Black-Scholesov model: implikovaná volatilita

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- 21.2.2013, posledné dáta pred zatvorením burzy
- Call opcia firmy Google - aká by bolo cena týchto opcií v Black- Scholesovom modeli?

GOOG Mar 2013 795.000 call (GOOG130316C00795000) - OPR

15.00 ↑ 0.80 (5.63%) Feb 21

Prev Close:	14.20	Day's Range:	13.47 - 20.90
Open:	17.00	Contract Range:	N/A - N/A
Bid:	N/A	Volume:	563
Ask:	N/A	Open Interest:	1,214
Strike:	795.00		
Expire Date:	15-Mar-13		

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Pripomeňme si Black-Scholesov vzorec pre call opciu:

$$V(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

kde $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi$ je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$ a

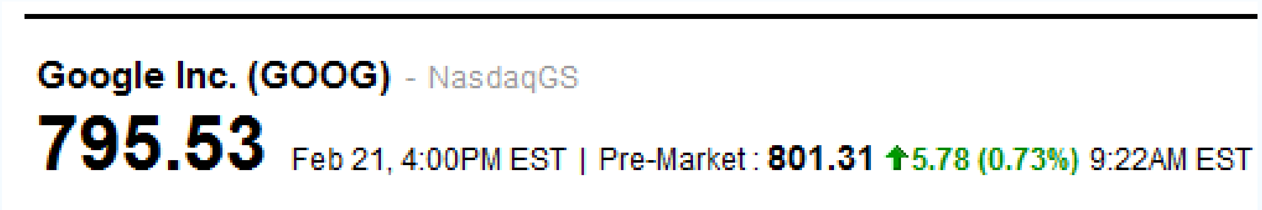
$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Potrebujeme teda nasledujúce hodnoty:
  - S = cena akcie
  - E = expiračná cena
  - $T - t$ = čas zostávajúci do expirácie
  - σ = volatilita akcie
  - r = úroková miera

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Cena akcie:



- Teda: $S = 795.53$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Expiračná cena opcie:

GOOG Mar 2013 795.000 call (GOOG130316C00795000) - OPR

15.00 ↑0.80 (5.63%) Feb 21

Prev Close:	14.20	Day's Range:	13.47 - 20.90
Open:	17.00	Contract Range:	N/A - N/A
Bid:	N/A	Volume:	563
Ask:	N/A	Open Interest:	1,214
Strike:	795.00		
Expire Date:	15-Mar-13		

- Teda : $E = 795$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Čas zostávajúci do expirácie:

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	1	2	3	4	5	6

- Expirácia je o 16 pracovných dní
- Čas má byť v modeli zadaný v rokoch, uvažujme 252 pracovýných dní v roku $\rightarrow T - t = 16/252$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Volatilita akcie: odhadneme historickú volatilitu z denných dát z roku 2012:

```
->sigma=sqrt(sigma2Delta/dt)
sigma  =


   0.2301730
```

- Teda: $\sigma = 0.23$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Úroková miera (bonds.yahoo.com):

US Treasury Bonds Rates

Maturity	Yield	Yesterday	Last Week	Last Month
3 Month	0.09	0.09	0.08	0.04
6 Month	0.11	0.11	0.11	0.08
2 Year	0.25	0.25	0.26	0.23
3 Year	0.39	0.39	0.41	0.36
5 Year	0.83	0.84	0.86	0.74
10 Year	1.97	1.98	2.00	1.82
30 Year	3.18	3.18	3.19	3.02

- Dosť štandardnou voľbou sú trojmesačné dlhopisy.
- Úroková miera má byť daná ako desatinné číslo, takže: $r = 0.09/100$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Môžeme teda dosadiť tieto hodnoty do Black- Scholesovho vzorca:

```
->sigma
sigma  =

   0.2301730

->call(795.53,795,0.09/100,sigma,16/252)
ans  =

   18.686815
```

- Skutočná cena opcie ale bola 15.00 USD

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Prečo také rozdiely?
- Cena akcie, expiračné ceny, čas expirácie sú jednoznačne dané.
- Môžeme skúsiť zobrať inú úrokovú mieru, napr. polročnú (0.11 %)

