

1. (20 bodov) Dnešná cena akcie je 120 USD. O pol roka bude jej cena s pravdepodobnosťou 0,5 rovná 150 USD a s pravdepodobnosťou 0,5 bude rovná 90 USD. Úroková miera je nulová. Nájdite cenu európskej call opcie s expiračnou cenou 100 USD a expiráciou o pol roka.
2. (25 bodov) Odvodte Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu na oceňovanie európskeho derivátu, ak sa cena akcie S riadi geometrickým Brownovým pohybom $dS = \mu S dt + \sigma S dw$ a úroková miera je r .

Pri odvodení je potrebná Itóova lema:

Ak x vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici $dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw$ a $f = f(t, x)$ je daná funkcia, tak

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw$$

3. (15 bodov) Po dosadení historickej volatility (odhadnutej z výnosov akcií) do Black-Scholesovho vzorca dostaneme nižšiu cenu put opcie, ako je jej reálna trhová cena. Aká bude implikovaná volatilita - vyššia alebo nižšia ako historická volatilita? (Môžete predpokladať, že implikovaná volatilita existuje.) Prečo?
4. (25 bodov) Pri numerickom riešení Black-Scholesovej rovnice sa táto rovnica najskôr transformuje na rovnicu vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

so začiatočnou podmienkou a s okrajovými podmienkami v závislosti od typu derivátu. Odvodte explicitnú schému na riešenie tejto rovnice. Kedy táto schéma konverguje?

5. (15 bodov) Nakreslite payoff nasledovnej stratégie: kúpa call opcie s expiračnou cenou 100 USD a predaj call opcie s expiračnou cenou 140 USD. Označte osi grafu a vyznačte dôležité hodnoty na oboch osiach.