

Black-Scholesov model: odvodenie a riešenie

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

Obsah

- Black-Scholesov model:
 - Predpokadáme, že cena akcie S riadi geometrickým Brownovým pohybom

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

+ ďalšie predpoklady (o chvíľu)

- Odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu
- Dva spôsoby odvodenia:
 - podľa Blacka a Scholesa
 - podľa Mertona
- Explicitné riešenie pre európsku call a put opciu

Predpoklady

- Ďalšie predpoklady (okrem GBP):
 - konštantná bezriziková úroková miera r
 - žiadne transakčné náklady
 - dajú sa kupovať/predávať ľubovoľné (aj neceločíselné) počty akcií; rovnako hotovosť
 - žiadne obmedzenia na krátke pozície (*short selling*)
 - opcia je európskeho typu
- Uvažujme najprv akciu nevyplácajúcu dividendy

Odvođenje I. - podľa Blacka a Scholesa

- Označenie:
 S = cena akcie, t = čas
 $V = V(S, t)$ = cena opcie
- Portfólio: 1 opcia, δ akcií
 P = hodnota portfólia: $P = V + \delta S$
- Zmena hodnoty portfólia: $dP = dV + \delta dS$
- Podľa predpokladu: $dS = \mu S dt + \sigma S dw$, z Itóovej lemy:
 $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw$
- Teda:

$$\begin{aligned} dP = & \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S \right) dt \\ & + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \delta \sigma S \right) dw \end{aligned}$$

Odvođenje I. - podľa Blacka a Scholesa

- Eliminujeme náhodnosť: $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$
- Nenáhodné portfólio $\Rightarrow$ jeho hodnota musí byť taká, ako by sme dosiahli uložením do banky na úrok r : $dP = rPdt$
- Dáme do rovnosti získané dva vzťahy pre dP a dosadíme $P = V + \delta S$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Zahrnutie dividend do modelu

- Uvažujeme **spojitú dividendovú mieru** q - držaním akcie v hodnote S získame za čas dt dividendový podiel $qSdt$
- V takomto prípade sa zmena hodnoty portfólia rovná $dP = dV + \delta dS + \delta qSdt$
- Ďalej postupujeme rovnako; dostaneme

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Odvodenie podľa Mertona - motivácia

- Problém s predchádzajúcim odvodením:
 - máme portfólio pozostávajúce z 1 opcie a δ akcií
 - počítame hodnotu a zmenu hodnoty portfólia:

$$\begin{aligned}P &= V + \delta S \\dP &= dV + \delta dS\end{aligned}$$

teda δ považujeme za konštantu

- výjde nám však $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$

Odvođenje II. - podľa Mertona

- Portfólio pozostávajúce z opcií, akcií a hotovosti s vlastnosťami:
 - v každom čase má nulovú hodnotu
 - je samofinancované - neprináša výnos ani nevyžaduje dodatočné investície

- Označenie:

Q_S = počet akcií, každá má hodnotu S

Q_V = počet opcií, každá má hodnotu V

B = hotovosť na účte, peniaze spojitou úročené úrokovou mierou r

dQ_S = zmena v počte akcií

dQ_V = zmena v počte opcií

δB = zmena hotovosti spôsobená kúpou/predajom akcií a opcií

Odvođenje II. - podľa Mertona

- Matematický zápis požiadaviek na portfólio:
 - nulová hodnota: $S Q_S + V Q_V + B = 0$ (1)
 - samofinancovanosť: $S dQ_S + V dQ_V + \delta B = 0$ (2)
- Zmena hotovosti: $dB = rB dt + \delta B$
- Zdiferencujeme vzťah (1):

$$\begin{aligned} 0 &= d(SQ_S + VQ_V + B) = d(SQ_S + VQ_V) + \overbrace{dB}^{rB dt + \delta B} \\ &= \overbrace{SdQ_S + VdQ_V + \delta B}^{=0} + Q_S dS + Q_V dV + rB dt \\ 0 &= Q_S dS + Q_V dV - \overbrace{r(SQ_S + VQ_V)}^{rB} dt. \end{aligned}$$

