1 Lelandov model

1. Ako sa v Lelandovom modeli modelujú transakčné náklady? Odvoďte PDR pre bid a ask cenu derivátov.

2. Vyriešte PDR pre cenu derivátu v Lelandovom modeli v prípade európskej call a put opcie.

3. Predpokladajme, že rozdiel medzi ask a bid cenou akcie je pol percenta ich priemernej hodnoty. Volatilita akcie je 0,35. Pre aké časy medzi dvomi zmenami portfólia je Lelandovo číslo medzi 0 a 1? Kde potrebujeme splnenie tejto podmienky a prečo?

4. Vysvetlite, ako sa dá v Lelandovom modeli vypočítať implikovaná volatilita a implikovaný čas medzi dvomi zmenami portfólia, ak máme dané:

   - bid a ask cenu akcie,
   - bid a ask cenu opcie,
   - parametre opcie: expiračnú cenu a čas zostávajúci do expirácie,
   - úrokovú mieru.

2 Numerické oceňovanie európskych derivátov

1. Transformujte Black-Scholesovu rovnicu na rovnicu vedenia tepla

   (a) v prípade, že akcia nevypláca dividendy,

   (b) v prípade, že akcia vypláca dividendy so spojitou dividendovou mierou q.

   Aká diskretizácia tejto rovnice vedenia tepla vedie k implicitnej a aká k expilicitnej numerickej schéme.

2. Pri numerickom riešení rovnice vedenia tepla uvažujeme priestorovú premennú x na ohraničenom intervale $[-L, L]$.

   (a) Ak riešime RVT na ohraničenom intervale, potrebujeme dodať okrajové podmienky. Uveďte okrajové podmienky pre call a put opciu pre $S \sim 0$ a $S \sim \infty$. Ako sa tieto podmienky transformujú na okrajové podmienky pre RVT?

   (b) Ak $L = 2$ a expiračná cena opcie je 100 USD, aké hodnoty ceny akcie považujeme za veľmi malé ($S \sim 0$) a aké za veľmi veľké ($S \sim \infty$) pri zadávaní okrajových podmienok?

3. Čo je CLF podmienka a ako súvisí s numerickým oceňovaním opcií? Čo sa stane, ak nie je splnená?

4. Odvoďte sústavu lineárnych rovníc, ktorú riešime pri implicitnej numerickej schéme. Stručne vysvetlite princíp SOR metódy, ktorú sme používali na riešenie tejto sústavy. Čo vieme povedať o jej konvergencii?

3 Americké deriváty a ich numerické oceňovanie

1. Aký je rozdiel medzi európskou a americkou opciou?
2. Uveďte konkrétny číselný príklad, ukazujúci, že ak cena americkej opcie je pod payoffom, vytvára to možnosť bezrizikového zisku.
3. Ukážte, že graf call opcie na akciu s dividendami a graf ľubovoľnej put opcie pretne payoff. Čo z toho vyplýva pre oceňovanie amerických opcií?
4. Sformulujte úlohu oceňovania americkej call opcie ako PDR s voľnou hranicou.
5. Interpretujte finančne voľnú hranicu amerických opcií - ako súvisí s uplatnením, resp. neuplatnením opcie v danom čase?
6. Dokážte, že voľná hranica call opcie $S_f(t)$ spĺňa nerovnosť $S_f(t) \geq \frac{r}{q}E$, kde r je úroková miera, q je dividendová miera a E je expiračná cena opcie.
7. Transformujte úlohu oceňovania americkej call opcie v tvare PDR s voľnou hranicou na úlohu lineárnej komplementarity.
8. Diskretizujte úlohu oceňovania americkej call opcie v tvare lineárnej komplementarity a sformulujte PSOR algoritmus na jej riešenie.
9. Ukážte, že limita PSOR iterácií je riešením diskretizovanej úlohy komplementarity.

Poznámky:

- Netreba sa učiť naspamäť Black-Scholesovu rovnicu, jej riešenie, konštanty vznikajúce pri transformáciách, atď. - ak úloha nebude spočítať v odvodení, ale v ich využití, budú v zadaní uvedené.
- Pozrite si aj úlohy, ktoré boli v prednáškach označené ako DÚ.
- Dôkazy, na ktoré bola na prednáške iba uvedená referencia (bez toho, že by to bolo explicitne dané ako DÚ), na skúške nebudú.