.70 | 20.8 |
| 570.00 | 17.43 | +1.95 | 17.3 |
| 575.00 | 14.40 | +1.90 | 14.1 |
| 580.00 | 11.50 | +1.48 | 11.3 |
| 585.00 | 8.98 | +1.28 | 8.8 |
| 590.00 | 6.90 | +0.80 | 6.8 |
| 595.00 | 5.20 | +0.59 | 5.1 |
| 600.00 | 3.80 | +0.30 | 3.8 |
| 605.00 | 3.50 | +0.92 | 2.8 |

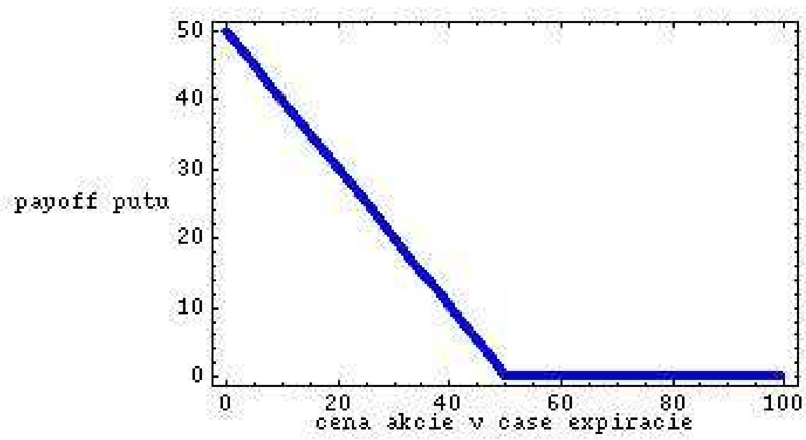
  Cena opcie s expiračnou cenou 580 USD a expiračným časom 18.2.2012 bola 11.50 USD.

- Americké opcie - expirácia v sobotu po treťom piatku v mesiaci

# *Payoff diagram*

- Payoff diagram opcie (výplatný diagram) - hodnota opcie v čase expirácie v závislosti od ceny akcie v tomto čase
- Pre call opciu: $\max(0, S - E)$, pre put: $\max(E - S, 0)$
- Napríklad pre $E = 50$:



# *Profit diagram*

- Profit diagram opcie (zisk) - payoff opcie znížený o to, čo začiatku za opciu zaplatíme:
  - ◇ Ak $r = 0$, tak

    $$\textit{profit} = \textit{payoff} - \textit{náklady}$$

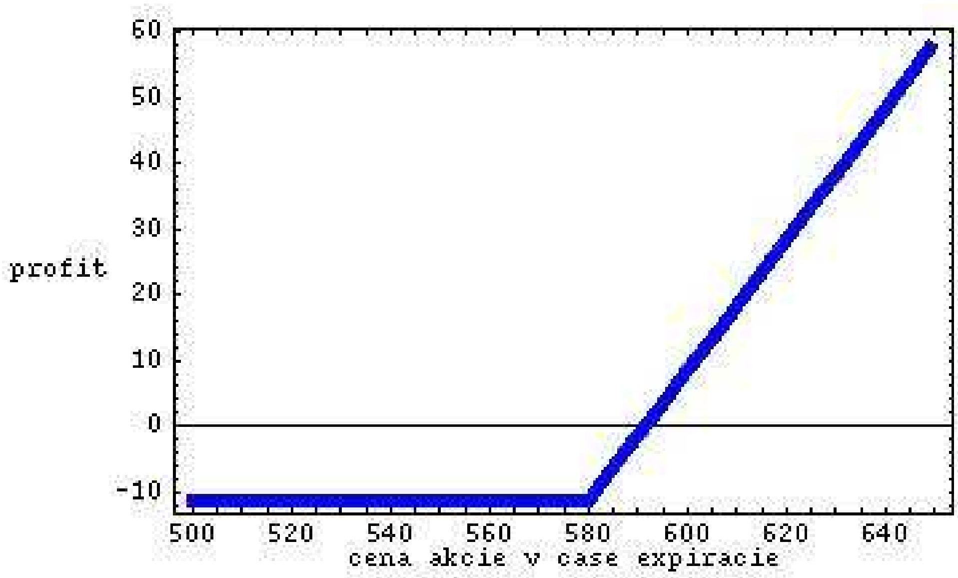
  - ◇ Vo všeobecnosti:

    $$\textit{profit} = \textit{payoff} - \textit{náklady} \times e^{r\tau}$$

    (zaplatiť dnes sumu *náklady* je to isté, ako zaplatiť v čase expirácie sumu *náklady*$\times e^{r\tau}$)

