

Lelandov model: odvodenie PDR pre cenu derivátu

Beáta Stehlíková

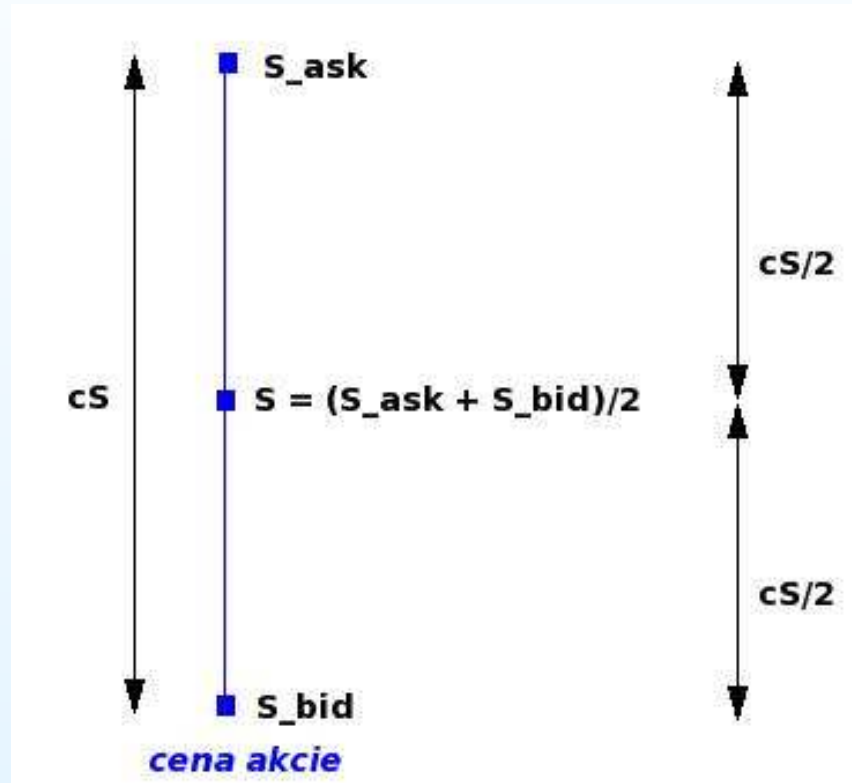
Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

Lelandov model

- Zahrnutie transakčných nákladov do oceňovania opcí
- Pôvodný článok:
Hayne E. Leland: **Option Pricing and Replication with Transactions Costs**,
1985

Predpoklady modelu

- Transakčné náklady sú charakterizované konštantou $c = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S}$, kde S je priemer bid a ask ceny akcie



- S sa riadi geometrickým Brownovým pohybom
$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

Výpočet konštanty c

PRÍKLAD 1:

- Informácie o akcii:

Google Inc. (GOOG) - NasdaqGS	
609.61 +2.81 (0.46%) 9:36AM EST - Nasdaq Real Time	
Prev Close:	606.80
Open:	N/A
Bid:	610.15 x 100
Ask:	610.50 x 300
1y Target Est:	706.37
Beta:	1.13
Next Earnings Date:	N/A
Day's Range:	608.29 - 611.50
52wk Range:	473.02 - 670.25
Volume:	79,197
Avg Vol (3m):	2,793,610
Market Cap:	197.29B
P/E (ttm):	20.39
EPS (ttm):	29.76
Div & Yield:	N/A (N/A)

- Z dát: $S_{bid} = 610.15$, $S_{ask} = 610.50$
- Priemer bid a ask ceny: $S = 610.325$
- $c = \frac{0.35}{610.325} = 5.7346 \times 10^{-4}$

Výpočet konštanty c

PRÍKLAD 2:

- Informácie o akcii:

International Business Machines (IBM) - NYSE	
198.80 + 1.03 (0.52%) 9:38AM EST - Nasdaq Real Time	
Prev Close:	197.77
Open:	N/A
Bid:	198.82 x 200
Ask:	198.90 x 100
1y Target Est:	200.76
Beta:	0.6
Next Earnings Date:	N/A
Day's Range:	198.77 - 199.39
52wk Range:	151.71 - 201.19
Volume:	86,842
Avg Vol (3m):	4,759,040
Market Cap:	229.15B
P/E (ttm):	15.14
EPS (ttm):	13.06
Div & Yield:	3.00 (1.50%)

- Z dát: $S_{bid} = 198.82$, $S_{ask} = 198.90$
- Priemer bid a ask ceny: $S = 198.86$
- $c = \frac{0.08}{198.86} = 4.0229 \times 10^{-4}$

