Lelandov model: európska call a put opcia

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

Lelandova PDR - zopakovanie

- Lelandova PDR pre cenu derivátu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left[1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} sign\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0$$

- Rovnica platí pre $S > 0, t \in [0, T]$, pridáva sa k nej koncová podmienka $V(S,T)$ v závislosti od typu derivátu, napr. $V(S,T) = \max(0, S - E)$ pre $S > 0$ v prípade call opcie
- Nelineárna parciálna diferenciálna rovnica kvôli členu obsahujúcemu funkciu signum
- Pripomeňme si, že pre Black-Scholesovu cenu call a put opcie platí $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} > 0$ (kladná gama) $\Rightarrow sign\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) = 1$

Lelandova PDR - call a put

- Ak do Lelandovej PDR dosadíme Black-Scholesovu cenu callu, resp. putu s upravenou volatilitou $V(S,t;\tilde{\sigma})$:

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]$$

dostaneme:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left[1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} sign\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV &= \\
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left[1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV & \\
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV &= 0
\end{aligned}$$

Lelandova PDR - call a put

- To znamená, že Black-Scholesovu cenu callu, resp. putu s upravenou volatilitou $V(S,t;\tilde{\sigma})$:

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]$$

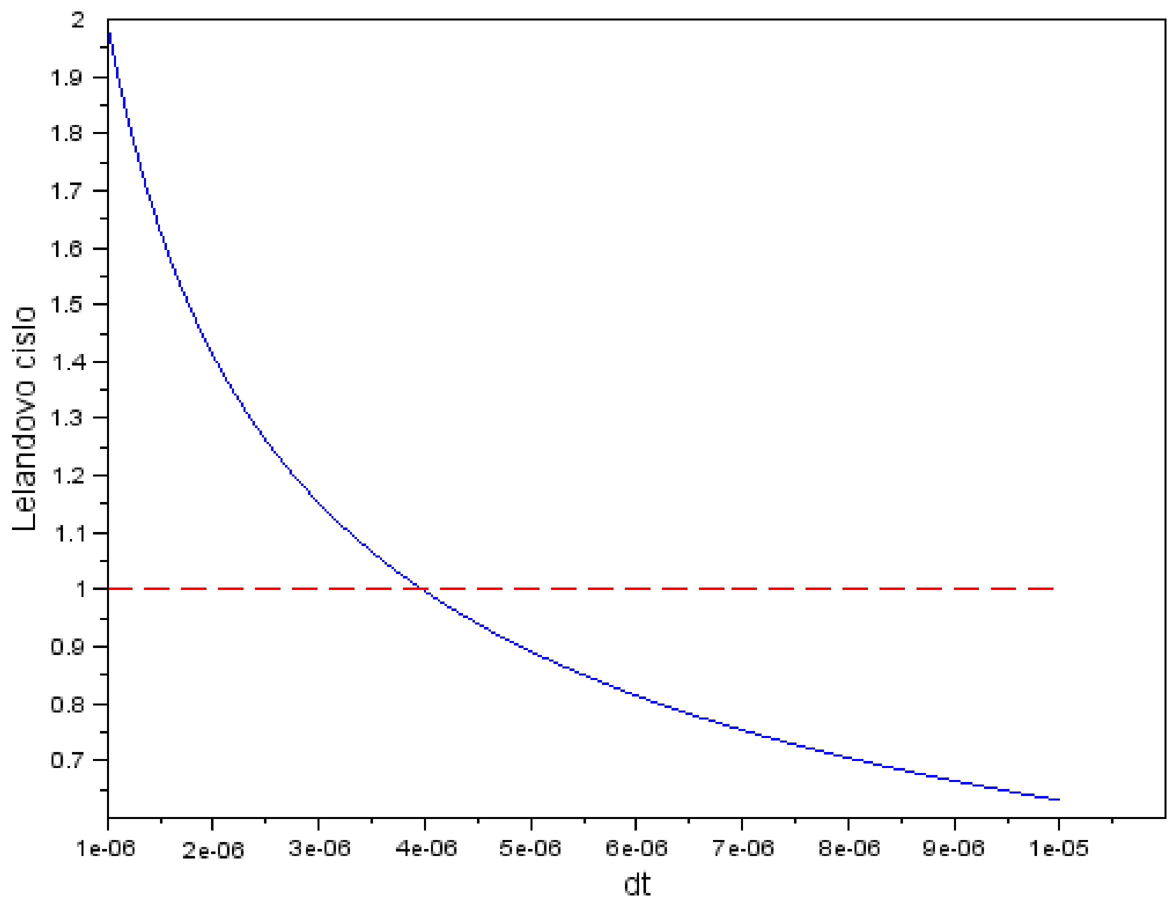
  je riešením Lelandovej rovnice pre európsky call, resp. put.

