

Nelineárne modely oceňovania finančných derivátov: základné myšlienky vybraných modelov

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

Modely

- Vybrané modely:
 - RAPM (risk adjusted pricing methodology) - transakčné náklady a riziko z nezaisteného portfólia
 - vplyv dominantného investora
 - modelovanie investorových preferencií
- Cieľ tejto časti prednášky:
 - aké finančné situácie sa dajú modelovať
 - aké matematické metódy sa pritom využívajú
 - základné myšlienky pre získanie určitej predstavy, bez podrobných výpočtov

RAPM model

M. Jandačka, D. Ševčovič: **On the risk adjusted pricing methodology based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile**, Journal of Applied Mathematics, 3, 2005, 235-258

- Transakčné náklady ako v Lelandovom modeli - vtedy zmena delta-hedžovaného portfólia $P = V + \delta S$ je $\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - r_{TC} S \Delta t$, kde

$$r_{TC} = \frac{cS\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \frac{1}{\Delta t}$$

- Riziko z nezabezpečeného portfólia (riziko merané disperziou):

$$r_{VP} = R \frac{Var[\Delta P/S]}{\Delta t},$$

kde R je hraničná hodnota vystavenia sa riziku

RAPM model

- Dá sa odvodiť (Itóova lema, výpočet disperzie):

$$r_{VP} = \frac{1}{2} R \sigma^4 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^2 \Delta t$$

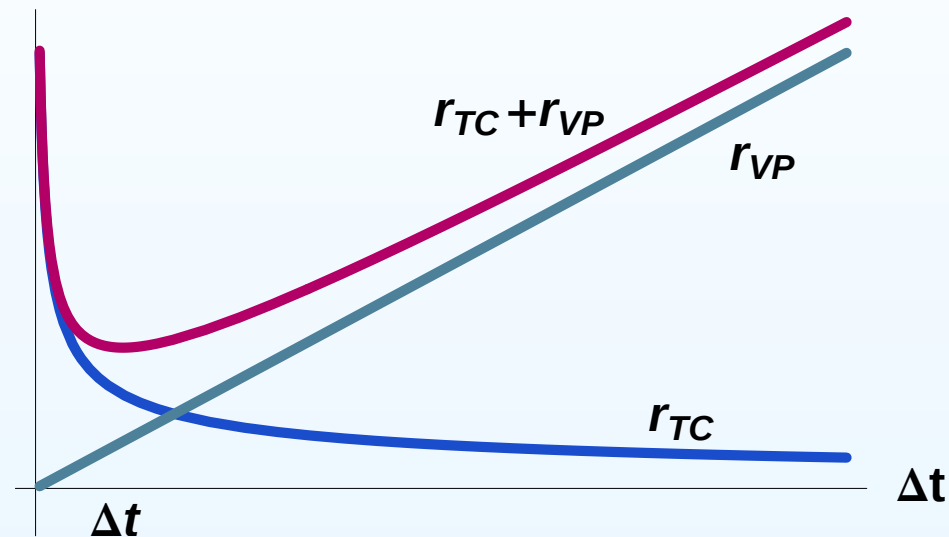
- Rizikovo neutrálny investor $\Rightarrow$ svojou voľbou Δt chce minimalizovať

$$r_R = r_{TC} + r_{VP} = \frac{cS\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} R \sigma^4 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^2 \Delta t$$

$\Rightarrow$ dostaneme optimálnu dĺžku intervalu Δt

RAPM model

- Hľadanie optimálneho Δt_{opt} :



- Pri tejto optimálnej hodnote Δt_{opt} máme:

$$r_R(\Delta t_{opt}) = \frac{3}{2} \left(\frac{c^2 R}{2\pi} \right)^{1/3} \sigma^2 \left| S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right|^{4/3}$$

RAPM model

- Pri tejto optimálnej hodnote Δt_{opt} dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \left[1 + \mu \left(S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^{1/3} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0,$$

pričom:

$\mu = 3 \left(\frac{c^2 R}{2\pi} \right)^{1/3}$ je konštanta;

Γ^p pre $\Gamma = S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ a $p = 1/3$ sa počíta ako $\Gamma^p = |\Gamma|^{p-1} \Gamma$