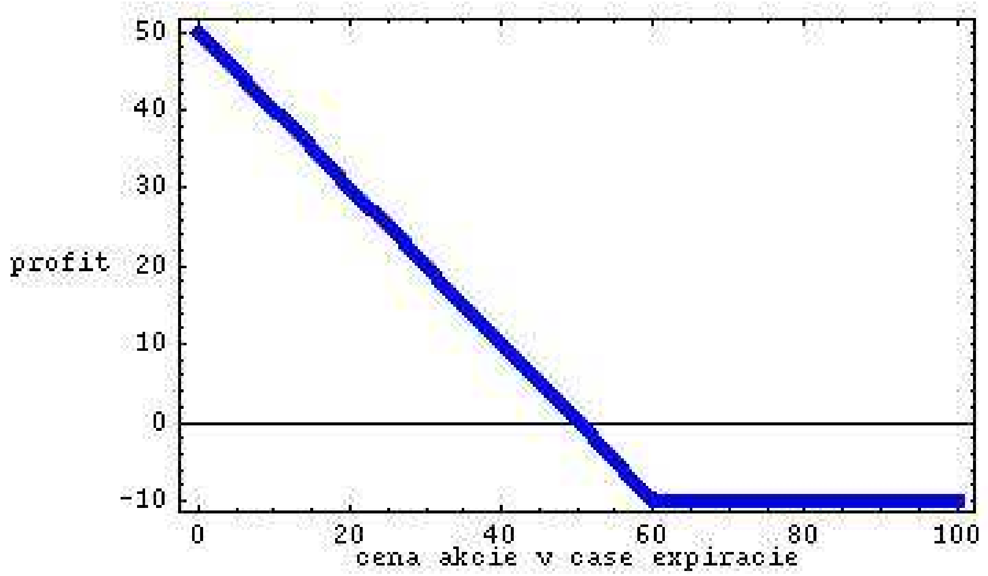
# *Profit diagram - príklad 1*

- Opcia na str. 16 - call opcia s expiračnou cenou 580 USD stála 11.50 USD.
- Profit diagram (pri $r = 0$):



# *Profit diagram - príklad 2*

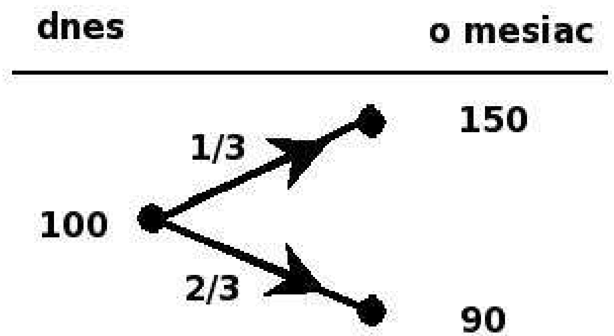
- Analyzujme nasledovný profit diagram put opcie (pri $r = 0$):



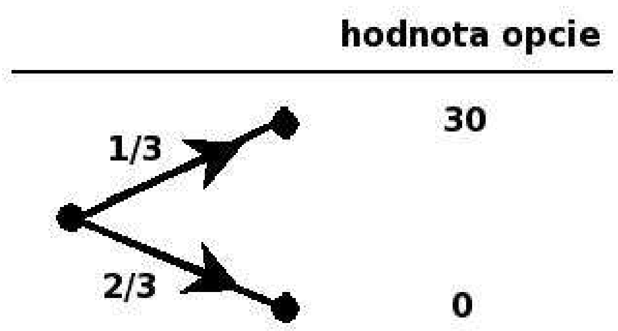

- Aká je expiračná cena opcie? Koľko táto opcia stála?
- Je možný zisk ohraničený? Ak áno, kedy je zisk maximálny? Ak nie, kedy neobmedzene rastie?
- Je možná strata ohraničená? Ak áno, kedy je strata maximálna? Ak nie, kedy neobmedzene rastie?

# *Oceňovanie opcií na akcie - príklad*

- Jednoduchý model pre cenu akcie:



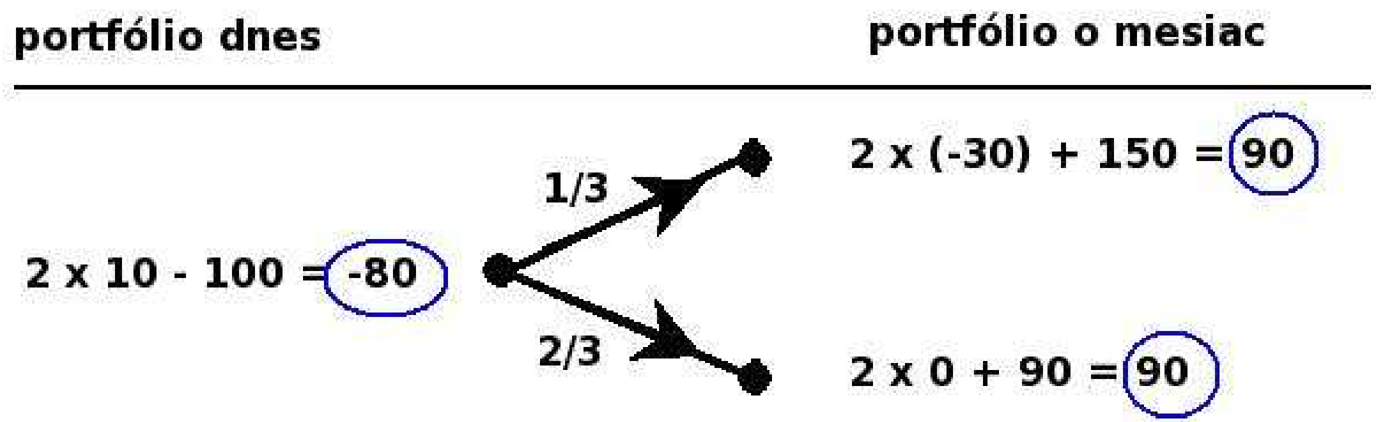

- Majme európsku call opciu s expiráciou o mesiac a s expiračnou cenou 120 USD. Hodnota opcie:




- Myšlienka: "cena opcie dnes = stredná hodnota ceny opcie v čase expirácie = 10 USD" - ukážeme, že vedie k možnosti bezrizikového zisku

# *Oceňovanie opcií na akcie - príklad*

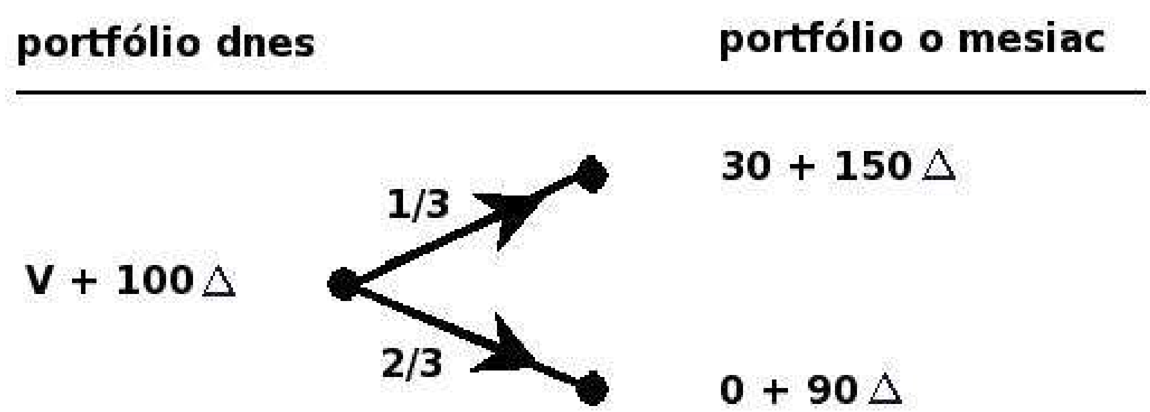
- Stratégia: vypíšeme 2 také opcie a kúpime 1 akciu
- Hodnota nášho portfólia:




- Istý zisk 10 USD - spor s tým, že na trhu nemôže byť arbitráž

# *Oceňovanie opcií na akcie - príklad*

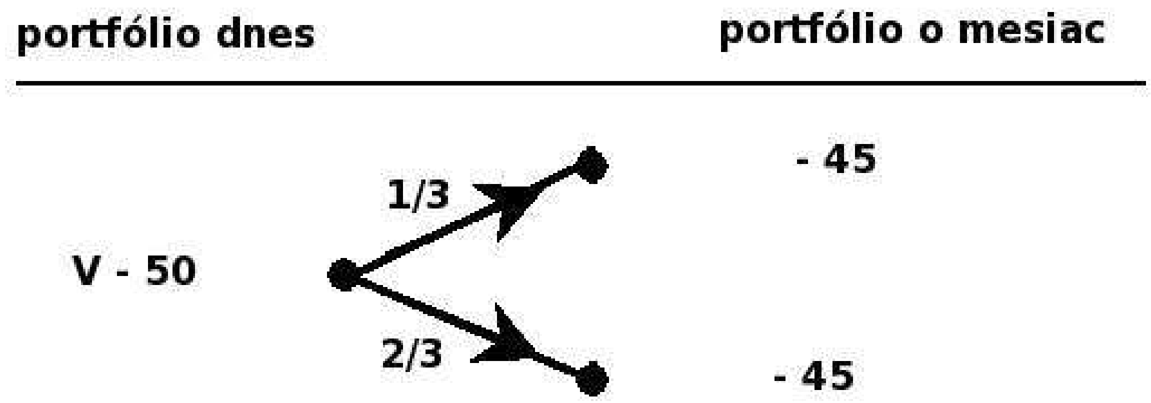
- Dobrý postup:
  - ◇ uvažujme portfólio zložené z 1 opcie a $\Delta$ akcíi
  - ◇ počet akcií $\Delta$ určíme tak, aby hodnota portfólia v čase expirácie bola nenáhodná
  - ◇ označme cenu opcie $V$
- Hodnota nášho portfólia:




- Má platiť $30 + 150\Delta = 90\Delta$, takže $\Delta = -1/2$

# *Oceňovanie opcií na akcie - príklad*

- Potom o mesiac máme -45 :




- Ak je úroková miera $r$, dnes musíme mať $-45e^{-r/12}$
- To znamená, že $V - 50 = -45e^{-r/12}$, a teda

$$V = 50 - 45e^{-r/12}$$

- Napríklad pre $r = 0.01$ (1 percento) je $V = 5.04$ USD
- DÚ: Nájdite arbitráž, ak by cena opcie bola 3 USD.

# *Oceňovanie opcií na akcie*

- Na rozdiel od forwardu, cena opcie v predchádzajúcom príklade závisí od možných cien akcie v čase expirácie (pri forwarde sme túto informáciu nepotrebovali)
- Čo pri zložitejšom modeli na vývoj ceny akcie?
- Neskôr budeme mať známy Black-Scholesov model, ktorý vedie k riešeniu parciálnej diferenciánej rovnice; myšlienka "portfólio z jednej opcie a $\Delta$ akcií, ktoré je nenáhodné" bude aj tam, pri odvodení PDR pre cenu opcie

# *Príklad*

- PRÍKLAD:
  - Predáme akciu za jej aktuálnu cenu 596.33 USD.
  - Ďalej predáme put opciu s expiračnou cenou 500 USD a expiráciou v januári 2013 - vidíme ponuku na kúpu (*bid price*) za 25.30 USD .
  - Koľko by ste boli ochotní zaplatiť za call opciu s rovnakou expiračnou cenou a rovnakým expiračným časom?

# Príklad

Dáta k príkladu (cena akcie zo 6. 2. 2012 + vývoj ceny počas posledného kvartálu):

**View options by expiration** Jan 19, 2013

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 990.00 | 3.20 | 0.00 | 0.90 | 1.60 |
| 1,000.00 | 1.05 | +0.10 | 0.90 | 1.20 |

Puts

| Strike | Price | Change | Bid | Ask |
|---|---|---|---|---|
| 240.00 | 1.00 | 0.00 | 0.80 | 1.10 |
| 250.00 | 1.00 | -0.15 | 1.00 | 1.25 |
| 260.00 | 2.40 | 0.00 | 1.05 | 1.70 |
| 495.00 | 24.30 | -1.80 | 23.80 | 24.80 |
| 500.00 | 25.55 | -2.05 | 25.30 | 25.90 |
| 505.00 | 28.90 | 0.00 | 26.50 | 27.60 |

http://finance.google.com

# Príklad

Dáta k príkladu (opcie zo 6. 2. 2012):


http://finance.google.com

# *Príklad*

- Russel Sage, New York, 19. storočie:
  - kúpil od zákazníka akciu a put, a predal mu call s rovnakou expiračnou cenou a expiračným časom
  - bol obvinený z úžery a dostal pokutu

- PRÍKLAD - POKRAČOVANIE:
  - Ukážeme, že ide vlastne o pôžičku.
  - Koľko a na aký úrok ste si (vašim výberom ceny call opcie) požičali?

# *Call-put parita*

- Uvažujme portfólio:
  - vypíšeme 1 call opciu s expiračnou cenou $E$
  - kúpime 1 put opciu s rovnakou expiračnou cenou a s rovnakým expiračným časom
  - kúpime 1 akciu
- Aká bude hodnota portfólia v čase expirácie opcií?

*portfólio = - 1 call + 1 put + 1 akcia*

$$\Rightarrow$$

*payoff = - [payoff callu] + [payoff putu] + [cena akcie]*

# *Call-put parita*

- Takže v závislosti od ceny akcie $S$ v čase expirácie:
  - ak $S \leq E$:

$$payoff = -[0] + [E - S] + [S] = E$$

  - ak $S \geq E$:

$$payoff = -[S - E] + [0] + [S] = E$$

  Teda určite budeme mať sumu $E$

- Hodnota portfólia dnes teda musí byť

$$-c(S, E, \tau) + p(S, E, \tau) + S = Ee^{-r\tau}$$

  - dostali sme vzťah medzi cenou call a put opcie, nazýva sa call-put parita

# *Ohraničenia na ceny opcií*

- Ukážeme si nejaké nerovnosti pre ceny, ktoré musia byť splnené - inak je na trhu arbitráž
- Všetky uvažované opcie majú rovnaký čas expirácie
- Úrokovú mieru označme $r$.
- Zaveďme označenie:
  - $c(S, E, \tau)$ je trhová cena call opcie s expiračnou cenou $E$, ak je dnešná cena akcie $S$ a čas zostávajúci do expirácie je $\tau$
  - $p(S, E, \tau)$ je trhová cena put opcie s expiračnou cenou $E$, ak je dnešná cena akcie $S$ a čas zostávajúci do expirácie je $\tau$

