

Numerické metody: oceňovanie európskych opcií

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

Transformácia na RVT

- Transformácia

$$V(S, t) = e^{-\alpha x - \beta \tau} u(x, \tau),$$

$$\alpha = \frac{r - q}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \beta = \frac{r + q}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{(r - q)^2}{2\sigma^2}, \tau = T - t, x = \ln(S/E),$$

vedie od Black-Scholesovej rovnice k rovnici vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

pre $x \in \mathbb{R}, \tau \in [0, T]$

- Začiatočná podmienka: $u(x, 0) = g(x)$
 - pre call opciu: $g(x) = E e^{\alpha x + \beta \tau} \max(e^x - 1, 0)$
 - pre put opciu: $g(x) = E e^{\alpha x + \beta \tau} \max(1 - e^x, 0)$

Okrajové podmienky

- Pri numerickom riešení potrebujeme aj okrajové podmienky - na základe toho, akú hodnotu má call a put opcia pre veľmi malé a veľmi veľké ceny akcie
- Call opcia:
 - $V(0, t) = 0$
 - pre $S \rightarrow \infty$ platí: $V(S, t) \sim Se^{-q(T-t)}$, presnejšia podmienka: $V(S, t) \sim Se^{-q(T-t)} - Ee^{-r(T-t)}$
- Put opcia:
 - $V(0, t) = Ee^{-r(T-t)}$
 - $V(S, t) \rightarrow 0$ pre $S \rightarrow \infty$

Aproximácia riešenia

- Numerické riešenie na ohraničenom priestorovom intervale $x \in [-L, L]$
- Delenie v čase a priestore:

$$x_i = ih, \quad i = -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$\tau_j = jk, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

pričom $h = L/n, k = T/m$

- Aproximáciu riešenia u v bode (x_i, τ_j) označíme

$$u_i^j \approx u(x_i, \tau_j), \quad g_i^j \approx g(x_i, \tau_j)$$

Aproximácia riešenia

- Okrajové podmienky:
 - pre call opciu:

$$\phi^j := u_{-N}^j = 0$$

$$\psi^j := u_N^j = E e^{(\alpha+1)Nh + (\beta-q)jk}$$

- pre put opciu:

$$\phi^j := u_{-N}^j = E e^{-\alpha Nh + (\beta-r)jk}$$

$$\psi^j := u_N^j = 0$$

Aproximácia derivácií v PDR

- Dve aproximácie časovej derivácie - vedú k dvom numerickým schémam:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i, \tau_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i, \tau_j) \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k}$$

- Aproximácia priestorovej derivácie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, \tau_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

Implicitná a explicitná schéma

- Explicitná:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

- Implicitná:

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

Explicitná schéma

- Daá sa zapísať: $u_i^{j+1} = \gamma u_{i-1}^j + (1 - 2\gamma)u_i^j + \gamma u_{i+1}^j$, kde $\gamma = \frac{\sigma^2 k}{2h^2}$
- V maticovom tvare: $u^{j+1} = \mathbf{A}u^j + b^j$ pre $j = 0, 1, \dots, m - 1$ kde $\mathbf{A}$ je trojdiagonálna matica:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - 2\gamma & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & & \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma \\ 0 & \dots & 0 & \gamma & 1 - 2\gamma \end{pmatrix},$$