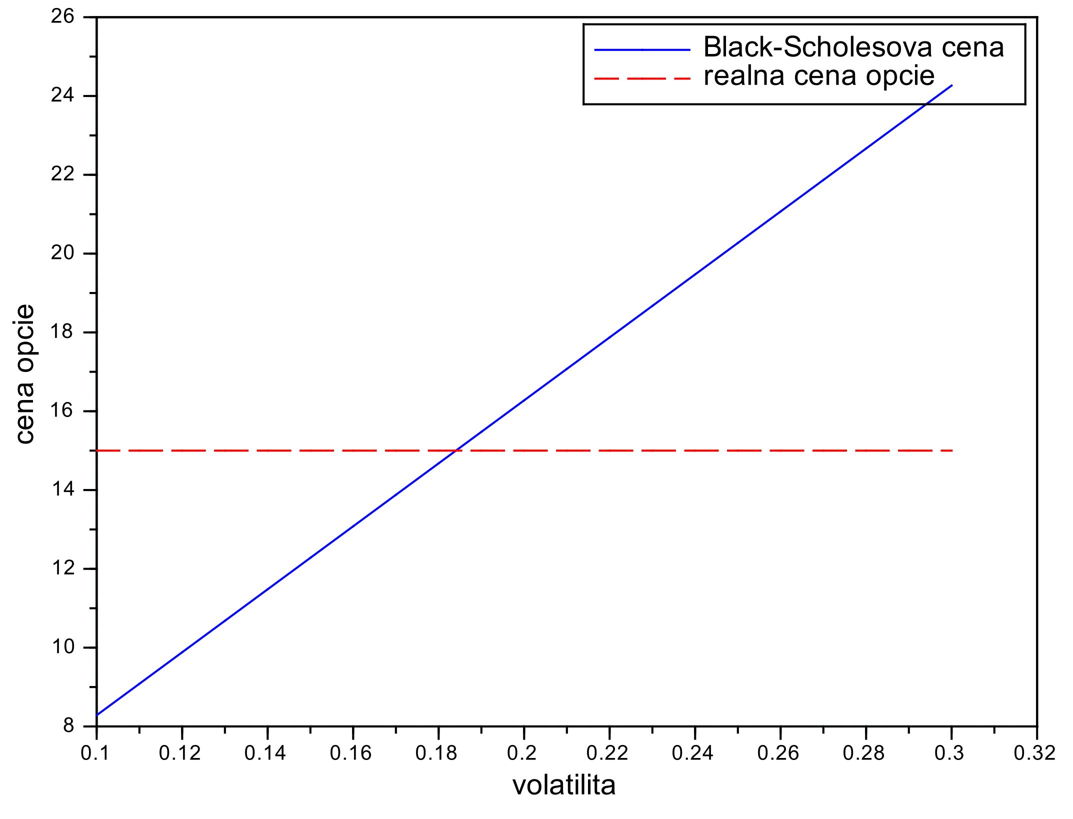
```
->call(795.53,795,0.11/100,sigma,16/252)
ans  =

   18.691797
```

  - rozdiel je malý a navyše opačným smerom, ako by sme potrebovali
- Volatilita - tú sme len odhadli, odhad nemusí byť presný $\rightarrow$ koncept implikovanej volatility