Odvođenje II. - podľa Mertona

- Vydelíme Q_V a označíme $\Delta = -\frac{Q_S}{Q_V}$:
 $dV - rV dt - \Delta(dS - rS dt) = 0$
- Dosadíme dS z predpokladu o geometrickom Brownovom pohybe a dV z Itóovej lemy
- Zvolíme Δ (t. j. pomer počtu akcií a opcií) tak, aby sme eliminovali náhodnosť (aby sa vynuloval člen pri dw)
- Dostaneme rovnakú PDR ako predtým:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Dividendy v Mertonovom odvodení

- Uvažujeme spojitú dividendovú mieru q .
- Dividendy predstavujú príjem hotovosti $\Rightarrow$ zmena hotovosti bude $dB = rB dt + \delta B + qSQ_S dt$
- Rovnakým postupom sa potom dopracujeme k PDR

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Black-Scholesova PDR - zhrnutie

- Matematická formulácia modelu:
Nájsť riešenie $V(S, t)$ parciálnej diferenciálnej rovnice (tzv. Black-Scholesovej rovnice)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

ktorá je definovaná pre $S > 0, t \in [0, T]$.

- Zatiaľ sme nevyužili, že ide o opciu $\Rightarrow$ PDR platí pre ľubovoľný derivát, ktorý vypláca v čase T výplatu závislú od ceny akcie v tom čase
- Typ derivátu určuje koncovú podmienku v čase T
- Napríklad pre call opciu: $V(S, T) = \max(0, S - E)$
- Vo všeobecnosti: $V(S, T) = \text{payoff derivátu}$

Riešenie pre call opciu

ZADANIE ÚLOHY

- Parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

ktorá je definovaná pre $S > 0, t \in [0, T]$.

- Koncová podmienka:

$$V(S, T) = \max(0, S - E)$$

pre $S > 0$

Riešenie pre call opciu

KROK 1:

- Transformácia $x = \ln(S/E) \in \mathbb{R}$, $\tau = T - t \in [0, T]$ a nová funkcia $Z(x, \tau) = V(Ee^x, T - \tau)$
- PDR pre $Z(x, \tau)$, $x \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, T]$:

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) \frac{\partial Z}{\partial x} + rZ = 0,$$

$$Z(x, 0) = \max(Ee^x - E, 0)$$

KROK 2:

- Transformácia na rovnicu vedenia tepla
- Nová funkcia $u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} Z(x, \tau)$, pričom konštanty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sa určia tak, aby rovnica pre u bola RVT

Riešenie pre call opciu

- Rovnica pre u :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \frac{\partial u}{\partial x} + Bu = 0,$$

$$u(x, 0) = Ee^{\alpha x} \max(e^x - 1, 0),$$

kde

$$A = \alpha\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2} - r, \quad B = (1 + \alpha)r - \beta - \frac{\alpha^2\sigma^2 + \alpha\sigma^2}{2}.$$

- Aby bolo $A = B = 0$, zvolíme

$$\alpha = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r^2}{2\sigma^2}$$

Riešenie pre call opciu

KROK 3:

- Riešenie $u(x, \tau)$ začiatočnej úlohy $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ je dané Greenovým vzorcom

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} u(s, 0) ds .$$

- Dosadíme, spravíme spätné transformácie $u(x, \tau) \rightarrow Z(x, \tau) \rightarrow V(S, t)$ a vypočítame integrál

Riešenie pre call opciu

VÝSLEDOK:

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

kde $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$ je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia $N(0, 1)$ a

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

Riešenie pre call opciu

DÚ:

Vyriešte Black-Scholesovu rovnicu pre call opciu na akciu vyplácajúcu dividendy a upravte riešenie do tvaru