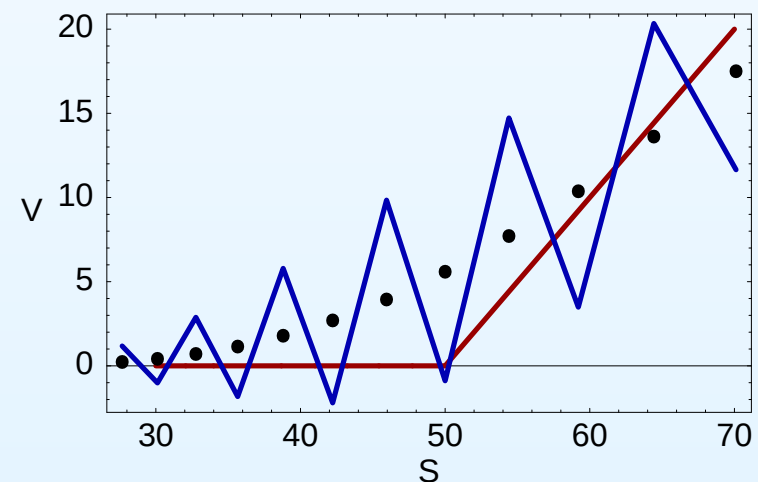
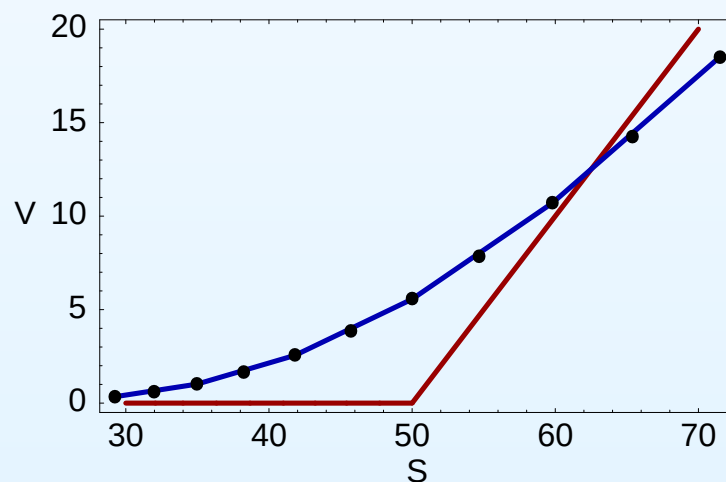
$$b^j = (\gamma\phi^j, 0, \dots, 0, \gamma\psi^j)^T$$

Explicitná schéma

- Podmienka stability - Courant–Fridrichs–Lewy (CFL):

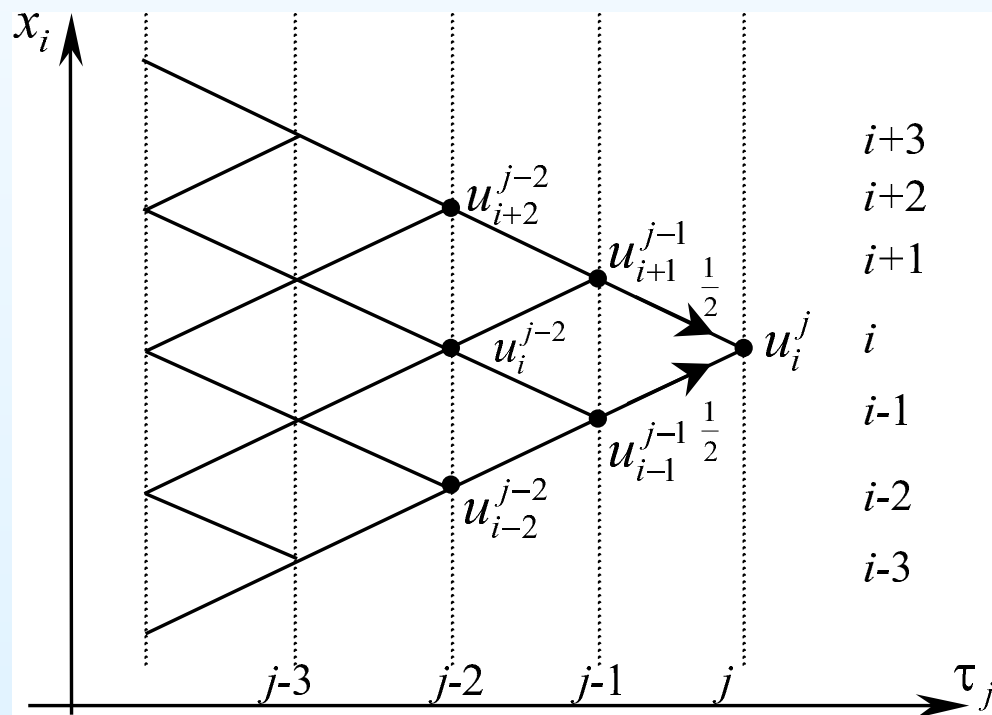
$$0 < \gamma \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sigma^2 k}{h^2} \leq 1$$

