

Numerické metody: riešenie sústavy lineárnych rovníc vznikajúcej pri implicitnej schéme

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

Záver predchádzajúcich slajdov

- Sústava tvaru $\mathbf{A}x = b$ s maticou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + 2\gamma & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 1 + 2\gamma & -\gamma & & \vdots \\ 0 & . & . & . & 0 \\ \vdots & & & -\gamma & 1 + 2\gamma & -\gamma \\ 0 & \dots & 0 & -\gamma & 1 + 2\gamma \end{pmatrix}$$

pre $\gamma > 0$

- Zopakujeme si postup pomocou Gauss-Seidelovej metódy
- Ukážeme jej zovšeobecnenie - SOR metóda (jej modifikácia sa bude používať pri oceňovaní amerických opcií)

Opakovanie z numerických metód

- Všeobecná schéma iteračných metód riešenia sústavy lineárnych rovníc $\mathbf{A}x = b$:
 - sústavu $\mathbf{A}x = b$ prepíšeme do tvaru $x = \mathbf{T}x + g$ a definujeme iteračnú schému $x^{(k+1)} = \mathbf{T}x^{(k)} + g$
 - ak sú všetky vlastné čísla matice $\mathbf{T}$ menšie ako 1, tak iteračná schéma konverguje k riešeniu pre ľubovoľný štartovací bod
 - pri zápise sa často využíva rozklad matice na jej diagonálnu ($\mathbf{D}$), dolnú trojuholníkovú ($\mathbf{L}$) a hornú trojuholníkovú ($\mathbf{U}$) časť: $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$
- Príklady - zopakujeme si ich princíp:
 - Jacobi: $x^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})x^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}b$
 - Gauss-Seidel $x^{(k+1)} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}x^{(k)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}b$