- Výraz pre $\tilde{\sigma}^2$ musí byť kladný $\Rightarrow$ to dáva ohraničenie na prípustné časy Δt - t.j. časy medzi dvomi zaisťovaniami portfólia (parametre σ, c sú dané):

$$\Delta t > \frac{2}{\pi} \frac{c^2}{\sigma^2}$$

Ohraničenie na prípustné časy Δt

GRAFICKY: závislosť Le od Δt pre $c = 5 \times 10^{-4}$, $\sigma = 0.2$



Ohraničenie na prípustné časy Δt

NUMERICKY: aká je tá hraničná hodnota Δt:

```
-->function [f]=f(dt)
-->    c=5*10^(-4);
-->    sigma=0.2;
-->    le=sqrt(2/%pi)*c/(sigma*sqrt(dt));
-->    f=le-1;
-->endfunction

-->cas=fsolve(4*10^(-6),f);

-->mprintf('%e\n', cas)
3.978874e-006

-->cas*252*7*60
 ans  =

    0.4211240
```

Uvažujme 252 pracovných dní v roku a burzu otvorenú 7 hodín denne $\Rightarrow$ Δt musí byť viac ako cca 0.42 min.

Príklad výpočtu ceny opcie I.

- Zoberme $\Delta t = 5$ minút, teda $\Delta t = 5/(60 * 7 * 252)$
- Lelandovo číslo je potom prípustné (menšie ako 1):

```
-->dt=5/(60*7*252);

-->le(dt)
 ans  =

    0.2902151
```

- Upravená volatilita, ktorá sa bude dosadzovať do Black-Scholesovho vzorca:

```
-->sigmaTC=sqrt((1-le(dt))*(sigma^2))
 sigmaTC  =

    0.1684975
```

Príklad výpočtu ceny opcie I.

- Vypočítame cenu call opcie s expiračnou cenou $E = 110$ a expiráciou o $\tau = 1$ rok, ak úrokova miera je $r = 1\%$ a cena akcie je $S = 100$
- Pre porovnanie aj cena bez transakčných nákladov:

```
-->Call(100,110,0.01,sigmaTC,0.5)
 ans  =


    1.6108991

-->Call(100,110,0.01,sigma,0.5)
 ans  =


    2.3394205
```

Príklad výpočtu ceny opcie II.

- Taká istá opcia pri $\Delta t = 1/252$, t.j. 1 deň:

```
-->dt=1/(252);

-->le(dt)
 ans  =

    0.0316651

-->sigmaTC=sqrt((1-le(dt))*(sigma^2))
 sigmaTC  =

    0.1968080

-->Call(100,110,0.01,sigmaTC,0.5)
 ans  =

    2.2630352
```

Bid a ask ceny opcií v Lelandovom modeli

- Pri odvodení Lelandovej PDR sme mali portfólio: jedna opcia, δ akcií $\Rightarrow$ získaná cena je ponuka na kúpu opcie (teda *bid*)
- Zoberme portfólio mínus jedna opcia, δ akcií $\Rightarrow$ získaná cena je ponuka na predaj opcie (teda *ask*)
- Rovnakým postupom dostaneme, že ask cena spĺňa:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left[1 + \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} sign\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0$$

- Call a put opcia: Black-Scholesova cena s upravenou volatilitou $\sigma_{TC}^2 = (1 + Le)\sigma^2$

Implikované parametre

- Ak máme bid a ask ceny akcie a opcie, vieme vypočítať
  - implikovanú volatilitu
  - implikovaný čas medzi dvoma zmenami portfólia