RAPM model

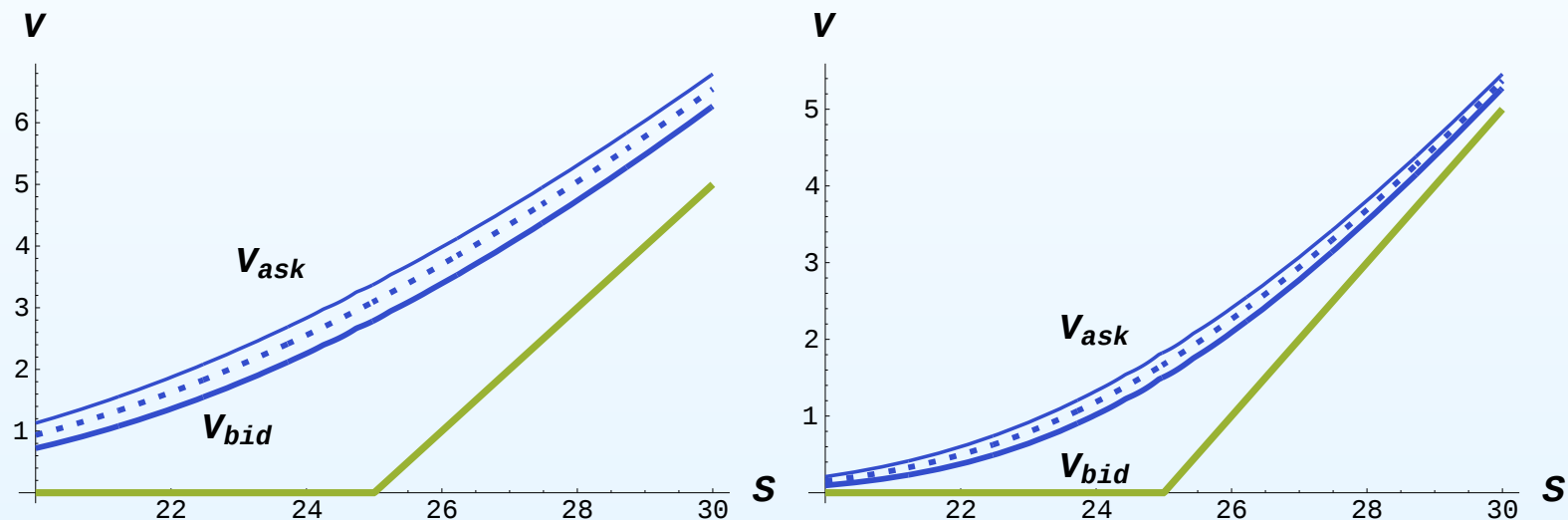
- Riešenie PDR pre cenu derivátu:
 - samotná PDR je komplikovaná nelineárna PDR
 - najprv štandardné transformácie: $x = \ln(S/E)$,
 $\tau = T - t$
 - potom - keďže PDR obsahuje člen $\Gamma = S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ - definuje sa nová funkcia

$$H(x, \tau) = S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

- rovnica pre $H(x, \tau)$ je už oveľa jednoduchšia kvázilineárna PDR a dá sa pre ňu odvodiť efektívna numerická schéma
- výpočet ceny opcie $V(S, t)$ z pomocnej funkcie $H(x, \tau)$ nie je zložitý, vedie len na numerický výpočet jedného integrálu