Gauss-Seidelova metóda: príklad

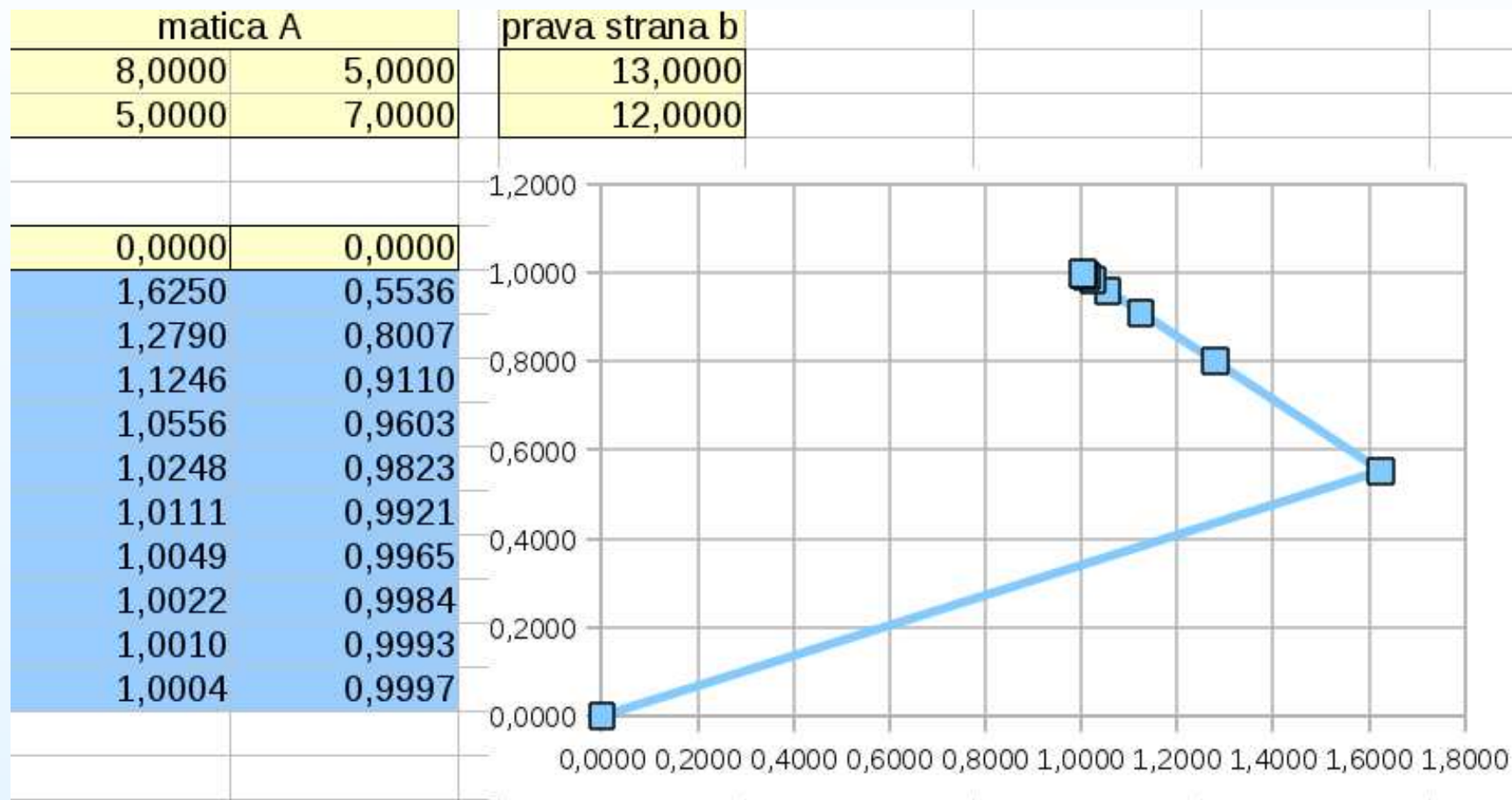
- Budeme riešiť úlohu

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix},$$

ktorej presné riešenie je $(x_1, x_2)' = (1, 1)'$

- Použijeme Gauss-Seidelovu metódu, pričom budeme štartovať z bodu $(0, 0)'$

Gauss-Seidelova metóda: príklad



POZOROVANIE: Konverguje, ale pomaly, lebo robí príliš krátke kroky, aj keď správnym smerom $\Rightarrow$ motivácia na vylepšenie

Vylepšenie Gauss-Seidelovej metódy

- Gauss-Seidelova metóda po zložkách:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right]$$

- Pri výpočte $x_i^{(k)}$ máme
 - aktuálnu aproximáciu riešenia:

$$\left(x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)} \right)$$

- rezíduum, t.j. rozdiel $\mathbf{A}x^{ap} - b$:

$$\mathbf{r}_i^{(k)} = \left(r_{1i}^{(k)}, \dots, r_{ni}^{(k)} \right)$$

Vylepšenie Gauss-Seidelovej metódy

- Gauss-Seidelov výpočet $x_i^{(k)}$ sa dá zapísať ako :

$$\begin{aligned}x_i^{(k)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right] \\&= x_i^{(k-1)} + \frac{1}{a_{ii}} r_{ii}^{(k)}\end{aligned}$$

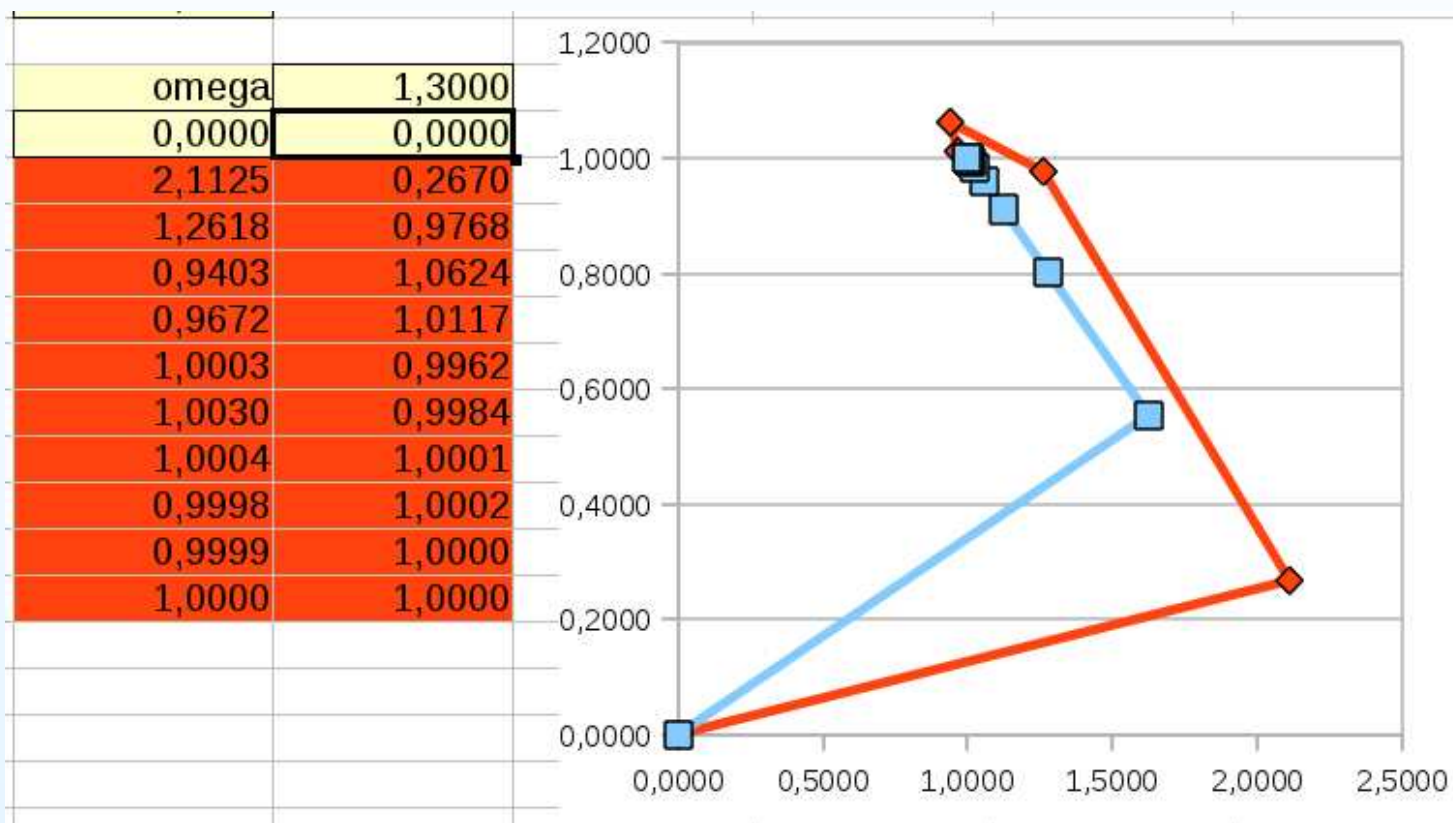
- Úprava Gauss-Seidelovej metódyv súlade s motiváciou z príkladu, tzv. **successive over-relaxation (SOR)** metóda:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega \frac{1}{a_{ii}} r_{ii}^{(k)}$$