# *Ohraničenia na ceny opcií*

- Postup pri dokazovaní ohraničení na ceny:
  - zostavíme dve portfóliá - také, že v čase expirácie opcií platí: (hodnota portfólia I.) $\leq$ (hodnota portfólia II.)
  - Aby nebola na trhu arbitráž, aj dnes musí byť (hodnota portfólia I.) $\leq$ (hodnota portfólia II.); portfóliá zvolíme tak, aby toto bola nerovnosť, ktorú potrebujeme dokázať.

# *Ohraničenia na ceny opcií - príklady*

PRÍKLAD 1: Zrejme platí:

$$c(S,E,\tau) \geq 0, p(S,E,\tau) \geq 0$$

PRÍKLAD 2: Ukážte, že

$$E_1 \geq E_2 \Rightarrow c(S,E_1,\tau) \leq c(S,E_2,\tau)$$

RIEŠENIE: Nech $E_1 \geq E_2$ Majme dve portfóliá:

portfólio I.: opcia s expiračnou cenou $E_1$

portfólio II.: opcia s expiračnou cenou $E_2$

Porovnáme ich hodnotu v závislosti od ceny akcie $S$ v čase expirácie

# *Ohraničenia na ceny opcií - príklady*

| | $0 \leq S \leq E_2$ | $E_2 \leq S \leq E_1$ | $E_1 \leq S$ |
|---|---|---|---|
| portfólio I. | $0$ | $0$ | $S - E_1$ |
| portfólio II. | $0$ | $S - E_2$ | $S - E_2$ |
| porovnanie | $0 = 0$ | $0 \leq S - E_2$ | $S - E_1 \leq S - E_2$ |

V čase expirácie:

(hodnota portfólia I.) $\leq$ (hodnota portfólia II)

$\Rightarrow$ aj dnes:

(hodnota portfólia I.) $\leq$ (hodnota portfólia II.),

t.j.

$$c(S, E_1, \tau) \leq c(S, E_2, \tau)$$

# *Ohraničenia na ceny opcií - príklady*

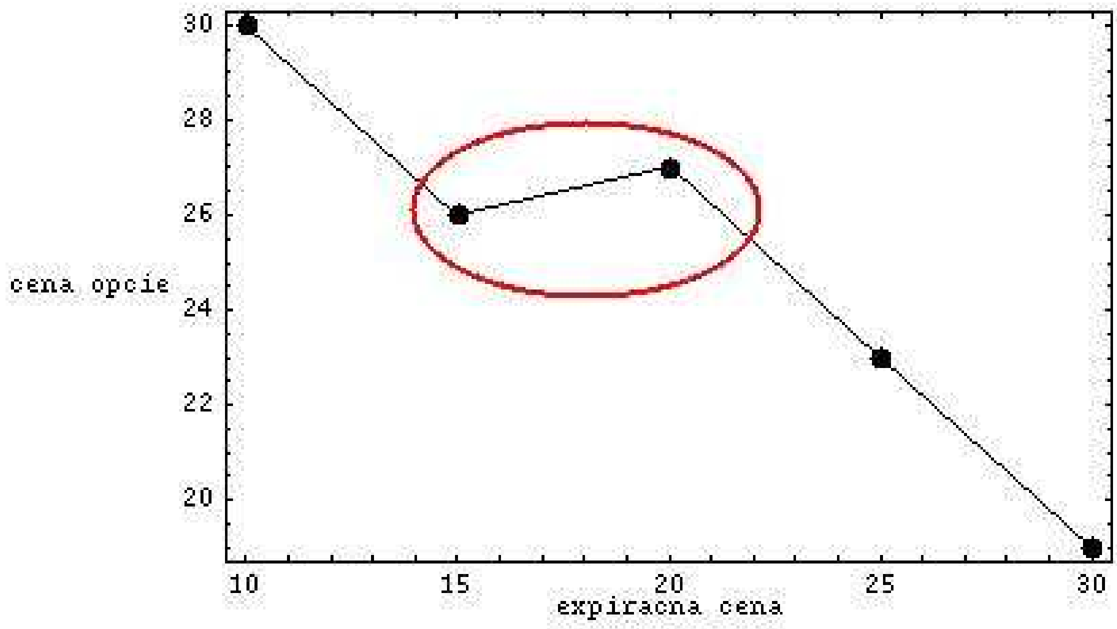
PRÍKLAD 3: Majme nulovú úrokovú mieru a nasledovné ceny call opcií:

| expiračná cena | cena opcie |
|---|---|
| 10 | 30 |
| 15 | 26 |
| 20 | 27 |
| 25 | 23 |
| 30 | 19 |

Nájdite arbitráž.