- Vľavo - podmienka je splnená, vpravo - nie je splnená



Explicitná schéma a binomický strom

- Ak zvolíme časový a priestorový krok tak, že $h = \sigma\sqrt{k}$, tak $\gamma = 1/2$ a $u_i^{j+1} = \frac{1}{2}u_{i-1}^j + \frac{1}{2}u_{i+1}^j$.
- u_i^{j+1} v čase τ_{j+1} je priemerom hodnôt u_{i-1}^j, u_{i+1}^j
- Binomický strom:



Implicitná schéma

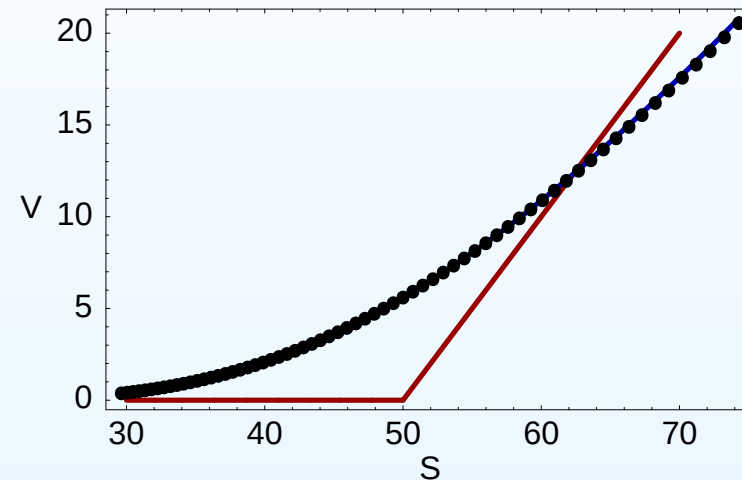
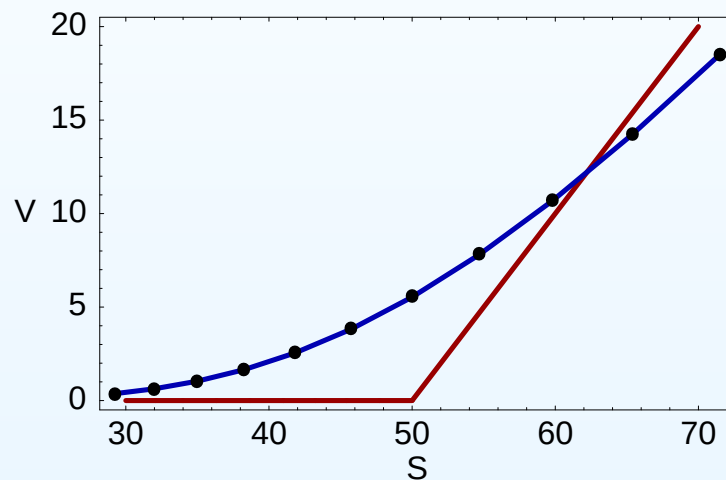
- Dá sa zapísať v tvare: $-\gamma u_{i-1}^j + (1 + 2\gamma)u_i^j - \gamma u_{i+1}^j = u_i^{j-1}$,
kde $\gamma = \frac{\sigma^2 k}{2h^2}$,
- Maticovo: $\mathbf{A}u^j = u^{j-1} + b^{j-1}$ pre $j = 1, 2, \dots, m$ kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + 2\gamma & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 1 + 2\gamma & -\gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & & -\gamma & 1 + 2\gamma & -\gamma \\ 0 & \dots & 0 & -\gamma & 1 + 2\gamma \end{pmatrix},$$

$$b^j = (\gamma\phi^{j+1}, 0, \dots, 0, \gamma\psi^{j+1})^T$$

Implicitná schéma

- Nevyžaduje splnenie CLF podmienky
- Vľavo - podmienka je splnená, vpravo - nie je splnená



Riešenie sústavy z implicitnej schémy

- Sústava tvaru $\mathbf{A}x = b$ s maticou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + 2\gamma & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 1 + 2\gamma & -\gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & & -\gamma & 1 + 2\gamma & -\gamma \\ 0 & \dots & 0 & -\gamma & 1 + 2\gamma \end{pmatrix}$$

- Zopakujeme si postup pomocou Gauss-Seidelovej metódy
- Ukážeme i je zovšeobecnenie - SOR metóda (jej modifikácia sa bude používať pri oceňovaní amerických opcií)