pre $\omega > 1$ (pre $0 < \omega < 1$ hovoríme o **under-relaxation**; pre $\omega = 1$ dostávame pôvodnú Gauss-Seidelovu metódu)

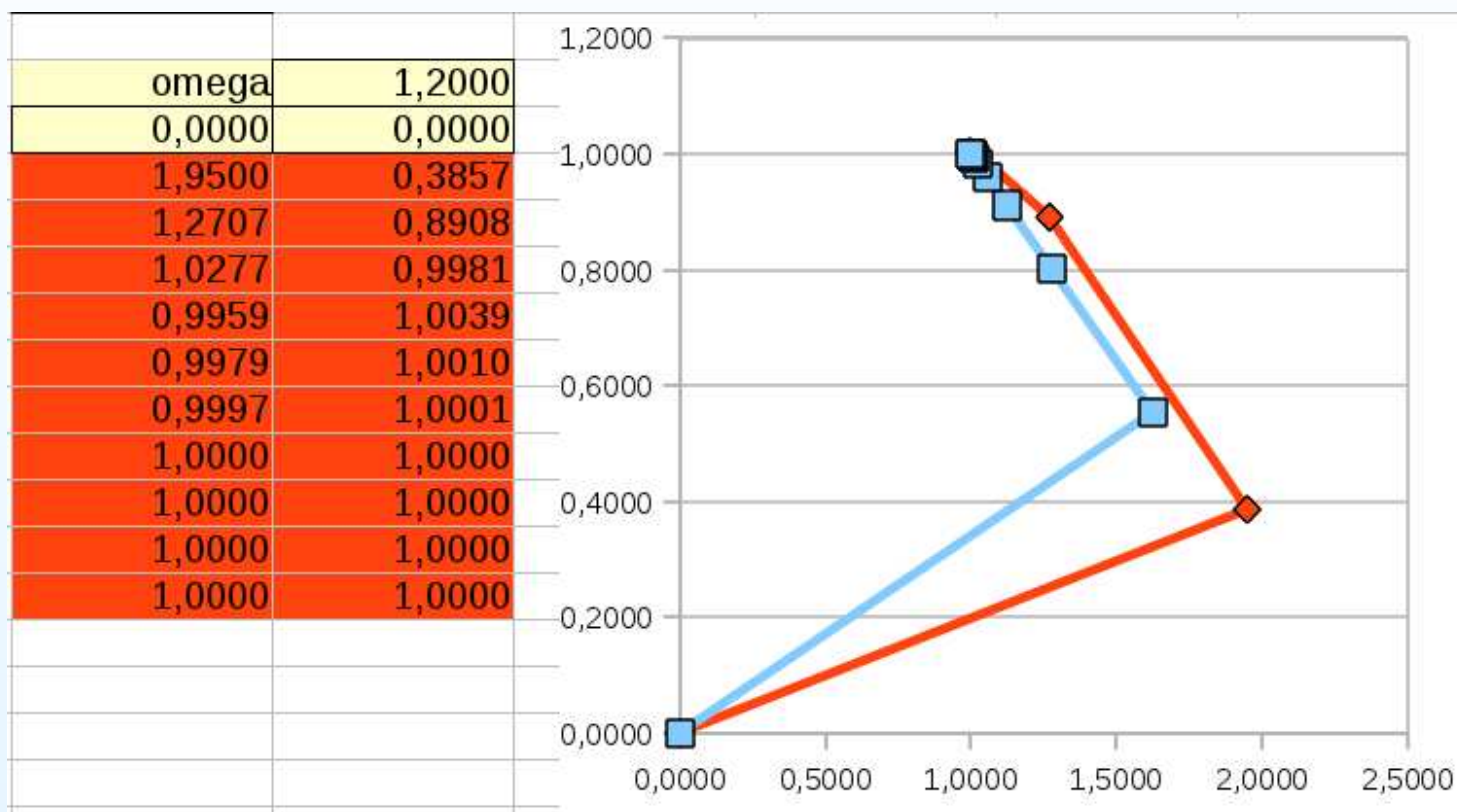
SOR metóda: príklad

Na predchádzajúci príklad použijeme SOR s $\omega = 1.3$:



SOR metóda: príklad

Ešte rýchlejšia konvergencia pre $\omega = 1.2$:



SOR metóda: príklad

Porovnanie Gauss-Seidelovej metódy (vľavo) s SOR metódou pre $\omega = 1.2$ (vpravo):

		omega	1,2000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,6250	0,5536	1,9500	0,3857
1,2790	0,8007	1,2707	0,8908
1,1246	0,9110	1,0277	0,9981
1,0556	0,9603	0,9959	1,0039
1,0248	0,9823	0,9979	1,0010
1,0111	0,9921	0,9997	1,0001
1,0049	0,9965	1,0000	1,0000
1,0022	0,9984	1,0000	1,0000
1,0010	0,9993	1,0000	1,0000
1,0004	0,9997	1,0000	1,0000

OTÁZKY:

Ako zvoliť parameter ω ?

A od čoho vlastne závisí rýchlosť konvergenzie metódy?

Rýchlosť konvergenzie iteračnej schémy

- Majme iteračnú schému $x^{(k+1)} = \mathbf{T}x^{(k)} + g$ a presné riešenie x^* , ku ktorému schéma konverguje
- Platí:

$$\begin{aligned}\|x^{(k)} - x^*\| &= \|(\mathbf{T}x^{(k-1)} + g) - (\mathbf{T}x^* + g)\| \\ &= \|\mathbf{T} [x^{(k-1)} - x^*]\| \\ &= \|\mathbf{T} [(\mathbf{T}x^{(k-2)} + g) - (\mathbf{T}x^* + g)]\| \\ &= \|\mathbf{T}^2 [x^{(k-2)} - x^*]\| \\ &\quad \dots \\ &= \|\mathbf{T}^k [x^{(0)} - x^*]\| \leq \|\mathbf{T}^k\| \|x^{(0)} - x^*\|\end{aligned}$$

- Potrebujeme odhad normy $\|\mathbf{T}^k\|$
- Využije sa spektrálny polomer matice a jeho vlastnosti

Spektrálny polomer a maticové normy

- Nech $\mathbf{M}$ je štvorcová matica
- Spektrálny polomer matice:

$$\rho(\mathbf{M}) = \max |\lambda_i| ,$$

kde λ_i sú vlastné čísla matice $\mathbf{M}$

- Súvislosť spektrálneho polomeru s maticovými normami:
 - platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{M}^n\|^{1/n} = \rho(\mathbf{M})$$

- preto sa pre veľké n dá použiť aproximácia

$$\|\mathbf{M}^n\|^{1/n} \sim \rho(\mathbf{M}) \Rightarrow \|\mathbf{M}^n\| \sim \rho(\mathbf{M})^n$$