RIEŠENIE: Nakreslíme si závislosť ceny call opcie od expiračnej ceny - nie je splnená klesajúcosť dokázaná v predchádzajúcom príklade.

# *Ohraničenia na ceny opcií - príklady*




Podľa predchádzajúceho príkladu by malo platiť $c(S, 15, \tau) \geq c(S, 20, \tau)$, tu však $c(S, 15, \tau) < c(S, 20, \tau)$. Preto:

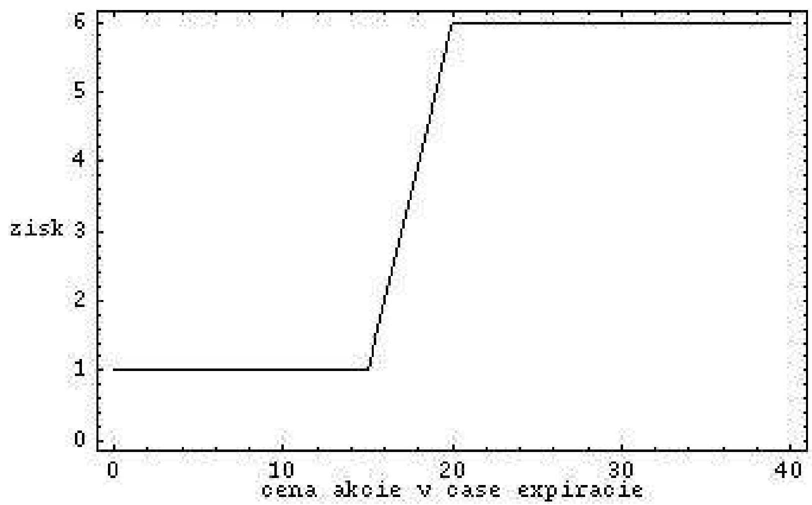
- kúpime to, čo je lacnejšie, ako by malo byť, v našom prípade opciu s $E = 15$
- predáme to, čo je drahšie, ako by malo byť, v našom prípade opciu s $E = 20$

# *Ohraničenia na ceny opcií - príklady*

- V Mathematice:

```
CallPayoff[s_, e_] := Max[s - e, 0];

naklady = 26 - 27;   (* kupim opciu za 26, predam inu za 27 *)
zisk[s_] := CallPayoff[s, 15] - CallPayoff[s, 20] - naklady;
Plot[zisk[s], {s, 0, 40}, Frame → True,
 FrameLabel → {"cena akcie v case expiracie", "zisk"},
 RotateLabel → False]
```




- Vidíme, že zisk je vždy kladný ⇒ táto stratégia je naozaj arbitráž

# *Ohraničenia na ceny opcií - príklady*

DÚ:

- Ukážte, že cena call opcie musí spĺňať nerovnosť

  $$S - Ee^{-r\tau} \leq c(S, E, \tau) \leq S$$

  *Návod k prvej nerovnosti: Ak je úroková miera $r$, tak mať dnes v čase $t = 0$ sumu $Ee^{-r\tau}$ znamená mať $E$ v čase $t = \tau$.*

- Uveďte konkrétny príklad cien opcií, ktoré nespĺňajú niektorú z týchto nerovností a zostrojte stratégiu, ktorá vedie k istému zisku.

# *Kombinované stratégie*

- V predchádzajúcom (teoretickom) príklade sme skombinovali opcie tak, aby sme dosuahli arbitráž
- Táto myšlienka kúpy alebo predaja viacerých opcií sa však dá použit' aj pri reálnych cenách - podl'a nášho očakávania o vývoji ceny akcie

PRÍKLAD:

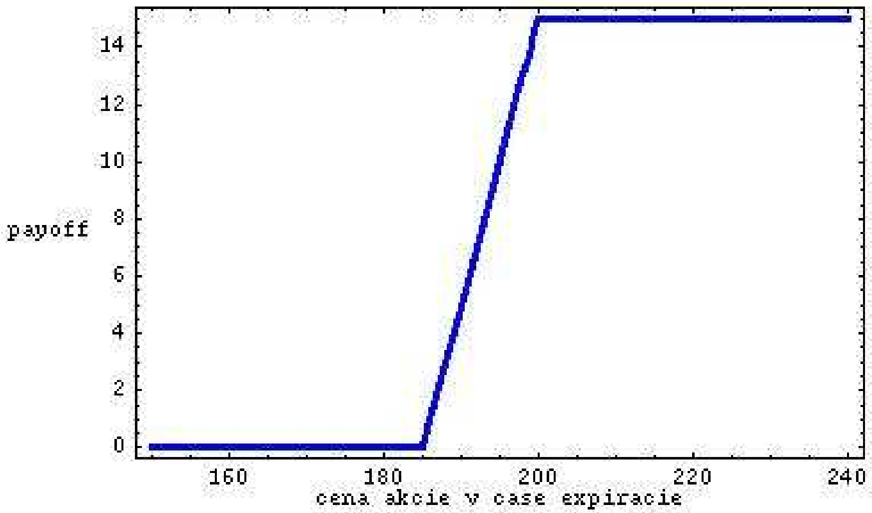
- Povedzme, že očakávame, že cena akcie bude rást' $\Rightarrow$ kúpime call opciu, napr. s expiračnou cenou 185 USD
- Nemyslíme si však, že vzrastie vel'mi prudko $\Rightarrow$ predáme call opciu s vyššou expiračnou cenou,napr. 200 USD
- Očakávame, že tento druhý call nebude uplatnený, ale jeho predajom si znížime náklady