RAPM model

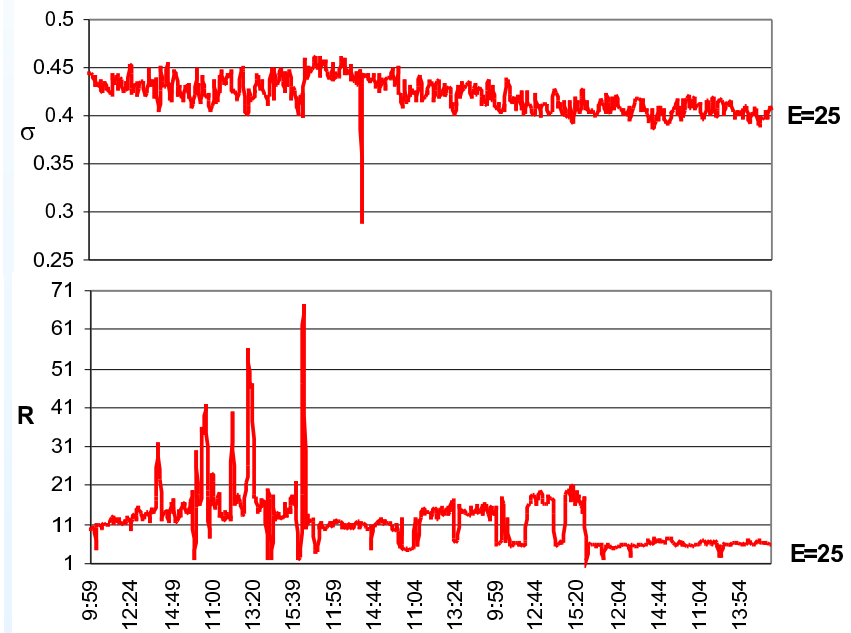
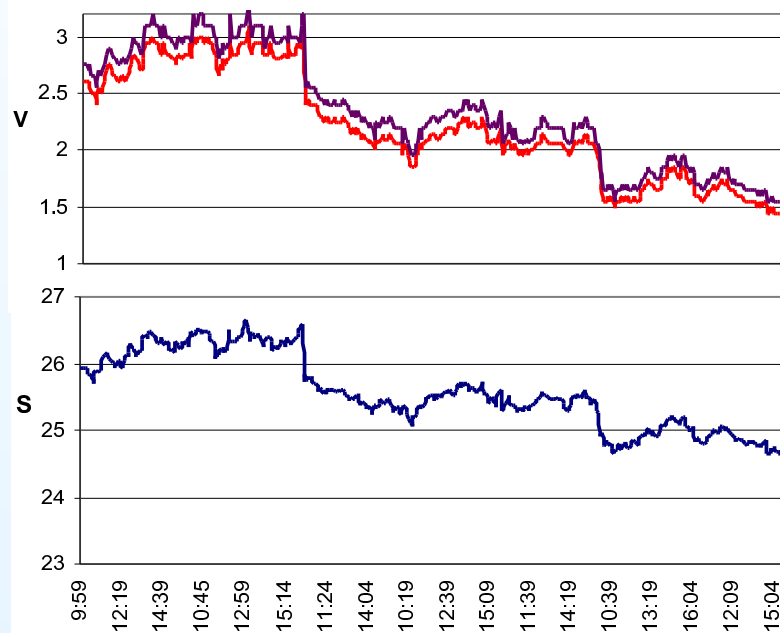
- Podobne ako v Lelandovom modeli - aj v RAPM modeli sa dajú počítať bid a ask ceny opcí
- Ukážka:



(pre porovnanie prušovanou čiarou Black-Scholesova cena opcie)

RAPM model

- Výpočet implikovaných parametrov z reálnych dát - implikovaná volatilita σ a implikovaný parameter rizika R :



Vľavo: vstupné dáta, vpravo: implikované parametre

RAPM model

- Na rovnicu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \left[1 + \mu \left(S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^{1/3} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0,$$

sa dá pozerať ako na rovnicu s premenlivou volatilitou
 $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(S, t)$:

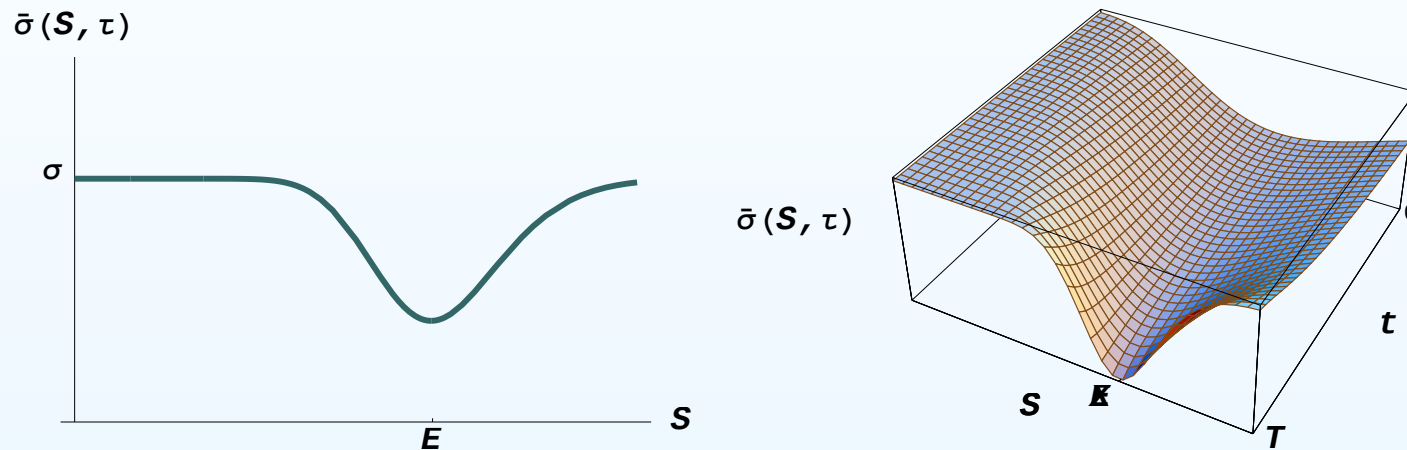
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tilde{\sigma}^2(S, t)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0,$$

kde

$$\tilde{\sigma}(S, t) = \sigma \left[1 + \mu \left(S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^{1/3} \right]$$

RAPM model

- Ako vyzerá priebeh funkcie $\tilde{\sigma}(S, t)$:



⇒ tento model dokáže vysvetliť volatility smile

Vplyv dominantného investora

R. Frey: **Market illiquidity as a source of the model risk in dynamic hedging**, RISK publications, R. Gibson Ed., London, 2000.