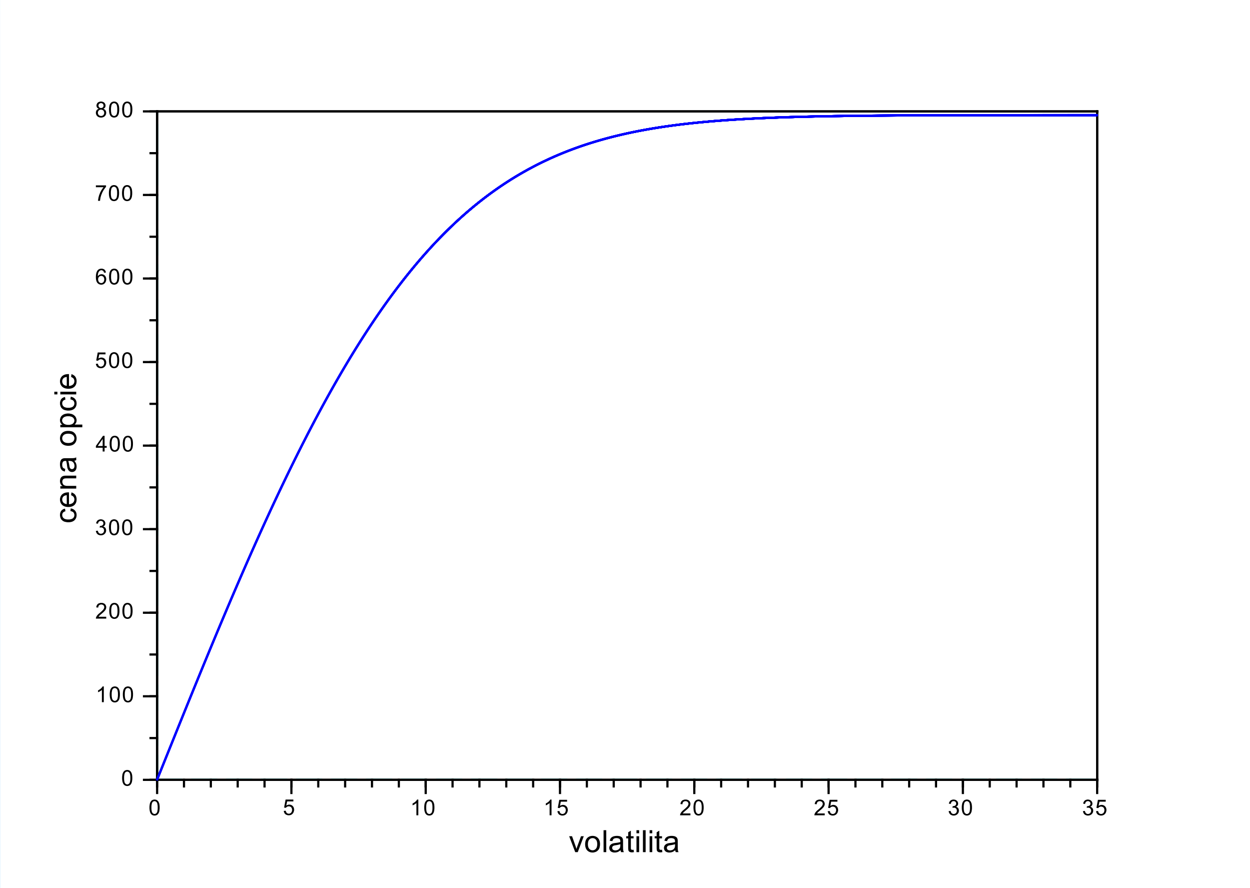
Implikovaná volatilita

- Otázka: Pre akú hodnotu volatility by sa Black- Scholesova cena rovnala reálnej trhovej cene?
  Táto hodnota volatility sa nazýva implikovaná volatilita



Existencia implikovanej volatility

- Ako závisí Black-Scholesova cena tejto opcie od volatility - pre väčší rozsah hodnôt volatility:



Existencia implikovanej volatility

- Vo všeobecnosti ukážeme, že:
  - Cena call opcie je rastúcou funkciou volatility.
  - Existujú limity $V_0 := \lim_{\sigma \to 0^+} V(S, t; \sigma)$, $V_\infty := \lim_{\sigma \to \infty} V(S, t; \sigma)$
- Potom zo spojitosti $V \Rightarrow$ pre každú reálnu cenu opcie z intervalu (V_0, V_∞) existuje implikovaná volatilita a je určená jednoznačne

Existencia implikovanej volatility

- Rastúcosť:
  - Počítame deriváciu (platí $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \sigma} &= SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\ &= \left(SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\right)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \\ &\quad + Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t}\end{aligned}$$

  - Derivácia distribučnej funkcie je funkcia hustoty: $N'(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$
  - Užitočná lema: $SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2) = 0$
  - Takže:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t} > 0$$

Existencia implikovanej volatility

- Limity:
  - Využijeme limitné vlastnosti distribučnej funkcie:

$$\lim_{x \to -\infty} N(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} N(x) = 1$$

  - Z toho:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \to 0^+} V(S, t; \sigma) &= \max(0, S - Ee^{-r(T-t)}) \\ \lim_{\sigma \to \infty} V(S, t; \sigma) &= S \end{aligned}$$