Black-Scholesov model: greeks - analýza citlivosti

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

Greeks

- Greeks:
  - derivácie ceny opcie podľa jednotlivých parametrov
  - vyjadrujú teda citlivosť ceny opcie na tieto parametre
- Už sme vypočítali $\frac{\partial V_{call}}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t}$, označuje sa Υ (vega)
- Ostatné:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \ \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \ P = \frac{\partial V}{\partial r}, \ \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Pozn.: P je grécke písmeno ró

- Označenie: V^{ec} = cena európskeho callu, V^{ep} = cena európskeho putu; analogicky greeks pre call a put

Delta

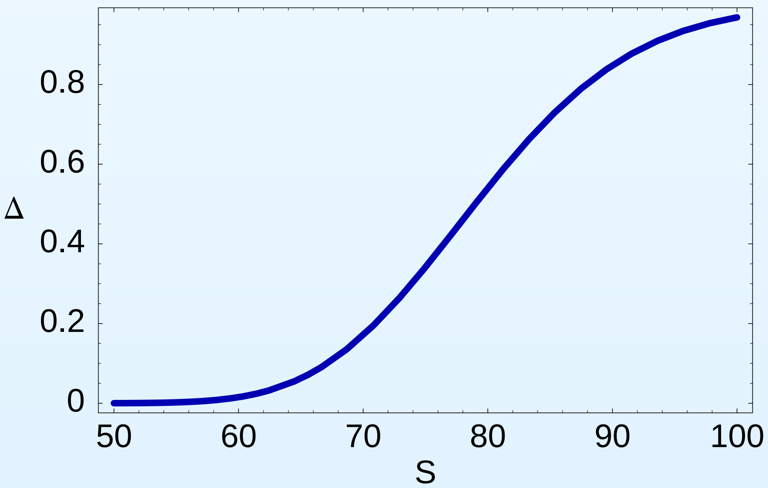
- Výsledok pre call opciu - z Black-Scholesovho vzorca, tá istá lema ako pri volatilite:

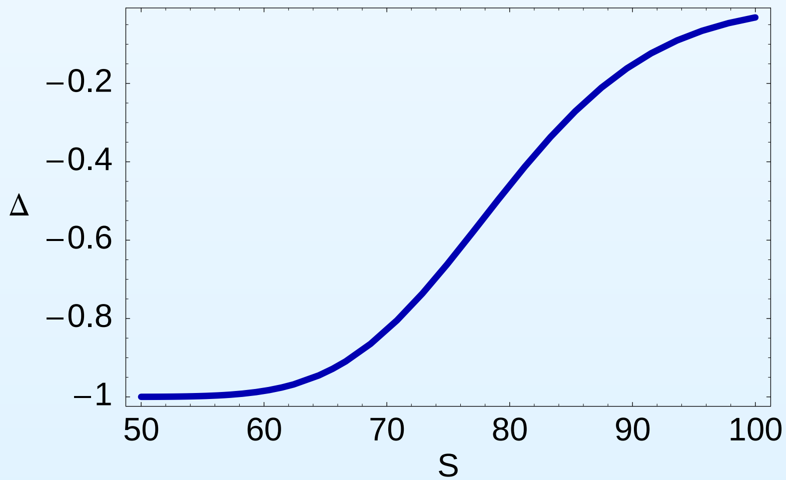
$$\Delta^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S} = N(d_1) \in (0, 1)$$

- Pre put opciu - nemusíme derivovať, stačí použiť put-call paritu:

$$\Delta^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial S} = -N(-d_1) \in (-1, 0)$$

- Ukážka - call vľavo, put vravo:





Delta - delta hedžing

- Pripomeňme si odvodenie Black-Scholesovho modelu a konštrukciu bezrizikového portfólia:

$$\frac{Q_S}{Q_V} = -\frac{\partial V}{\partial S} = -\Delta$$

  kde Q_V, Q_S je počet opcií a počet akcií v portfóliu

- Vytváraniu takéhoto portfólia sa hovorí delta hedžing (hedžing = zaisťovanie proti riziku)

Delta - delta hedžing

CVIČENIE:
Koľko akcií musíme mať v portfóliu pri delta hedžingu, ak

- sme vypísali 1000 call opcií s expiračnou cenou 25 USD a expiráciou o pol roka,
- sme vypísali 1000 put opcií s expiračnou cenou 20 USD a expiráciou o štrť roka,
- sme kúpili 1000 call opcií s expiračnou cenou 30 USD a expiráciou o rok,
- sme kúpili 1000 put opcií s expiračnou cenou 20 USD a expiráciou o mesiac,

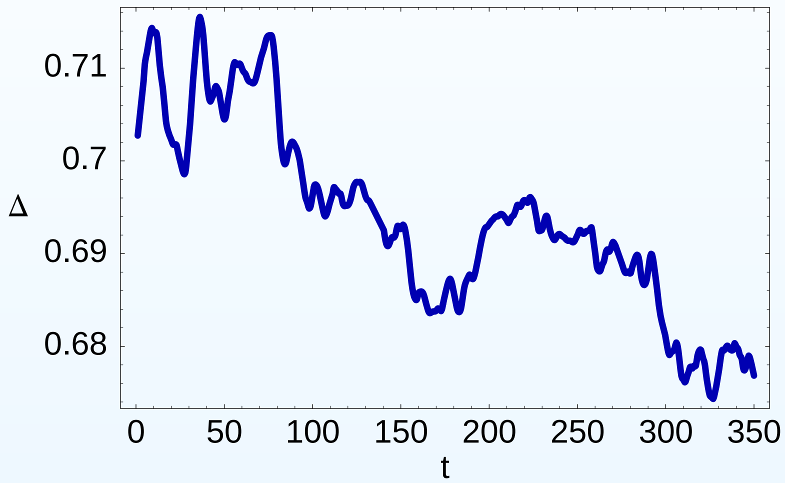
ak dnešná cena akcie je 20 USD, volatilita je 0.3 a úroková miera je pol percenta?

Delta - ukážka delta hedžingu

- Príklad z reálnych dát - call opcia na akciu IBM, 21.5.2002, dáta v 5-minútových intervaloch
- V čase t:
  - máme k dispozícii cenu opcie $V_{real}(t)$ a cenu akcie $S_{real}(t)$
  - vypočítame implikovanú volatilitu, t. j. riešime rovnicu $V_{real}(t) = V^{ec}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}(t))$.
  - implikovanú volatilitu $\sigma_{impl}(t)$ dosadíme do delty call opcie: $\Delta^{ec}(t) = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}(t))$

Delta - ukážka delta hedžingu

- Ako sa počas dňa mení delta:



- Ak by sme vypísali jednu opciu, toto by bol počet akcií v našom portfóliu

Gama

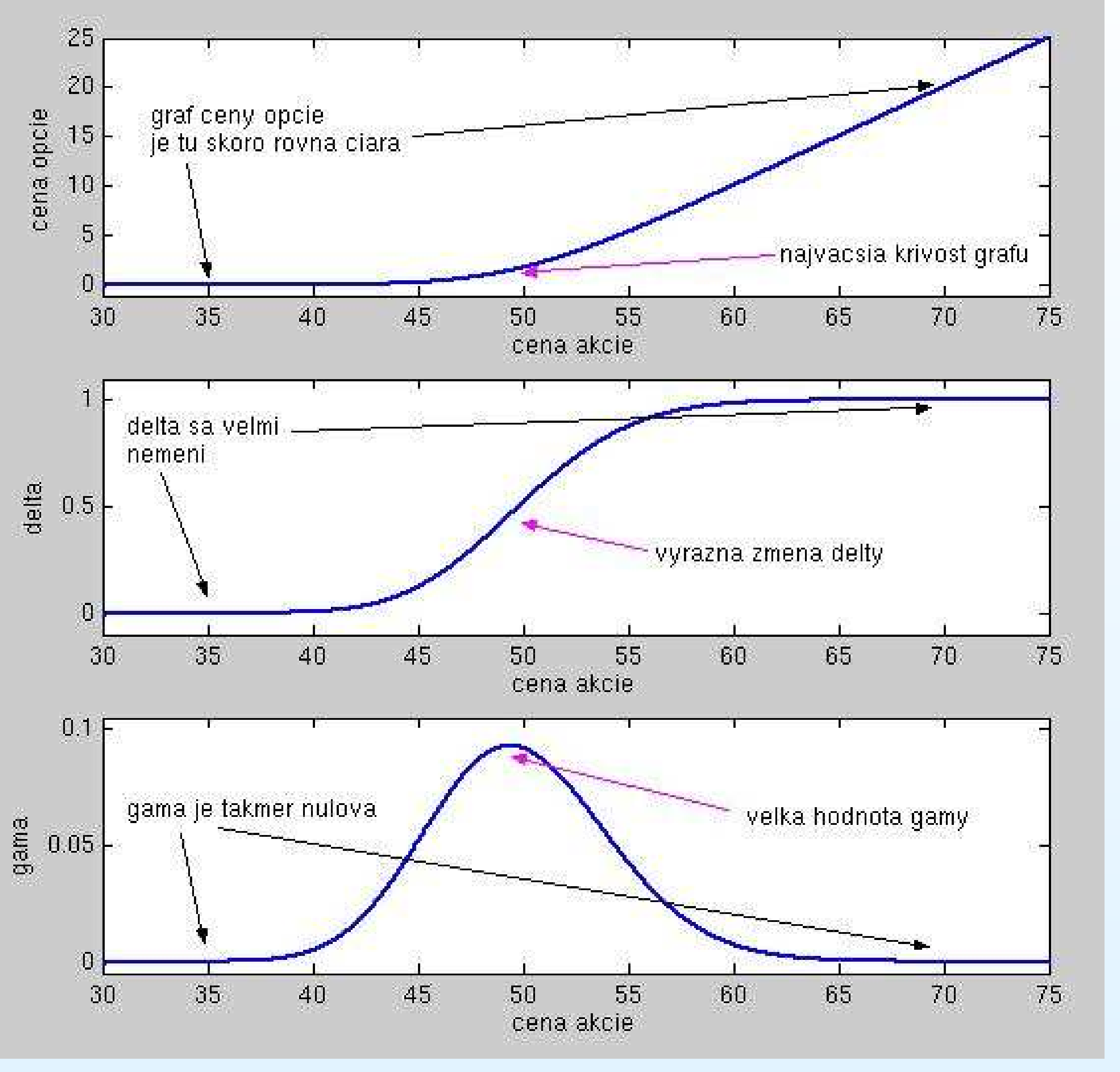
- Výpočet:

$$\Gamma^{ec} = \frac{\partial \Delta^{ec}}{\partial S} = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\exp(-\frac{1}{2}d_1^2)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}S} > 0$$

$$\Gamma^{ep} = \Gamma^{ec}$$

- Meria citlivosť delty na zmenu ceny akcie

Gama

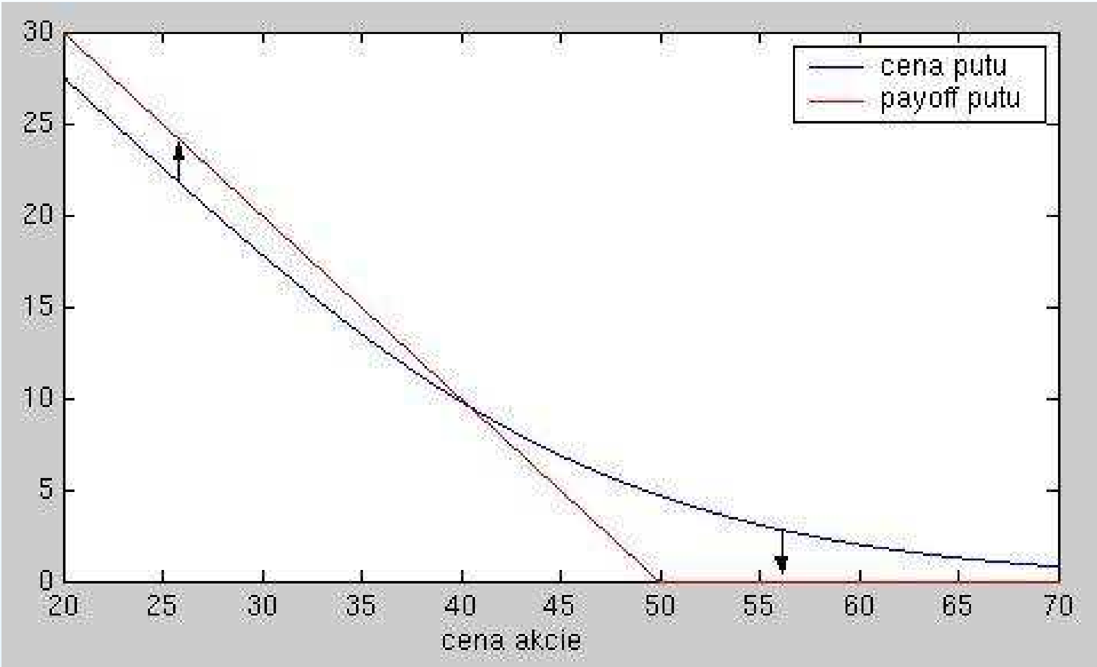

cena opcie
graf ceny opcie
je tu skoro rovna ciara
najvacsia krivost grafu
cena akcie
delta
delta sa velmi
nemeni
vyrazna zmena delty
cena akcie
gama
gama je takmer nulova
velka hodnota gamy
cena akcie

Vega, ró, theta

- Vega
  - vypočítali sme už:
    $\Upsilon^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)} N'(d_2)\sqrt{T-t} > 0$
  - z put-call parity: $\Upsilon^{ep} = \Upsilon^{ec}$
  - väčšia volatilita $\Rightarrow$ väčšia pravdep. vysokých ziskov, pritom strata je ohraničená $\Rightarrow$ kladná vega
- Ró
  - call: $P^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial r} = E(T-t)e^{-r(T-t)} N(d_2) > 0$
  - put: $P^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial r} = -E(T-t)e^{-r(T-t)} N(-d_2) < 0$
- Theta:
  - call: z finančnej mat. vieme, že ak akcia nevypláca dividendy, americkú call opciu sa neoplatí uplatniť skôr $\Rightarrow$ cena európskej a americkej opcie je rovnká $\Rightarrow$ $\Theta^{ec} < 0$

Vega, ró, theta

- Theta
  - put: nemá jednoznačne určené znamienko:



Ak je cena akcie nízka, hodnota putu leží pod payoffom. V čase expirácie bude cena opcie rovná payoffu $\Rightarrow$ niekedy do expirácie musí táto cena vzrásť.

Ak je cena akcie vysoká, hodnota putu leží nad payoffom. V čase expirácie bude cena opcie rovná payoffu $\Rightarrow$ niekedy do expirácie musí táto cena klesnúť.