# *Kombinované stratégie*

- Payoff:

```
payoff[s_] := CallPayoff[s, 185] - CallPayoff[s, 200];

Plot[payoff[s], {s, 150, 240}, Frame → True,
 FrameLabel → {"cena akcie v case expiracie", "payoff"},
 RotateLabel → False, PlotRange → All,
 PlotStyle → {Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



# *Kombinované stratégie*

- Reálne ceny opcií:

**Amazon.com, Inc. (AMZN)** - NasdaqGS

Add to Port

**184.10** ↑ 0.96 (0.52%) 9:57AM EST - Nasdaq Real Time Price

**Options**

**Get Options for:**

View By Expiration: Feb 12 | **Mar 12** | Apr 12 | Jul 12 | Jan 13 | Jan 14

**Call Options** — Expire at close Friday, March 16, 2012

| Strike | Symbol | Last | Chg | Bid | Ask | Vol | Open Int |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **100.00** | AMZN120317C00100000 | **84.46** | **0.00** | 81.65 | 85.05 | 1 | 16 |
| **115.00** | AMZN120317C00115000 | **71.58** | **0.00** | 67.90 | 69.30 | 6 | 6 |
| **120.00** | AMZN120317C00120000 | **66.26** | **0.00** | 63.10 | 63.95 | 12 | 12 |
| **180.00** | AMZN120317C00180000 | **9.60** | ↑ **0.50** | 9.15 | 9.40 | 79 | 1,604 |
| **185.00** | AMZN120317C00185000 | **6.90** | ↑ **0.30** | 6.50 | 6.65 | 89 | 1,574 |
| **190.00** | AMZN120317C00190000 | **4.80** | ↑ **0.20** | 4.45 | 4.60 | 100 | 3,030 |
| **195.00** | AMZN120317C00195000 | **3.10** | ↑ **0.05** | 3.00 | 3.10 | 184 | 2,454 |
| **200.00** | AMZN120317C00200000 | **2.05** | ↑ **0.12** | 2.00 | 2.05 | 20 | 2,548 |
| **205.00** | AMZN120317C00205000 | **1.18** | ↓ **0.03** | 1.17 | 1.24 | 20 | 1,869 |
| **210.00** | AMZN120317C00210000 | **0.70** | ↓ **0.03** | 0.71 | 0.76 | 1 | 2,371 |

# *Kombinované stratégie*

- Naša stratégia: "kúpime call s $E = 185$, predáme calll s $E = 200$"
- Bid a ask cena:

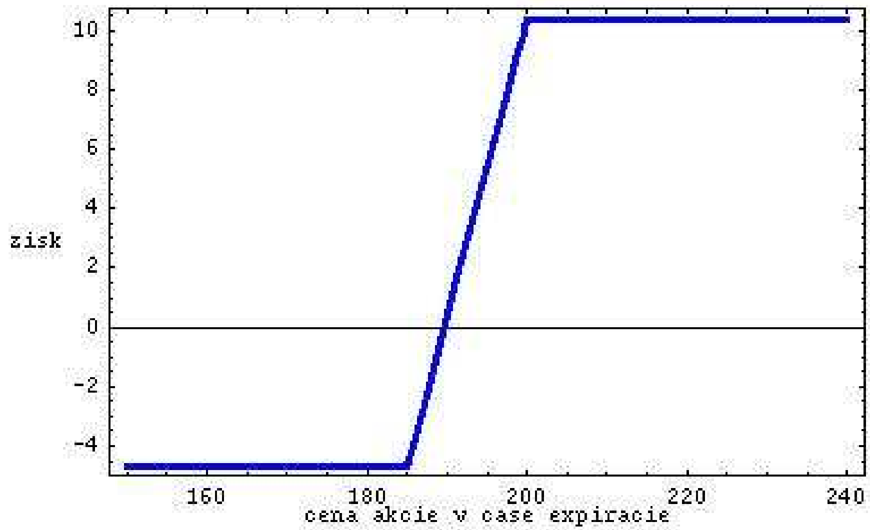
| Strike | Symbol | Last | Chg | Bid | Ask | Vol | Open Int |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **185.00** | AMZN120317C00185000 | **6.90** | ↑**0.30** | 6.50 | 6.65 | 89 | 1,574 |
| **190.00** | AMZN120317C00190000 | **4.80** | ↑**0.20** | 4.45 | 4.60 | 100 | 3,030 |
| **195.00** | AMZN120317C00195000 | **3.10** | ↑**0.05** | 3.00 | 3.10 | 184 | 2,454 |
| **200.00** | AMZN120317C00200000 | **2.05** | ↑**0.12** | 2.00 | 2.05 | 20 | 2,548 |

  - ◇ bid cena (tá nižšia) - ponuka na kúpu $\rightarrow$ ja môžem predať opciu za bid
  - ◇ ask cena (tá vyššia) - ponuka na predaj $\rightarrow$ ja môžem kúpiť opciu za ask
- Takže naše náklady sú 4.65:
  - ◇ kúpime call s $E = 185$ za 6.65
  - ◇ predáme calll s $E = 200$ za 2.00

# *Kombinované stratégie*

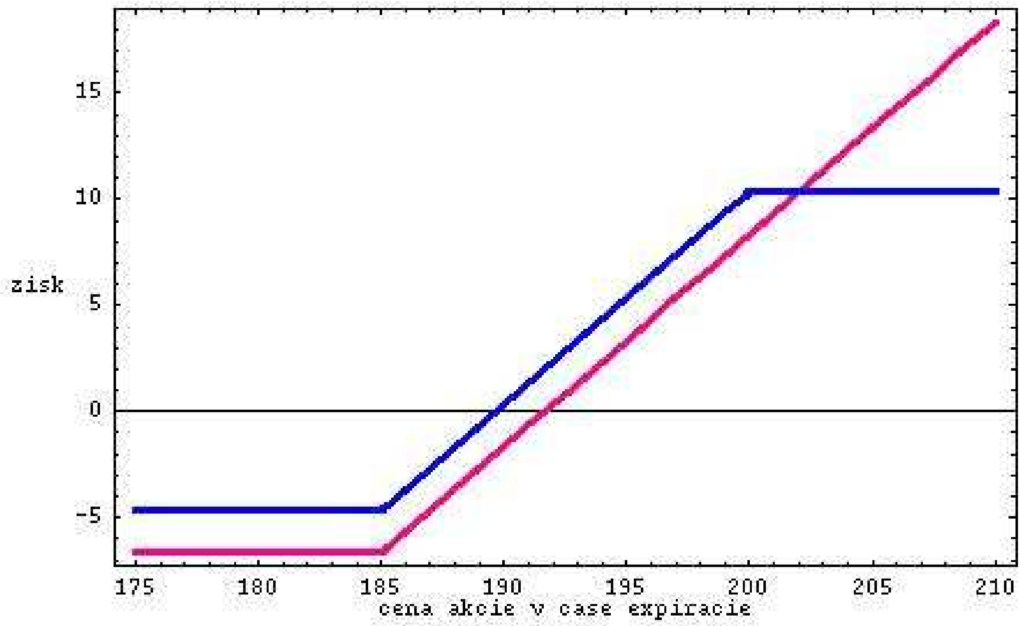
- Zisk - profit diagram:

```
Plot[payoff[s] - 4.65, {s, 150, 240}, Frame → True,
 FrameLabel → {"cena akcie v case expiracie", "zisk"},
 RotateLabel → False,
 PlotRange → All, PlotStyle → {Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



# *Kombinované stratégie*

- Porovnanie - ak by sme iba kúpili call s $E = 185$:




- Nájdite príklad kombinovanej stratǵie, ktorú má zmysel realizovať, ak očakávame pokles ceny akcie. Nakreslite jej payoff diagram.

# *Kombinované stratégie*

- Prehľad kombinovaných stratégií:
  - Ševčovič, Stehlíková, Mikula: **Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov**. STU 2009. - kapitola 2.3.3
  - http://www.theoptionsguide.com/option-trading-strategies.aspx
- Konštrukcia kombinovaných stratégií bude obsahom bonusovej úlohy