Spektrálny polomer a maticové normy

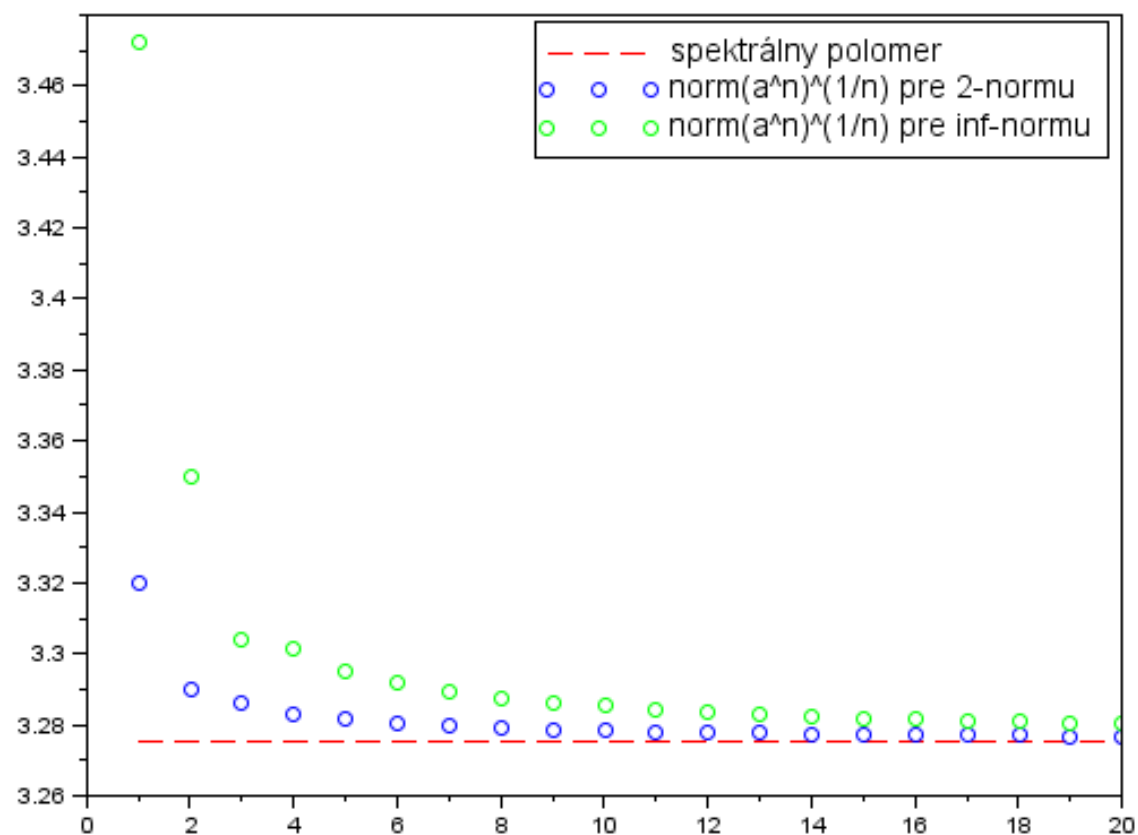
- Numerický príklad:
 - vygenerujeme náhodnú maticu, napr. 3×3 :
`a=rand(3,3,"normal");`
 - maticové normy v Scilabe:

```
norm(x)
    or norm(x,2) is the largest singular value of x (max(svd(x))).
norm(x,1)
    The l_1 norm x (the largest column sum : max(sum(abs
    (x), 'r'))).
norm(x,'inf'),norm(x,%inf)
    The infinity norm of x (the largest row sum : max(sum(abs
    (x), 'c'))).
norm(x,'fro')
    Frobenius norm i.e. sqrt(sum(diag(x'*x))).
```

- budeme sledovať konvergenciu k spektrálnemu polomeru

Spektrálny polomer a maticové normy

Výsledok:



Rýchlosť konv. iteračnej schémy: pokračovanie

- Máme teda:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \|\mathbf{T}^k\| \|x^{(0)} - x^*\| \sim \rho(\mathbf{T})^k \|x^{(0)} - x^*\|$$

- Spektrálny polomer iteračnej matice $\mathbf{T}$ teda
 - musí byť menší ako 1 - aby chyba konvergovala k nule, t.j. aby metóda konvergovala
 - mal by byť čo najmenší - aby bola konvergencia čo najrýchlejšia

Rýchlosť konv. iteračnej schémy: príklad

- Riešili sme sústavu:

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix},$$

- SOR metóda v maticovom zápise:

$$x^{(k+1)} = (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{D} - \omega \mathbf{U}] x^{(k)} + \omega (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} b$$

