1 Úvod

Ak nie je povedané inak, pod opciou rozumieme európsku opciu.

1. Definujte európsku call opciu na akciu. V čom sa opcia líši od forwardu?
2. Odvoďte cenu forwardu na akciu? Závisí cena forwardu od predpokladu o vývoji ceny akcie? Závisí od tohto predpokladu cena opcie?
3. Definujte európsku call a put opciu. V čom je medzi nimi rozdiel?
4. Aký je rozdiel medzi európskym a americkým typom derivátov?
5. Čo je payoff derivátu? Ako vyzerá payoff call a put opcie - nakreslite grafy pre expiračnú cenu rovnú 100 USD a vysvetlite ich priebeh.
6. Vysvetlite spojité úrokovanie ako limitu úrokovania v diskrétnych časových intervaloch. Odvoďte vzťah pre hodnotu vkladu po t rokoch pri spojitej úrokovej miere r.
7. Nakreslite payoff a profit diagram nasledujúcich stratégií:
   (a) Kúpime call opciu s expiračnou cenou 100 USD a expiráciou o rok, ktorá stojí 10 USD.
   (b) Kúpime call opciu s expiračnou cenou 150 USD a put opciu s expiračnou cenou 80 USD, obe majú expiráciu o pol roka. Spolu stoja 25 USD.

   Predpokladajte, že úroková miera je jedno percento.
8. Uvažujme stratégie z predchádzajúceho príkladu.
   (a) Je zisk ohraničený? Ak áno, pre aké ceny akcie sa nadobúda? Ak nie, kedy rastie do nekonečna?
   (b) Je strata ohraničená? Ak áno, pre aké ceny akcie sa nadobúda? Ak nie, kedy rastie do nekonečna?
9. Dnešná cena akcie je 100 USD. O mesiac bude jej cena s pravdepodobnosťou 1/2 rovná 150 USD a pravdepodobnosťou 1/2 bude rovná 90 USD. Uvažujme call opciu na túto akciu s expiráciou o mesiac a s expiračnou cenou 100 USD. Úroková miera je nulová.
   (a) Nech cena opcie je 2 USD. Nájdite arbitráž, t.j. stratégiu, ktorá vedie k bezrizikovému zisku.
   (b) Nájdite cenu opcie, ktorá neumožňuje arbitráž.
10. Uvažujme call a put opciu s rovnakou expiračnou cenou. Ukážte, že *(payoff putu) - (payoff callu) + (cena akcie v čase expirácie)* sa erovná expiračnej cene, bez ohľadu na cenu akcie v čase expirácie. Čo z toho vyplýva pre rozdiel *(cena put opcie) - (cena call opcie)*, čomu sa musí rovnať?

11. Označme $c(S, E, \tau)$ cenu call opcie s expiračnou cenou E a časom τ zostávajúcim do expirácie, ak je dnes cena akcie rovná S. Nech $E_1 < E_2$, ukážte, že potom musí platiť $e^{-r\tau}(E_2 - E_1) \geq c(S, \tau, E_1) - c(S, \tau, E_2)$. Nájdite arbirtáž pre nasledovné ceny call opcií, ak je úroková miera nulová:

expiračná cena	cena opcie
110	50
120	35
130	30

2 Stochastické diferenciálne rovnice a modelovanie vývoja ceny akcie

V nasledujúcich príkladoch označuje $w(t)$ Wienerov proces. Pod výnosmi akcie budeme rozumieť $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right)$.

1. Definujte Wienerov proces, Brownov pohyb a geometrický Brownov pohyb.

2. Uvažujme proces $X(t) = x_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$. Vypočítajte jeho strednú hodnotu a disperziu v čase t.

3. Predpokladajme, že cena akcie sa vyvíja podľa geometrického Brownovho pohybu $S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$. Odvoďte pravdepodobnostné rozdelenie jej výnosov a ukážte, že sú nezávislé. Uveďte postup na odhadovanie parametrov modelu pre cenu akcie, ktorý využíva tieto vlastnosti.

4. Cenu akcie modelujeme pomocou geometrického Brownovho pohybu $S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$. Priemer denných výnosov akcie je 0.0015 a ich štandardná odchýlka je 0.02. Odhadnite parametre geometrického Brownovho pohybu, ak uvažujeme 252 pracovných dní v roku.

5. Predpokladajme, že cena akcie sa vyvíja podľa geometrického Brownovho pohybu $S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$ s parametrami $\mu = 0.25$, $\sigma = 0.35$. Nájdite strednú hodnotu ročného výnosu.

6. Uvažujme model pre cenu akcie v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice $dS = \mu S dt + \sigma S dw$. Vyjadrite cenu akcie v explicitnom tvare $S(t) = \ldots$, ak $S(0) = S_0$.