Odvozenie PDR

- Portfólio:
 - jedna opcia a δ akcií, pričom počet akcií určujeme pomocou delta hedžingu, teda $\delta = -\partial V / \partial S$
 - hodnota portfólia: $P = V + \delta S$
 - kvôli transakčným nákladom sa zloženie portfólia nedá meniť spojitou $\rightarrow$ meníme ho v intervaloch dĺžky Δt
- Zmena hodnoty portfólia:
 - počet transakcií s akciami je $\Delta \delta$
 - náklady na jednu transakciu sú $cS/2 \Rightarrow$ celkové náklady sú $\frac{cS}{2} |\Delta \delta|$
 - zmena hodnoty portfólia preto je:

$$\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - \frac{cS}{2} |\Delta \delta|$$

Odvođenje PDR

- Máme teda $\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - \frac{cS}{2} |\Delta \delta|$, pričom
 - $\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta w$ z predpokladu o geometrickom Brownovom pohybe
 - $\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \Delta w$ podľa Itóovej lemy
 - zostáva ešte určiť $\Delta \delta$
- Platí $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$, preto $\frac{\partial \delta}{\partial S} = -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$, z čoho dostaneme:

$$\Delta \delta \approx \frac{\partial \delta}{\partial S} \Delta S = -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta S$$

- Sem dosadíme ΔS z geometrického Brownovho pohybu

Odvodenie PDR

- Zatiaľ máme:

$$\Delta\delta \approx -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \mu S \Delta t - \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma S \Delta w \quad (1)$$

- Leland ukázal:
 - vo vzťahu (1) stačí zobrať členy najnižšieho ráu (t.j. zoberieme len $\Delta w \approx (\Delta t)^{1/2}$, a Δt zanedbáme)
 - pri výpočte absolútnej hodnoty sa $|\Delta w|$ dá nahradiť strednou hodnotou $\mathbb{E}[|\Delta w|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta t}$
- Teda:

$$\begin{aligned} \Delta\delta &\approx -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma S \Delta w \\ |\Delta\delta| &\approx \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sigma S |\Delta w| \approx \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sigma S \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

Odvođenje PDR

- Dosadíme všetko do zmeny hodnoty portfólia

$$\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - \frac{cS}{2} |\Delta \delta|:$$

$$\Delta P = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{c}{2} S \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sigma S \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \right) \Delta t \quad (2)$$

- Portfólio je bezrizikové $\Rightarrow$ musí platiť $\Delta P = rP \Delta t$
- Portfólio obsahuje jednu opciu a $\delta = -\partial V / \partial S$ akcií $\Rightarrow$
 $P = V + \delta S = V - \frac{\partial V}{\partial S}$, a teda

$$\Delta P = r(V - \frac{\partial V}{\partial S} S) \Delta t \quad (3)$$

- Porovnáme (2) a (3):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{c}{2} S \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sigma S \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} = r(V - \frac{\partial V}{\partial S} S)$$

Odvodenie PDR

- Získanú PDR ešte upravíme do výsledného tvaru:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left[1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0$$

- Rovnica platí pre $S > 0, t \in [0, T]$, pridáva sa k nej koncová podmienka $V(S, T)$ v závislosti od typu derivátu, napr. $V(S, T) = \max(0, S - E)$ pre $S > 0$ v prípade call opcie
- Nelineárna parciálna diferenciálna rovnica kvôli členu obsahujúcemu funkciu signum
- Pre call a put opciu ju však budeme vedieť explicitne vyriešiť

Poznámka ku kombinovaným stratégiám

- Cena kombinovaných stratégií sa už (na rozdiel od Black-Scholesa) nedá vypočítať tak, že oceníme každú opciu zvlášť a výsledok zložíme

MATEMATICKY:

- PDR v Lelandovom modeli nie je lineárna $\Rightarrow$ napr. súčet, rozdiel alebo nejaká iná kombinácia riešení už nie je riešením.

Poznámka ku kombinovaným stratégiám

FINANČNE:

- Ak oceníme každú opciu samostatne, zarátavame tak transakčné náklady vznikajúce z udržiavania každého portfólia zvlášť.
- Ak nemáme transakčné náklady, nevadí, že máme akoby dve portfóliá. Môže sa stať, že v jednom akcie kupujeme a v druhom predávame. Žiadne náklady z toho však nevznikajú.
- V prípade transakčných nákladov to už nie je pravda. Vtedy treba portfólio uvažovať ako celok, a v prípade uvedenej situácie nerobiť zbytočné transakcie.