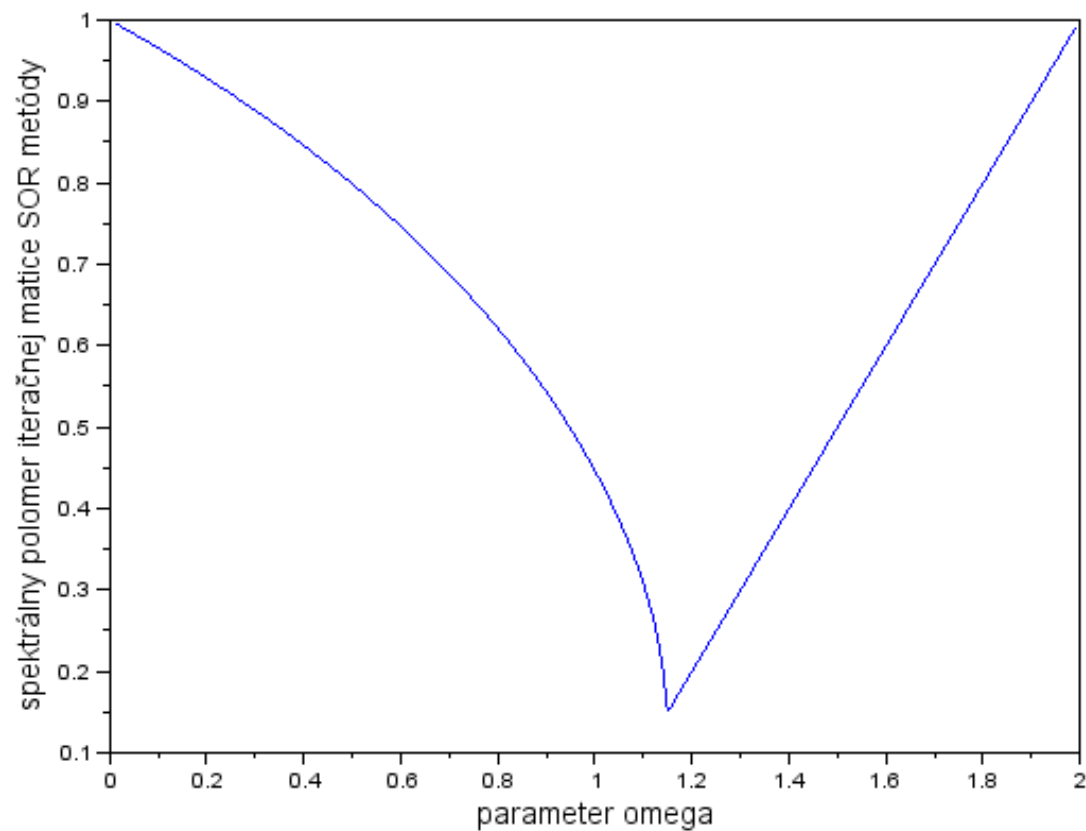
- V našom prípade teda iteračná matica je

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 5\omega & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8(1 - \omega) & -5\omega \\ 0 & 7(1 - \omega) \end{pmatrix}$$

a potrebujeme závislosť maximálnej absolútnej hodnoty vlastného čísla od ω

Rýchlosť konv. iteračnej schémy: príklad

Výsledok:



Použili sme: $\omega = 1$ (Gauss-Seidel), $\omega = 1.3$, $\omega = 1.2$

Rýchlosť konvergenzie SOR schémy

Niekoľko užitočných tvrdení (bez dôkazov):

1. [Kahan] Nech $a_{ii} \neq 0$. Potom $\rho(\mathbf{T}_\omega) \geq |\omega - 1|$.
2. [Ostrowski-Reich] Nech A je kladne definitná a nech $0 < \omega < 2$. Potom SOR metóda konverguje pre ľubovoľný štartovací bod
3. Nech A je kladne definitná a trojdiagonálna. Potom $\rho(\mathbf{T}_{gs}) = \rho(\mathbf{T}_j)^2$ a optimálna voľba parametra ω pre SOR metódu je

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(\mathbf{T}_j)]^2}}.$$

Pri tejto voľbe platí: $\rho(\mathbf{T}_\omega) = \omega - 1$.

Označenie:

$\mathbf{T}_j, \mathbf{T}_{gs}, \mathbf{T}_\omega$ - iteračné matice Jacobiho, Gauss-Seidelovej a SOR metódy.

Rýchlosť konvergenzie SOR schémy

Dôsledky:

- Z tvrdenia 1 vyplýva, že pre $\omega \notin (0, 2)$ je $\rho(\mathbf{T}_\omega) \geq 1$. Podmienka $\omega \in (0, 2)$ je teda nutnou podmienkou konvergenzie metódy.
- Tvrdenie 2 udáva triedu matíc, pre ktorú je podmienka $\omega \in (0, 2)$ aj postačujúcou podmienkou konvergenzie.

Tvrdenie 3 pre náš príklad

Matica našej sústavy je kladne definitná a trojdiagonálna

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

JACOBIHO METÓDA:

- iteračná matica:

$$\mathbf{T}_j = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = -\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

- vlastné čísla matice $\mathbf{T}_j$: $\lambda_1 = \frac{5}{2\sqrt{14}}$, $\lambda_2 = -\frac{5}{2\sqrt{14}}$
- spektrálny polomer: $\rho(\mathbf{T}_j) = \frac{5}{2\sqrt{14}}$

Tvrdenie 3 pre náš príklad

GAUSS-SEIDELOVA METÓDA:

- iteračná matica:

$$\mathbf{T}_{gs} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{8} \\ 0 & \frac{25}{56} \end{pmatrix}$$

- vlastné čísla matice $\mathbf{T}_{gs}$: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{25}{56}$
- spektrálny polomer: $\rho(\mathbf{T}_{gs}) = \frac{25}{56}$

NAOZAJ PLATÍ:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{T}_{gs}) &= \rho(\mathbf{T}_j)^2 \\ \frac{25}{56} &= \left(\frac{5}{2\sqrt{14}} \right)^2 \end{aligned}$$

Tvrdenie 3 pre náš príklad

SOR METÓDA:

- Optimálna hodnota parametr ω podľa tvrdenia 3:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(\mathbf{T}_j)]^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{25}{56}}} = \frac{2\sqrt{56}}{\sqrt{56} + \sqrt{31}} \approx 1.147$$

- Príslušná hodnota spektrálneho polomeru iteračnej matice podľa tvrdenia 3:

$$\rho(\mathbf{T}_\omega) = \omega - 1 = \frac{\sqrt{56} - \sqrt{31}}{\sqrt{56} + \sqrt{31}} \approx 0.147$$

Tvrdenie 3 pre náš príklad

- Vypočítame spektrálny polomer pre dané ω priamo:

```
omega:2*sqrt(56)/(sqrt(56)+sqrt(31)) $
```

```
pom1:invert(matrix([8,0],[5*omega,7])) $
```

```
pom2:matrix([8*(1-omega),-5*omega],[0,7*(1-omega)]) $
```

```
t:pom1.pom2;
```

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{4\sqrt{14}}{\sqrt{31} + 2\sqrt{14}} & -\frac{5\sqrt{14}}{2(\sqrt{31} + 2\sqrt{14})} \\ -\frac{40\left(1 - \frac{4\sqrt{14}}{\sqrt{31} + 2\sqrt{14}}\right)}{\sqrt{14}(\sqrt{31} + 2\sqrt{14})} - \frac{4\sqrt{14}}{\sqrt{31} + 2\sqrt{14}} + \frac{100}{(\sqrt{31} + 2\sqrt{14})^2} + 1 & \end{bmatrix}$$

```
eigenvalues(t);
```

$$\left[\left[\frac{25}{4\sqrt{14}\sqrt{31} + 87} \right], [2] \right]$$

Dostávame teda: $\rho(\mathbf{T}_\omega) = \frac{25}{4\sqrt{14}\sqrt{31} + 87}$

Tvrdenie 3 pre náš príklad

- Zhoduje sa to s výsledkom z tvrdenia 3:

```
rho:25/(4*sqrt(14)*sqrt(31)+87) $  
float(rho);  
.1467733350400546  
  
ratsimp(rho-((sqrt(56)-sqrt(31))/(sqrt(56)+sqrt(31))));  
0
```

(najprv numericky, potom zhoda dvoch presných čísel)

Poznámky k použitým príkazom v softvéri **wxMaxima**:

\$ za príkazom: výsledok sa nevypíše

float: numerická hodnota

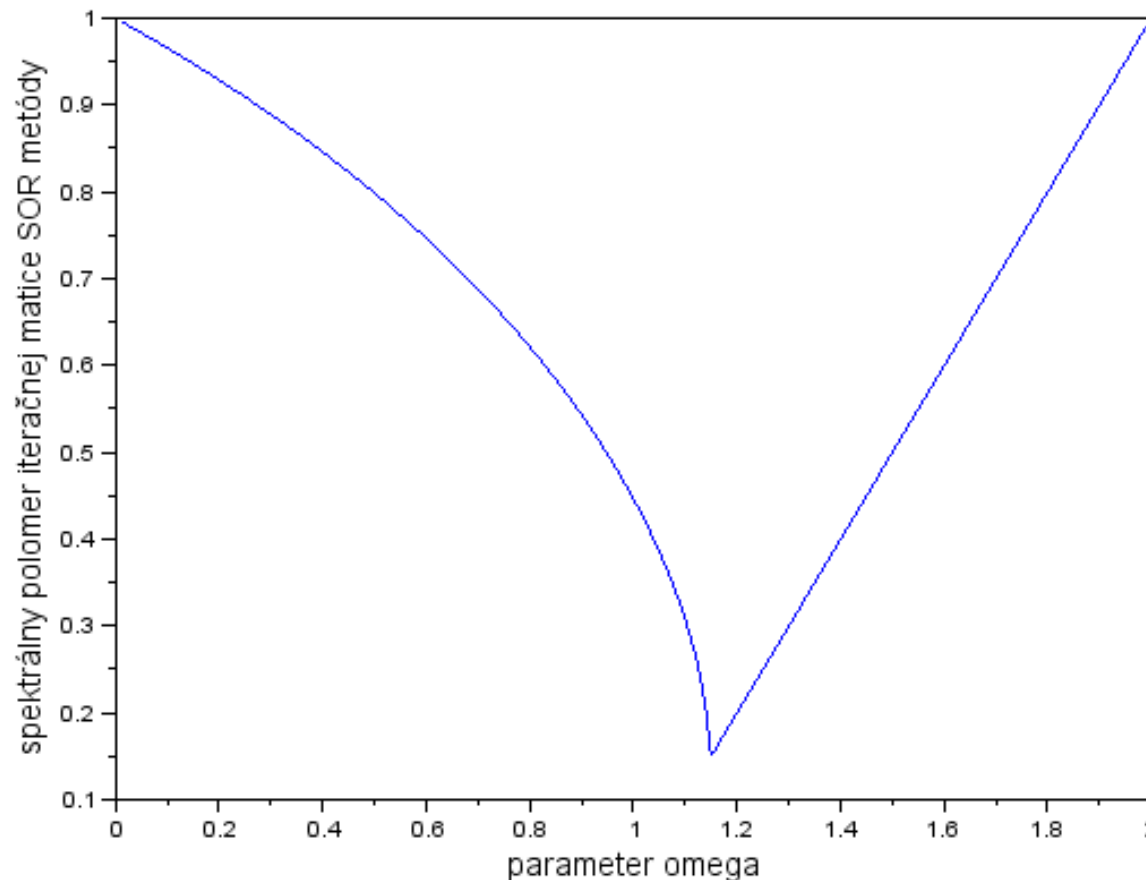
ratsimp: zjednodušenie výrazu

eigenvalues: vráti vlastné čísla matice a ich násobnosti, napr. $[[1/3, 1/2], [1, 2]]$

by znamenalo vlastné číslo $1/3$ s násobnosťou 1 a vlastné číslo $1/2$ s násobnosťou 2

Tvrdenie 3 pre náš príklad

- Získanú optimálnu hodnotu $\omega \approx 1.147$ a príslušnú hodnotu $\rho(\mathbf{T}_\omega) \approx 0.147$ porovnáme s priamym výpočtom zo str. 17:



SOR metóda pri oceňovaní derivátov

- NA CVIČENÍ:
SOR metóda pri riešení sústavy lineárnych rovníc, vznikajúcej pri implicitnej schéme - praktická implementácia
- DÚ 1:
Dokážte, že matica tejto sústavy je kladne definitná. Tým pádom sa na našu úlohu vzťahujú tu uvedené tvrdenia o konvergencii.

Priame metódy riešenia sústavy lin. rovníc

- Priame metódy riešenia sústavy lineárnych rovníc - Gaussova eliminačná metóda a jej modifikácie, LU rozklad
- Trojdiagonálna a diagonálne dominantná matica $\Rightarrow$ na riešenie sústavy sa dá výhodne použiť metóda LU rozkladu
- DÚ 2 - metóda LU rozkladu
 - Čo je LU rozklad matice? Ako sa dá využiť na riešenie sústavy lineárnych rovníc?
 - Ako vyplýva z diagonálnej dominancie matice jednoznačnosť LU rozkladu?
 - Prečo je LU rozklad výhodný pri sústave s trojdiagonálnou maticou? (nie spamäti vzorce na výpočet, ale ukázať princíp výpočtu na príklade a zdôvodniť, prečo sa pri diagonálne dominantnej matici tento postup "nepokazí" nulami v menovateli.)

Literatúra: napr. [Ševčovič, Stehlíková, Mikula], kapitola 10.3.1

Implementácia na cvičení

- NA CVIČENÍ: SOR metóda
- DÔVOD: modifikácia SOR metódy sa bude dať použiť na oceňovanie amerických opcií