- Black-Scholesov model: môžeme kupovať a predávať ľubovoľné množstvo akcií, nemá to však vplyv na ich cenu
- V prípade veľkého dominantného investora toto nemusí byť pravda - svojou stratégiou môže ovplyvňovať cenu akcie
- Uvažujme dominantného investora, ktorého stratégia pri hedžovaní derivátu charakterizujeme premennými:
 - α_t = počet akcií v čase t
 - β_t = počet bezrizikových dlhopisov čase t (t. j. hotovosť)a predpokladajme, že obchodovanie s akciami má vplyv na ich cenu:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw + \rho S d\alpha$$

Vplyv dominantného investora

R. Frey: **Market illiquidity as a source of the model risk in dynamic hedging**, RISK publications, R. Gibson Ed., London, 2000.

- Investorova stratégia závisí od času t a od ceny akcie v tomto čase S :

$$\alpha = \Phi(S, t)$$

- Pomocou Itóovej lemy vypočítame $d\alpha$ a dosadíme do vzťahu pre dS , dostaneme:

$$dS = b(S, t)Sdt + \nu(S, t)Sdw,$$

kde

$$\nu(S, t) = \frac{\sigma}{1 - \rho S \frac{\partial \Phi}{\partial S}},$$

$$b(S, t) = \frac{1}{1 - \rho S \frac{\partial \Phi}{\partial S}} \left(\mu + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\nu^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S^2} \right) \right).$$

Vplyv dominantného investora

- PDR sa odvodí presne takým postupom ako v prípade Black-Scholesovho modelu, len namiesto konštanty σ bude funkcia $\nu(S, t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\nu^2(S, t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- Stratégia dominantného investora:
 - analýza delta hedžingu na základe Black-Scholesovej ceny (nie je vhodná, nereplikuje derivát, ale vždy vedie k vyšším nákladom)
 - výpočet správnej stratégie
 - jej kvalitatívna a kvantitatívna analýza

Vplyv dominantného investora

- Numerické riešenie PDR - tá istá myšlienka ako pri RAPM modeli:
 - transformácia $H(x, \tau) = S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$
 - numericky vyriešime získanú kvázilineárnu PDR
 - integráciou z nej získame cenu opcie

Modelovanie investorovych preferencií

S. D. Hodges, A. Neuberger: **Optimal replication of contingent claims under transaction costs**, Advances o Futures and Options Research(1994), 21-35.

G. Barles, H.M. Soner: **Option Pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation**, Finance Stochast. 2 (1998) 369-397.

- Znovu transakčné náklady:

$$S_{ask} = (1 + \mu)S, \quad S_{bid} = (1 - \mu)S,$$

kde $S = (S_{bid} + S_{ask})/2$

- Uvažujme portfólio:

X_t = hodnota dlhopisov v dolároch

Y_t = počet akcií

- Investor má funkciu užitočnosti U s konštantnou averziou k riziku γ

Modelovanie investorovych preferencií

- Ak by nebola možnosť obchodovať s opciami:
 - hodnota portfólia v danom čase T je $X_T + Y_T S_T$
 - rieši sa úloha stochastického programovania

$$v^f(x, y, s, t) = \sup \mathbb{E}[U(X_T + Y_T S_T)]$$

pri začiatočných hodnotách $X_t = x, Y_t = y, S_t = s$

- Ak vypíšeme N call opcií:
 - hodnota portfólia v danom čase expirácie opcií T je $X_T + Y_T S_T - N(S_T - E)^+$
 - rieši sa úloha stochastického programovania

$$v(x, y, s, t) = \sup \mathbb{E}[U(X_T + Y_T S_T - N(S_T - E)^+)]$$

pri začiatočných hodnotách $X_t = x, Y_t = y, S_t = s$

Modelovanie investorovych preferencií

- [Hodges, Neuberger]:
 - vzťah medzi týmito dvoma optimalizačnými úlohami
- [Barles, Soner]:
 - konštrukcia optimálnych stratégií, PDR pre cenu opcie
 - matematické nástroje: rovnica dynamického programovania, zavedenie malého parametra a asymptotická analýza, transformácia PDR a jej numerické riešenie
 - výsledná PDR pre cenu opcie má podobný tvar ako v predchádzajúcich modeloch: namiesto konštantnej volatility z Black-Scholesa máme funkciu, ktorá závisí aj od $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Rightarrow$ podobný postup riešenia