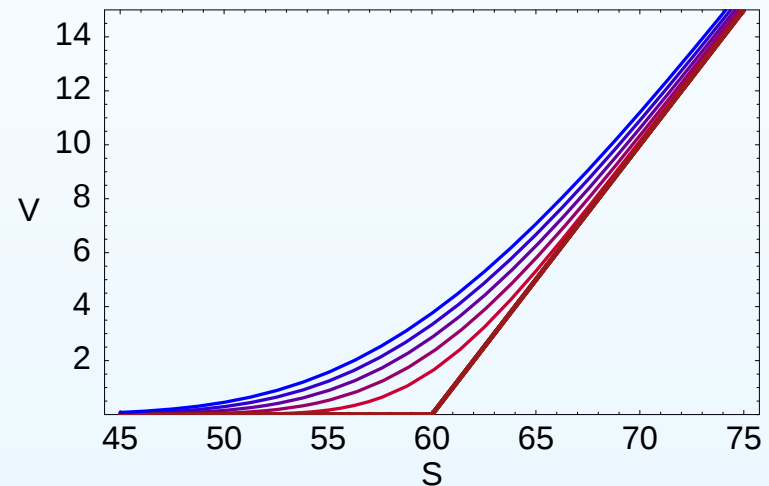
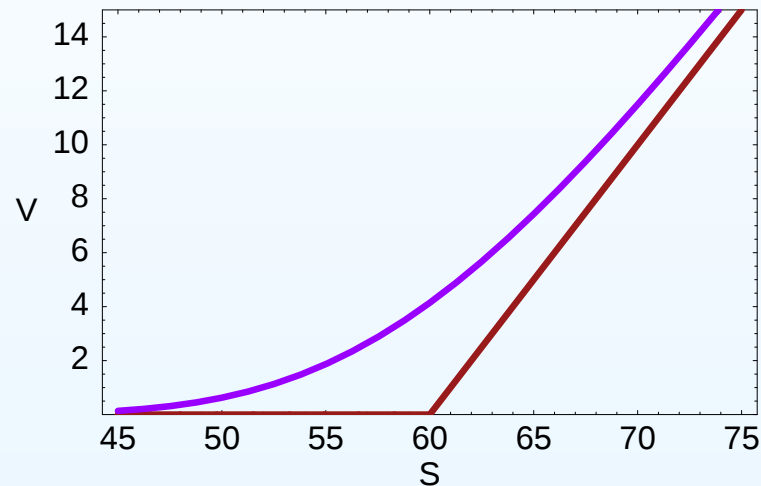
$$V(S, t) = Se^{-q(T-t)} N(d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(d_2),$$

kde $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$ je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia $N(0, 1)$ a

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

Call opcia - ukážka riešenia

Payoff (t. j. koncová podmienka v čase $t = T$) a riešenie $V(S, t)$ v niekoľkých časoch t :



Riešenie pre put opciu

ZADANIE ÚLOHY

- Parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

ktorá je definovaná pre $S > 0, t \in [0, T]$.

- Koncová podmienka:

$$V(S, T) = \max(0, E - S)$$

pre $S > 0$

Riešenie pre put opciu

Možnosť I.

- Rovnaká postupnosť transformácií ako v prípade call opcie

Možnosť II.

- Využijeme linearitu Black- Scholesovej PDR a už nájdené riešenie pre call opciu

Ukážeme si druhú možnosť nájdenia riešenia

Riešenie pre put opciu

- Pripomeňem si, že pre payoff callu a putu platí:

$$-[\textit{payoff callu}] + [\textit{payoff putu}] + [\textit{cena akcie}] = E$$

- Teda:

$$[\textit{payoff putu}] = [\textit{payoff callu}] - S + E$$

- Black-Scholesova rovnica je lineárna: lineárna kombinácia riešení je znovu riešením

- Ako oceniť deriváty s nasledujúcimi payoffmi:

- $V(S, T) = S \rightarrow$ je to vlastne akcia $\rightarrow V(S, t) = S$

- $V(S, T) = E \rightarrow$ s istotou dostaneme sumu $E \rightarrow$
 $V(S, t) = Ee^{-r(T-t)}$

- dosadením do PDR sa presvedčíme, že sú to naozaj riešenia

Riešenie pre put opciu

- Máme teda:

koncová podmienka	riešenie
$\max(0, S - E)$	$V^{call}(S, t)$
S	S
E	$Ee^{-r(T-t)}$

- Z lineárnosti:

koncová podmienka	riešenie
$\max(0, S - E) - S + E$	$V^{call}(S, t) - S + Ee^{-r(T-t)}$