  (t.j. také hodnoty, pri ktorých sa teoretická bid a ask cena opcie bude rovnať skutočnej)

VSTUPY:

- Akcia - bid a ask cena S_{bid}, S_{ask}
- Opcia - bid a ask cena V_{bid}, V_{ask}, expiračná cena E, čas zostávajúci do expirácie τ
- Ostatné parametre trhu: úroková miera r

Implikované parametre

POSTUP:

- Z bid a ask ceny akcie vypočítame $S = (S_{ask} + S_{bid})/2$ a $c = (S_{ask} - S_{bid})/S$
- Pomocou S, E, r, τ a
  - V_{bid} vypočítame Black-Scholesovu implikovanú volatilitu, to je $\sqrt{(1 - Le)\sigma^2} := \sigma_{bid}$
  - V_{ask} vypočítame Black-Scholesovu implikovanú volatilitu, to je $\sqrt{(1 + Le)\sigma^2} := \sigma_{ask}$
- Riešením sústavy rovníc $(1 - Le)\sigma^2 = \sigma^2_{bid}$, $(1 + Le)\sigma^2 = \sigma^2_{ask}$ vypočítame implikovanú volatilitu σ a Lelandovo číslo Le
- Z definície Lelandovho čísla nakoniec vyjadríme implikovaný čas medzi dvoma zmenami portfólia Δt

Implikované parametre - príklad

PRÍKLAD:

- Dáta z 28.2.2013, krátko po otvorení burzy
- Akcia:

Google Inc. (GOOG) - NasdaqGS

805.80 ↑6.02(0.75%) 9:48AM EST - Nasdaq Real Time Price

Prev Close:	799.78	Day's Range:	801.03 - 806.17
Open:	801.26	52wk Range:	556.52 - 808.97
Bid:	801.53 x 100	Volume:	274,469
Ask:	802.47 x 300	Avg Vol (3m):	2,373,500
1y Target Est:	847.93	Market Cap:	264.51B

Takže máme: $S_{bid} = 803.53, S_{ask} = 802.47$

Implikované parametre - príklad

- Call opcia:

GOOG Mar 2013 800.000 call (GOOG130316C00800000) - OPR

12.54 ↑0.46 (3.81%) 9:31AM EST

Prev Close:	12.08	Day's Range:	12.13 - 12.60
Open:	12.13	Contract Range:	N/A - N/A
Bid:	12.70	Volume:	48
Ask:	13.40	Open Interest:	3,684
Strike:	800.00		
Expire Date:	15-Mar-13		

Teda: $E = 800$, $\tau = 12/252$, $V_{bid} = 12.70$, $V_{ask} = 13.40$

- Úroková miera 0.09%, t.j. $r = 0.09/100$

Implikované parametre - príklad

- S, c sme už počítali:

```
-->S=(Sask+Sbid)/2
 S  =

   802.

-->c=(Sask-Sbid)/S
 c  =

   0.0011721
```

- Implikované volatility $\sigma_{bid}, \sigma_{ask}$:

```
-->sigmaBid=ImplVolCall(S,E,r,tau,Vbid)
 sigmaBid  =

   0.1671470

-->sigmaAsk=ImplVolCall(S,E,r,tau,Vask)
 sigmaAsk  =

   0.1772104
```

Implikované parametre - príklad

- Riešením sústavy rovníc

$$(1 - Le)\sigma^2 = \sigma^2_{bid}, \; (1 + Le)\sigma^2 = \sigma^2_{ask}$$

vypočítame implikovanú volatilitu σ a Lelandovo číslo Le:

```
-->Le=(sigmaAsk^2-sigmaBid^2)/(sigmaAsk^2+sigmaBid^2);

-->sigma=sigmaAsk/sqrt(1+Le)
 sigma  =

    0.1722522
```

Implikované parametre - príklad

- Z definície Lelandovho čísla vyjadríme implikovaný čas Δt:

```
-->dt=(2/%pi)*(c/(sigma*Le))^2
 dt  =

    0.0086431

-->dt*252
 ans  =

    2.1780583
```

ZÁVER:

- implikovaná volatilita $\sigma_{impl} = 0.177$
- implikovaný čas medzi dvomi zmenami portfólia $\Delta t_{impl} = 2.178$ dňa