7. Uvažujme model pre cenu akcie v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice $dS = \mu S dt + \sigma S dw$ s parametrami $\mu = 0.20$, $\sigma = 0.30$. Nájdite strednú hodnotu ceny akcie v čase t.

3 Black-Scholesov model: odvodenie a riešenie

Pod cenou derivátu rozumieme cenu v Black-Scholesovom modeli. Ak nie je povedané inak, uvažujeme európske opcie na akcie nevyplácajúce dividendy.

1. Odvoďte Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu akcie

   (a) Black-Scholesovym prístupom pre akciu nevyplácajúcu dividendy

   (b) Black-Scholesovym prístupom pre akciu vyplácajúcu dividendy so spojitou dividendovou mierou q

(c) Mertonovym prístupom pre akciu nevyplácajúcu dividendy

(d) Mertonovym prístupom pre akciu vyplácajúcu dividendy so spojitou dividendovou mierou q

Ako vyzerá koncová podmienka pre call opciu?

2. Transformujte Black-Scholesovu PDR pre cenu put opcie

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad S \in (0, \infty), t \in [0, T]$$

s koncovou podmienkou $V(S,T) = \max(0, E - S)$ pre $S \in (0, \infty)$ na rovnicu vedenia tepla so zadanou začiatočnou podmienkou.

3. Nájdite riešenie Black-Scholesovej rovnice

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad S \in (0, \infty), t \in [0, T]$$

pre nasledujúce koncové podmienky:

(a) $V(S,T) = S$ pre $S \in (0, \infty)$

(b) $V(S,T) = c$ pre $S \in (0, \infty)$, kde c je daná konštanta

Napíšte riešenie a dosadením dokážte, že je to naozaj riešenie.

4. Nájdite riešenie Black-Scholesovej rovnice v prípade akcie s dividendami

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad S \in (0, \infty), t \in [0, T]$$

pre nasledujúce koncové podmienky:

(a) $V(S,T) = S$ pre $S \in (0, \infty)$

(b) $V(S,T) = c$ pre $S \in (0, \infty)$, kde c je daná konštanta

Napíšte riešenie a dosadením dokážte, že je to naozaj riešenie.

5. Odvoďte cenu put opcie, ak je známe riešenie pre cenu call opcie (v prípade akcie s dividendami aj bez dividend).

6. Vypočítajte cenu derivátu, ktorý v čase expirácie vyplatí 1 USD, ak bude cena akcie v čase expirácie väčšia ako E, inak nevyplatí nič.
<u>Návod:</u> Transformácia na RVT je rovnaká ako v prípade call opcie (uvedomte si, prečo):
$Z(x,\tau) = V(S,t)$, kde $x = \ln(S/E) \in \mathbb{R}$, $\tau = T - t \in [0, T]$
$u(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} Z(x,\tau)$, pričom $\alpha = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r^2}{2\sigma^2}$
Rovnica pre funkciu u potom je $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pre $x \in \mathbb{R}$ a $\tau \in [0, T]$

4 Black-Scholesov model: implikovaná volatilita

Pod cenou derivátu rozumieme cenu z Black-Scholesovho modelu. Ak nie je povedané inak, uvažujeme európske opcie na akcie nevyplácajúce dividendy.

1. Vysvetlite pojem implikovanej volatility.
2. Dokážte, že cena call opcie je rastúcou funkciou volatility. Vypočítajte jej limitu pre $\sigma \to 0^+$ a pre $\sigma \to \infty$. Čo z toho vyplýva pre existenciu implikovanej volatility?
3. Dokážte, že cena put opcie je rastúcou funkciou volatility. Vypočítajte jej limitu pre $\sigma \to 0^+$ a pre $\sigma \to \infty$. Čo z toho vyplýva pre existenciu implikovanej volatility?
4. Uvažujme akciu vyplácajúce dividendy. Ako sa zmenia riešenia predchádzajúcich dvoch úloh?
5. Uveďte príklad parametrov, pre ktoré implikovaná volatilita neexistuje.
6. Čo označuje pojem *volatility smile*?
7. Po dosadení historickej volatility (odhadnutej z výnosov akcií) do Black-Scholesovho vzorca dostaneme nižšiu cenu call opcie, ako je jej reálna trhová cena. Aká bude implikovaná volatilita - vyššia alebo nižšia ako historická volatilita? (Môžete predpokladať, že implikovaná volatilita existuje.) Prečo?
8. Uvažujme call opciu na s expiračnou cenou 15 USD, ak dnešná cena akcie je 9 USD. Pre ktoré z nasledujúcich cien opcie – 2 USD, 5 USD, 7 USD, 10 USD, 15 USD – existuje implikovaná volatilita, ak je úroková miera nulová? Pre ktorú z nich je implikovaná volatilita najvyššia? Ako sa dá táto otázka zodpovedať bez výpočtu všetkých implikovaných volatilít?