- Keďže $[payoff\ putu] = \max(0, S - E) - S + E$, tak

$$V^{put}(S, t) = V^{call}(S, t) - S + Ee^{-r(T-t)}$$

Riešenie pre put opciu

- Nájdene riešenie

$$V^{put}(S, t) = V^{call}(S, t) - S + Ee^{-r(T-t)}$$

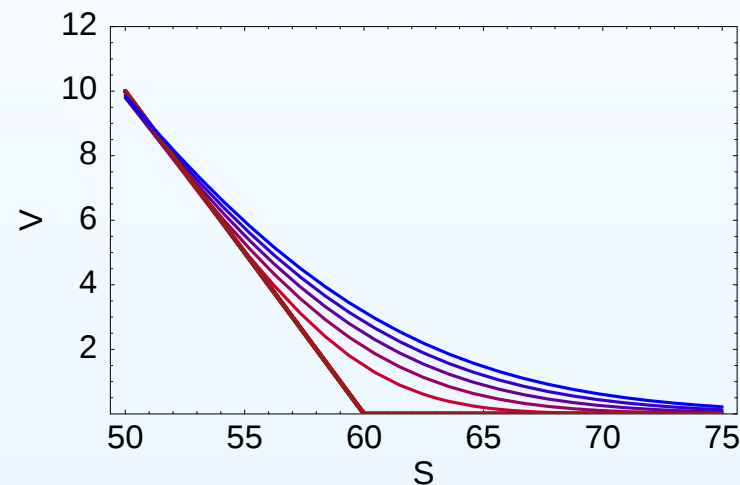
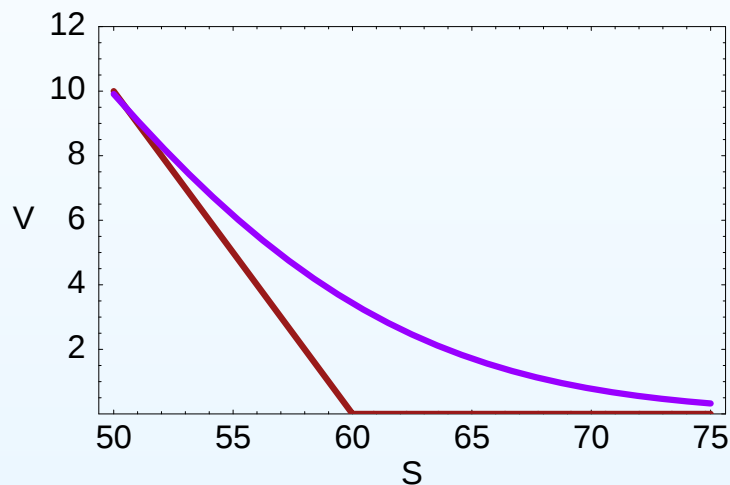
sa dá zapísať do podobného tvaru ako riešenie pre call opciu:

$$V^{ep}(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1),$$

kde $N(\cdot)$, d_1 , d_2 sú definované rovnako ako v prípade call opcie

Put opcia - ukážka riešenia

Payoff (t. j. koncová podmienka v čase $t = T$) a riešenie $V(S, t)$ v niekoľkých časoch t :



Riešenie pre put opciu

DÚ:

Vyriešte Black-Scholesovu rovnicu pre put opciu na akciu vyplácajúcu dividendy.

NÁVOD: Ako sa zmení riešenie rovnice pre koncovú podmienku $V(S, T) = S$?

Kombinované stratégie

- Z linearity Black-Scholesovej rovnice: ak je payoff stratégie lineárnou kombináciou call a put opcií, tak jej cena je takou istou lineárnou kombináciou cien call a put opcií
- Neplatí to v každom modeli:
 - predstavme si model s nejakými transakčnými nákladmi; nie je jedno, či
 - hedžujem samostatne jednotlivé opcie
 - hedžujem portfólio - transakčné náklady sa môžu znížiť

Kombinované stratégie

PRÍKLAD:

- kúpime call opciu s expiračnou cenou E_1, E_3 a predáme dve call opcie s expiračnou cenou E_2 , pričom $E_1 < E_2 < E_3$ a $E_1 + E_3 = 2E_2$.
- Payoff stratégie sa dá vyjadriť ako
$$V(S, T) = \max(S - E_1, 0) - 2 \max(S - E_2, 0) + \max(S - E_3, 0)$$
- Takže riešenie je:
$$V(S, t) = V^{call}(S, t; E_1) - 2V^{call}(S, t; E_2) + V^{call}(S, t; E_3)$$

Kombinované stratégie

- Numerická ukážka riešenia:

