

Deriváty, call a put opcie, ohraničenia na ceny opcií, kombinované stratégie

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

Čo sú finančné deriváty

- Heslo DERIVATIVES v slovníku:

noun

1 something which is based on another source:

the aircraft is a derivative of the Falcon 20G

- a word derived from another or from a root in the same or another language:

'fly-tip' is a derivative of the phrase 'on the fly'

- a substance that is derived chemically from a specified compound:

crack is a highly addictive cocaine derivative

2 (often **derivatives**) *Finance* an arrangement or product (such as a future, option, or warrant) whose value derives from and is dependent on the value of an underlying asset, such as a commodity, currency, or security:

[as modifier]:

the derivatives market

3 *Mathematics* an expression representing the rate of change of a function with respect to an independent variable.

<http://oxforddictionaries.com/definition/derivative>

Deriváty

- Aristoteles o Thalesovi z Milétu (Politika, kapitola XI):

... while it was yet winter, having got a little money, he gave earnest for all the oil works that were in Miletus and Chios, which he hired at a low price, there being no one to bid against him; but when the season came for making oil, many persons wanting them, he all at once let them upon what terms he pleased.

Anglický preklad: <http://www.gutenberg.org/>

- Hodnota práva použiť všetky lisy na olivy závisí od úrody olív v danom roku
- Ak by bola nízka úroda, niektoré lisy by zostali nevyužité; Thales mal právo, ale nie povinnosť použiť lisy

Deriváty

- Právo a súčasne povinnosť realizovať vopred dohodnutý obchod - ukážky z histórie:
 - Anglicko, Francúzsko, 12. storočie - dohoda budúceho obchodu na trhu na základe vzorky, „*lettre de faire*“
 - Japonsko, 17. storočie - štandardizované kontrakty s ryžou
 - Chicago, 19. storočie - obilie, vznik *Chicago Board of Trade* (1848)
 - 1898 - *Chicago Mercantile Trading*, maslo a vajcia, postupne aj rôzne iné poľnohospodárske produkty
 - 1978 - *International Monetary Market* ako súčasť *Chicago Mercantile Trading*, cudzie meny, neskôr napr. aj deriváty akciového indexu S&P 500

Akcie

- Väčšinu semestra sa budeme zaoberať derivátmi akcií
- Ukážka vývoja ceny akcie (GOOG):



<http://finance.google.com>

Akcie

- Ukážka vývoja ceny akcie (AMZN):



<http://finance.google.com>

Akcie

- Vývoj ceny akcie sa skladá z trendu a z náhodných fluktuácií
- Ukážka trendu (GM počas pol roka):



<http://finance.google.com>

Akcie

- Ukážka fluktuácií (GM počas jedého dňa):



<http://finance.google.com>

Opcie na akcie

- Európska call opcia je právo - ale nie povinnosť - kúpiť akciu za vopred dohodnutú cenu E) (expiračná cena, angl. *strike price, exercise price*) vo vopred dohodnutom čase T) (čas expirácie, splatnosť opcie, angl. *expiration time*)
- Európska put opcia je právo - ale nie povinnosť - predat' akciu za vopred dohodnutú cenu E) (expiračná cena, angl. *strike price, exercise price*) vo vopred dohodnutom čase T) (čas expirácie, splatnosť opcie, angl. *expiration time*)
- Americká call, resp. put opcia - právo kúpiť, resp. predat' akciu máme nielen v čase expirácie T), ale kedykoľvek do času expirácie

Opcie na akciu

- Ukážka reálnych dát:

Google Inc. (GOOG) - NasdaqGS

766.38 ↑ **0.64 (0.08%)** 9:46AM EST - Nasdaq Real Time Price

Options

View By Expiration: Feb 13 | Mar 13 | Apr 13 | May 13 | **Jun 13** | Sep 13 | Jan 14 | Jan 15

Call Options				Expire at close Friday, June 21, 2013			
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
750.00	GOOG130622C00750000	49.80	↑5.00	44.20	46.20	19	1,191
755.00	GOOG130622C00755000	42.10	0.00	41.50	43.20	5	80
760.00	GOOG130622C00760000	46.00	↓5.80	N/A	N/A	4	216
765.00	GOOG130622C00765000	41.50	↑4.30	36.40	37.80	2	84
770.00	GOOG130622C00770000	39.00	↑4.40	34.00	35.80	9	163

<http://finance.yahoo.com>

Cena opcie

- Cena opcie sa skladá z dvoch častí:
 - vnútorná hodnota (angl. *intrinsic value*) - hodnota opcie, ak by bola uplatnená okamžite
 - časová hodnota (angl. *time value*) - zvyšok:
 - vlastník opcie túto hodnotu zaplatí, očakávajúc, že mu v budúcnosti opcia prinesie zisk
 - pre vypisovateľa akcie je to riziková prémia
- Predchádzajúci príklad - cena akcie je 766.38:
 - call opcia s expiračnou cenou 755 stála 42.10:
 - vnútorná hodnota: 11.38
 - časová hodnota: 30.72
 - call opcia s expiračnou cenou 770 stála 39.00:
 - vnútorná hodnota: 0
 - časová hodnota: 39.00

Príklad

- Predáme akciu AMZN za aktuálnu ponuku na kúpu (*bid price*): 266.09 USD.

Prev Close:	266.89	Day's Range:	265.03 - 266.89
Open:	265.10	52wk Range:	175.14 - 284.72
Bid:	266.09 x 200	Volume:	347,286
Ask:	266.31 x 100	Avg Vol (3m):	3,500,590
1y Target Est:	313.74	Market Cap:	120.98B
Beta:	0.88	P/E (ttm):	N/A
Next Earnings Date:	N/A	EPS (ttm):	-0.09
		Div & Yield:	N/A (N/A)

<http://finance.yahoo.com>

Príklad

- Ďalej predáme put opciu s expiračnou cenou 150 USD a expiráciou v apríli - vidíme ponuku na kúpu (*bid price*) za 0.15 USD .

Put Options				Expire at close Friday, April 19, 2013			
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
135.00	AMZN130420P00135000	0.14	0.00	0.09	0.21	10	118
140.00	AMZN130420P00140000	0.17	↑0.01	0.11	0.23	7	1,497
145.00	AMZN130420P00145000	0.18	↓0.01	0.13	0.24	93	326
150.00	AMZN130420P00150000	0.20	↓0.02	0.15	0.28	15	1,334

<http://finance.yahoo.com>

Príklad

- Koľko by ste boli ochotní zaplatiť za call opciu s rovnakou expiračnou cenou a rovnakým expiračným časom?
- Pripomeňme si vývoja ceny akcie AMZN:



<http://finance.google.com>

Príklad

- Russel Sage, New York, 19. storočie:
 - kúpil od zákazníka akciu a put, a predal mu call s rovnakou expiračnou cenou a expiračným časom
 - takto obchádzal zákony o úžere
- PRÍKLAD - POKRAČOVANIE:
 - Ukážeme, že ide vlastne o pôžičku.
 - Koľko a na aký úrok ste si (vaším výberom ceny call opcie) požičali?

Call-put parita

- Uvažujme portfólio:
 - vypíšeme 1 call opciu s expiračnou cenou E
 - kúpime 1 put opciu s rovnakou expiračnou cenou a s rovnakým expiračným časom
 - kúpime 1 akciu
- Aká bude hodnota portfólia v čase expirácie opcií?

$$\text{portfólio} = - 1 \text{ call} + 1 \text{ put} + 1 \text{ akcia}$$

$\Rightarrow$

$$\text{payoff} = - [\text{payoff callu}] + [\text{payoff putu}] + [\text{cena akcie}]$$

Call-put parita

- Takže v závislosti od ceny akcie S v čase expirácie:
 - ak $S \leq E$:

$$payoff = -[0] + [E - S] + [S] = E$$

- ak $S \geq E$:

$$payoff = -[S - E] + [0] + [S] = E$$

Teda určite budeme mať sumu E

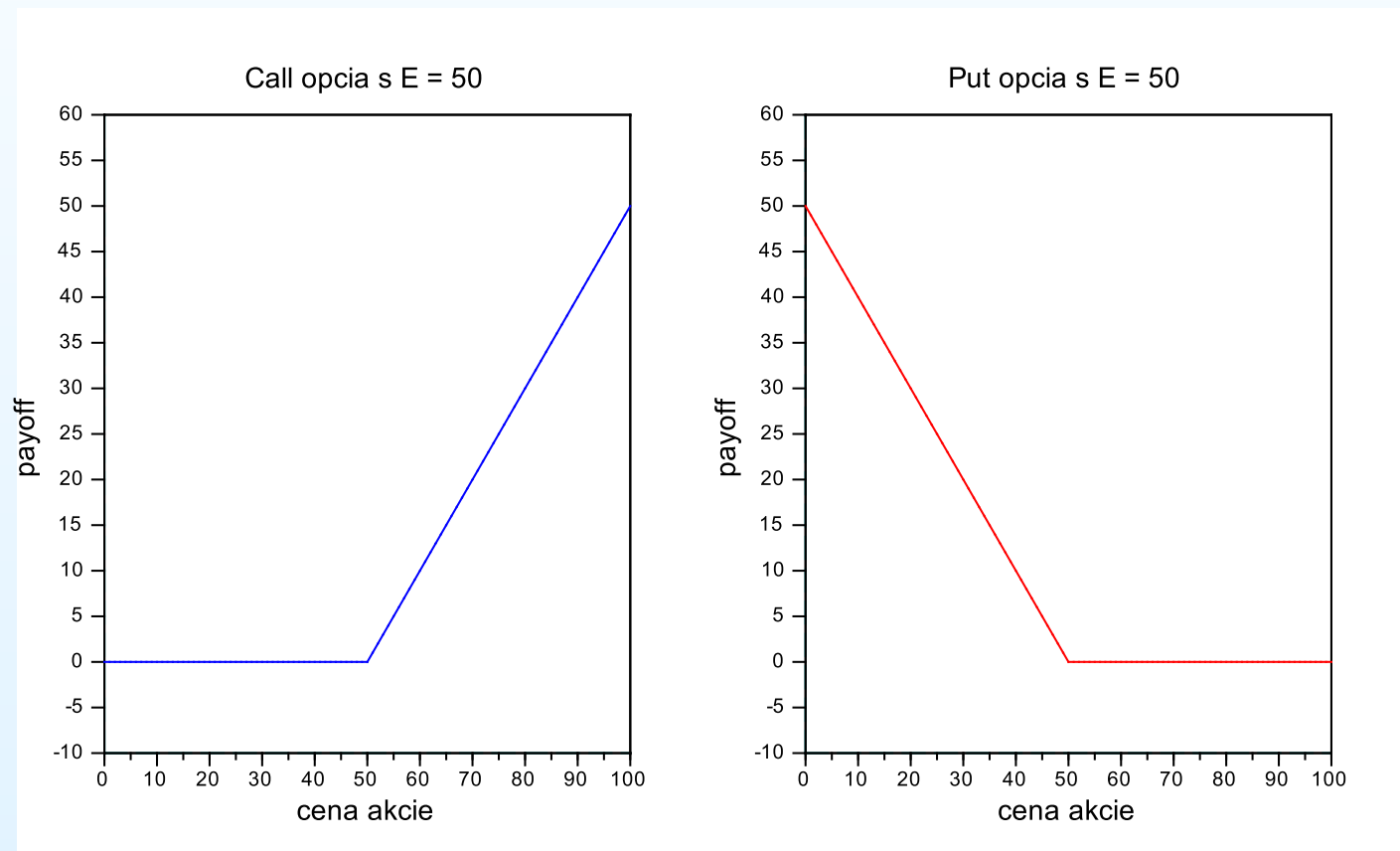
- Hodnota portfólia dnes teda musí byť

$$-c(S, E, \tau) + p(S, E, \tau) + S = Ee^{-r\tau}$$

- dostali sme vzťah medzi cenou call a put opcie, nazýva sa call-put parita

Payoff diagram

- Payoff diagram opcie (výplatný diagram) - hodnota opcie v čase expirácie v závislosti od ceny akcie v tomto čase
- Pre call: $\max(0, S - E)$, pre put: $\max(E - S, 0)$



Profit diagram

- Profit diagram opcie (zisk) - payoff opcie znížený o to, čo začiatku za opciu zaplatíme:

- Ak $r = 0$, tak

$$\textit{profit} = \textit{payoff} - \textit{náklady}$$

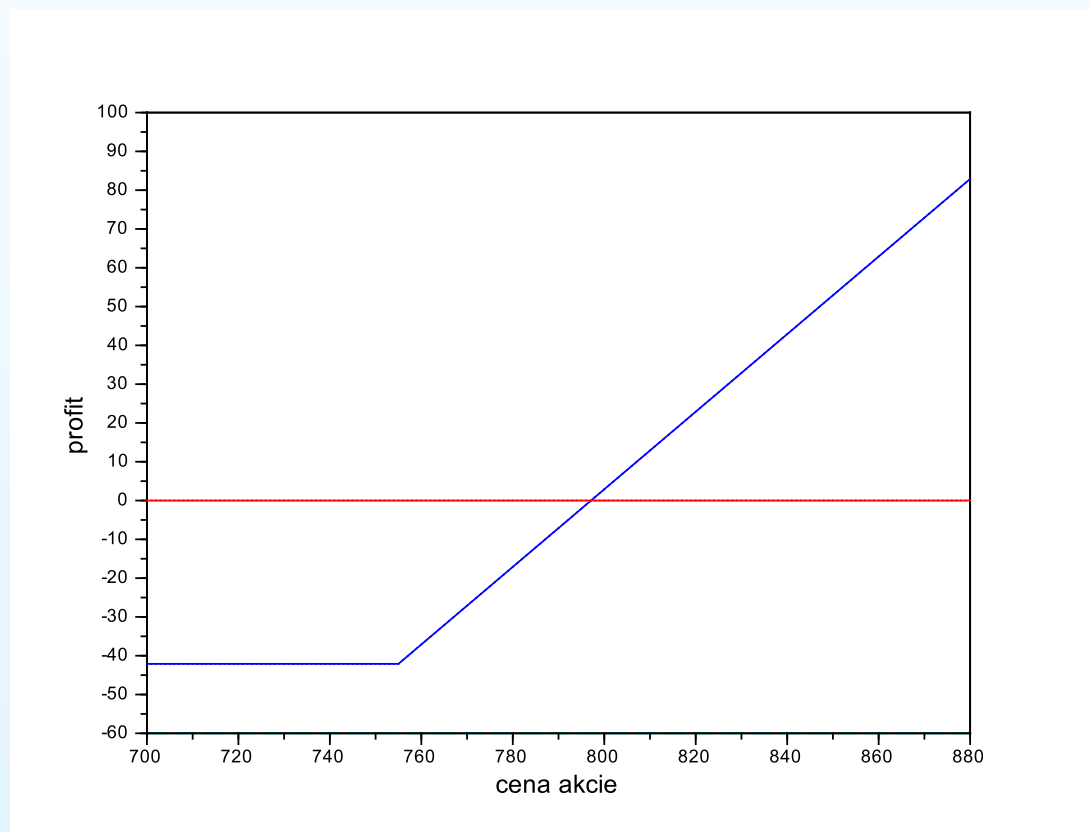
- Vo všeobecnosti:

$$\textit{profit} = \textit{payoff} - \textit{náklady} \times e^{r\tau}$$

(zaplatiť dnes sumu *náklady* je to isté, ako zaplatiť v čase expirácie sumu $\textit{náklady} \times e^{r\tau}$)

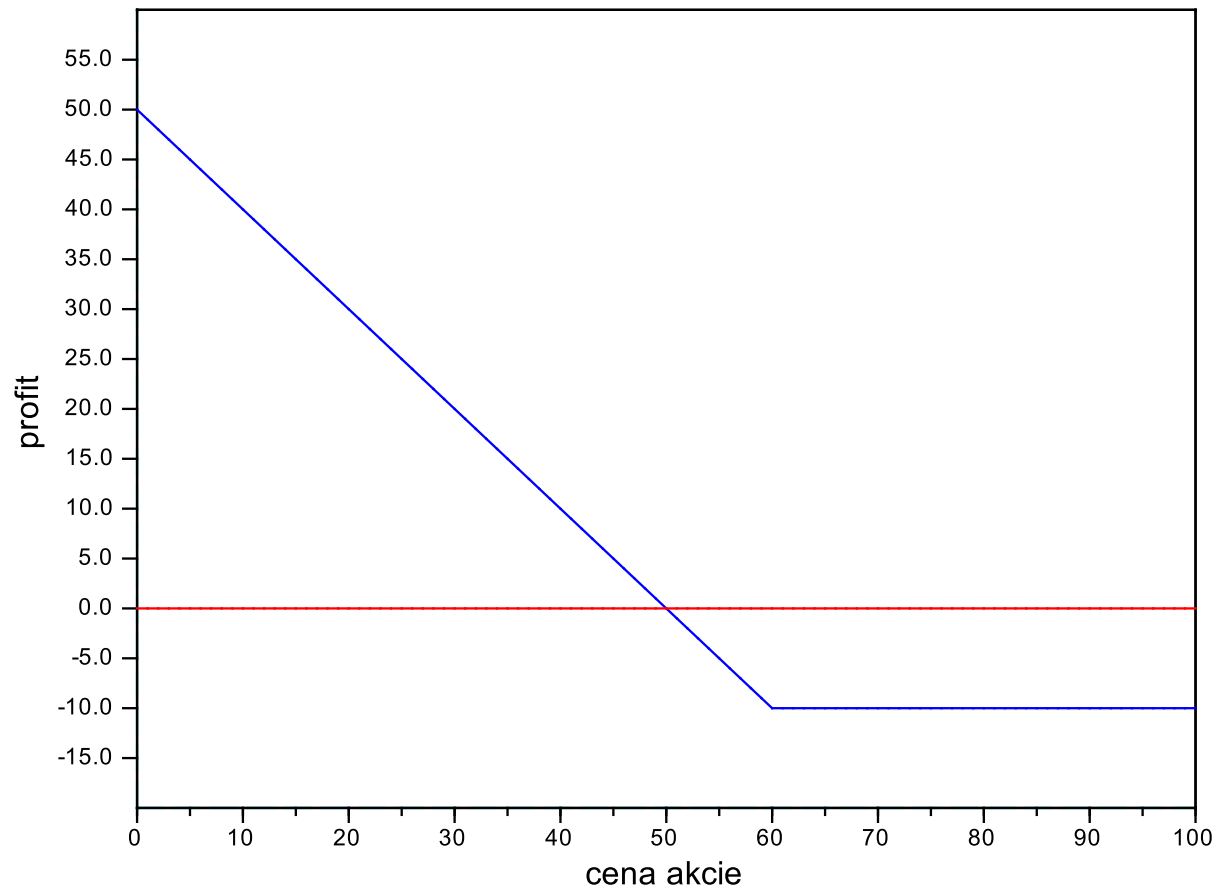
Profit diagram - príklad 1

- Opcia na str 10 - call opcia s expiračnou cenou 755 stála 42.10
- Profit diagram (pri $r = 0$):



Profit diagram - príklad 2

- Analyzujeme nasledovný profit diagram put opcie (pri $r = 0$):



Profit diagram - príklad 2

- OTÁZKY:
 - Aká je expiračná cena opcie? Koľko táto opcia stála?
 - Je možný zisk ohraničený? Ak áno, kedy je zisk maximálny? Ak nie, kedy neobmedzene rastie?
 - Je možná strata ohraničená? Ak áno, kedy je strata maximálna? Ak nie, kedy neobmedzene rastie?

Ohraničenia na ceny opcií

- Ukážeme si **nejaké nerovnosti pre ceny**, ktoré musia byť splnené - **inak je na trhu arbitráž**
- Všetky uvažované opcie majú rovnaký čas expirácie
- Úrokovú mieru označme r .
- Zaved'me označenie:
 - $c(S, E, \tau)$ je trhov $\acute{a}$ cena call opcie s expiračnou cenou E , ak je dnešná cena akcie S a čas zostávajúci do expirácie je τ
 - $p(S, E, \tau)$ je trhov $\acute{a}$ cena put opcie s expiračnou cenou E , ak je dnešná cena akcie S a čas zostávajúci do expirácie je τ

Ohraničenia na ceny opcií

- Postup pri dokazovaní ohraničení na ceny:
 - zostavíme dve portfóliá - také, že v čase expirácie opcií platí:
$$(\text{hodnota portfólia I.}) \leq (\text{hodnota portfólia II.})$$
 - aby nebola na trhu arbitráž, aj dnes musí byť
$$(\text{hodnota portfólia I.}) \leq (\text{hodnota portfólia II.});$$
portfóliá zvolíme tak, aby toto bola nerovnosť, ktorú potrebujeme dokázať

Ohraničenia na ceny opcií - príklady

PRÍKLAD 1: Zrejme platí:

$$c(S, E, \tau) \geq 0, p(S, E, \tau) \geq 0$$

PRÍKLAD 2: Ukážte, že

$$E_1 \geq E_2 \Rightarrow c(S, E_1, \tau) \leq c(S, E_2, \tau)$$

RIEŠENIE: Nech $E_1 \geq E_2$ Majme dve portfóliá:

portfólio I.: opcia s expiračnou cenou E_1

portfólio II.: opcia s expiračnou cenou E_2

Porovnáme ich hodnotu v závislosti od ceny akcie S v čase expirácie

Ohraničenia na ceny opcií - príklady

	$0 \leq S \leq E_2$	$E_2 \leq S \leq E_1$	$E_1 \leq S$
portfólio I.	0	0	$S - E_1$
portfólio II.	0	$S - E_2$	$S - E_2$
porovnanie	$0 = 0$	$0 \leq S - E_2$	$S - E_1 \leq S - E_2$

V čase expirácie:

$$(\text{hodnota portfólia I.}) \leq (\text{hodnota portfólia II.})$$

$\Rightarrow$ aj dnes:

$$(\text{hodnota portfólia I.}) \leq (\text{hodnota portfólia II.}),$$

t.j.

$$c(S, E_1, \tau) \leq c(S, E_2, \tau)$$

Ohraničenia na ceny opcií - príklady

PRÍKLAD 3:

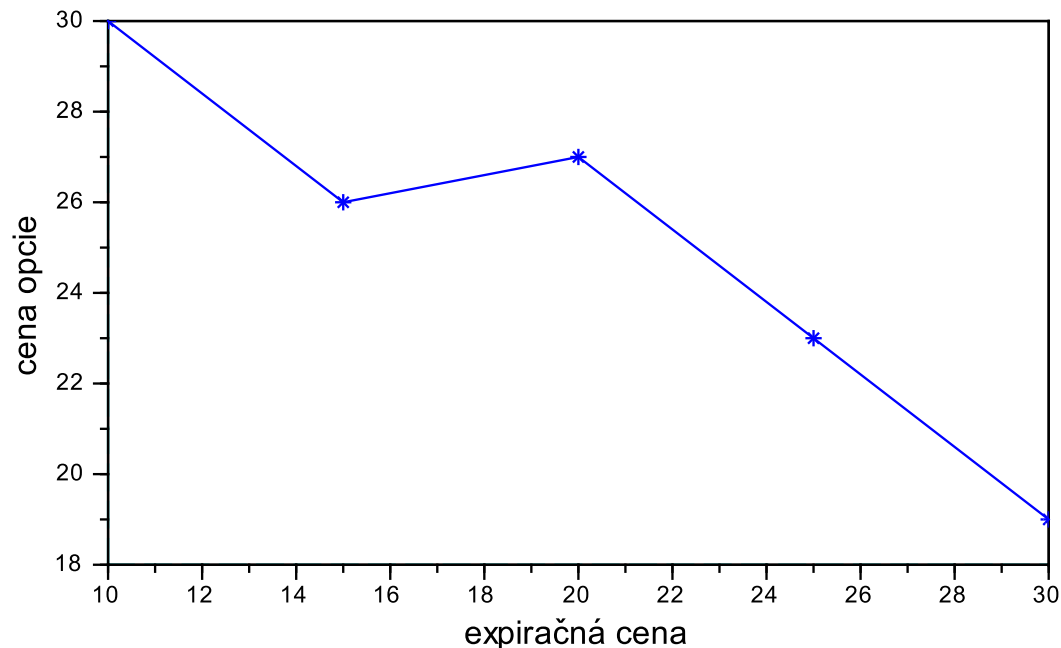
Majme nulovú úrokovú mieru a nasledovné ceny call opcií:

expiračná cena	cena opcie
10	30
15	26
20	27
25	23
30	19

Nájdite arbitráž.

RIEŠENIE: Nakreslíme si závislosť ceny call opcie od expiračnej ceny - nie je splnená klesajúcosť dokázaná v predchádzajúcom príklade.

Ohraničenia na ceny opcií - príklady



Podľa predchádzajúceho príkladu by mala platiť nerovnosť $c(S, 15, \tau) \geq c(S, 20, \tau)$, tu však $c(S, 15, \tau) < c(S, 20, \tau)$. Preto:

- kúpime to, čo je lacnejšie, ako by malo byť, v našom prípade opciu s expiračnou cenou $E = 15$,
- predáme to, čo je drahšie, ako by malo byť, v našom prípade opciu s expiračnou cenou $E = 20$.

Ohraničenia na ceny opcií - príklady

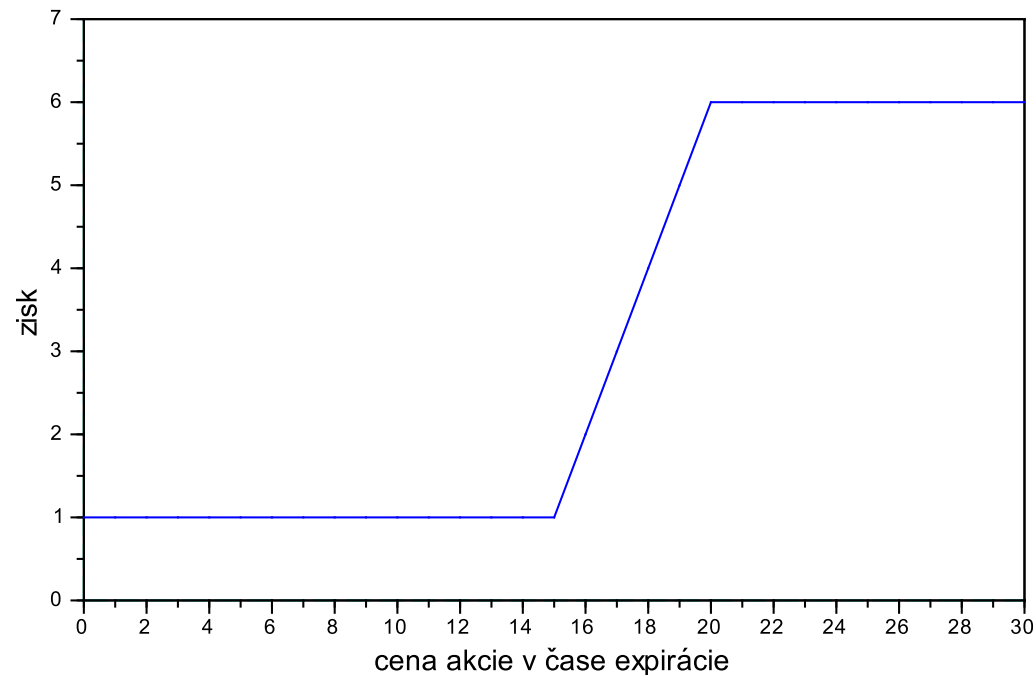
- Overíme si výsledok našej stratégie:

```
s=0:30;
payoff=max(s-15,0)-max(s-20,0);
cena=26-27;
profit=payoff-cena;
figure(1); plot(s,profit);
xlabel("cena-opcie-v-čase-expirácie"); ylabel("zisk");
```

- Čo očakávame, aký výstup? Ako vyzerá profit diagram arbitrážnej príležitosti?

Ohraničenia na ceny opcií - príklady

- Výsledok:



⇒ táto stratégia je naozaj arbitráž

- NA CVIČENÍ: ďalšie príklady ohraničení cien opcií a vyhľadávanie arbitrážnych príležitostí

Kombinované stratégie

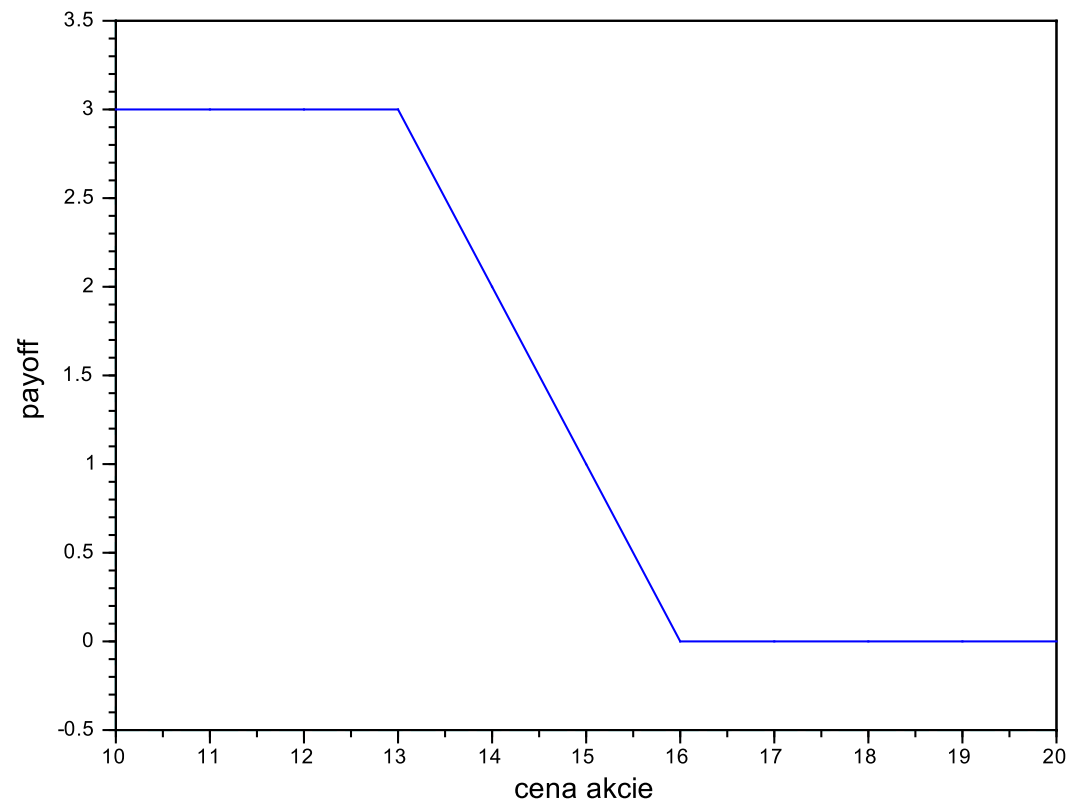
- V predchádzajúcom (teoretickom) príklade sme skombinovali opcie tak, aby sme dosiahli arbitráž
- Táto myšlienka **kúpy alebo predaja viacerých opcií** sa však dá použiť aj pri reálnych cenách - podľa nášho očakávania o vývoji ceny akcie

PRÍKLAD:

- Dnešná cena akcie je 15.12. Povedzme, že očakávame, že cena akcie bude mierne klesať $\Rightarrow$ **kúpime put opciu**, napr. s expiračnou cenou 16 USD
- Nemyslíme si však, že klesne veľmi prudko $\Rightarrow$ **predáme call opciu s nižšou expiračnou cenou**, napr. 14 USD
- Očakávame, že tento druhý put nebude uplatnený, ale jeho predajom si znížime náklady

Kombinované stratégie

- Payoff:



Kombinované stratégie

- Ceny opcií:

Yahoo! Inc. (YHOO) - NasdaqGS

15.12 **▲ 0.23(1.53%)** 12:40PM EST - Nasdaq Real Time Price

Options

Put Options

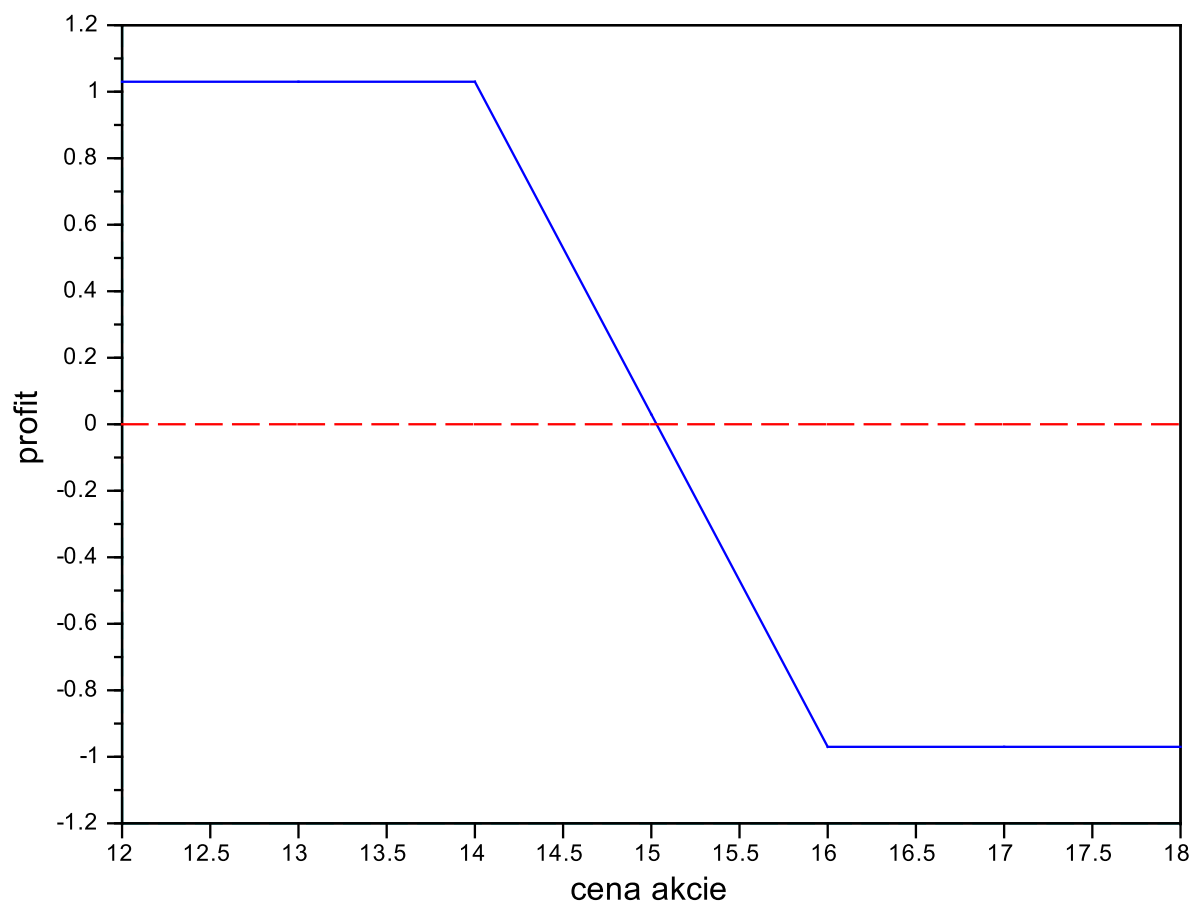
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
12.00	YHOO120317P00012000	0.01	0.00	N/A	0.01	18	89
13.00	YHOO120317P00013000	0.03	↓0.02	0.03	0.04	110	2,015
14.00	YHOO120317P00014000	0.12	↓0.01	0.12	0.13	2,008	17,091
15.00	YHOO120317P00015000	0.40	↑0.04	0.40	0.42	1,176	21,695
16.00	YHOO120317P00016000	1.10	↑0.13	1.07	1.09	133	18,911
17.00	YHOO120317P00017000	2.01	↑0.21	1.96	1.99	38	1,148

Kombinované stratégie

- Naša stratégia:
kúpime put s $E = 16$, predáme put s $E = 14$
- Bid a ask cena:
 - bid cena (tá nižšia) - ponuka na kúpu → ja môžem predať opciu za bid
 - ask cena (tá vyššia) - ponuka na predaj → ja môžem kúpiť opciu za ask
- Takže naše náklady sú **0.97**, lebo:
 - kúpime put s $E = 16$ za **1.09**
 - predáme put s $E = 13$ za **0.12**

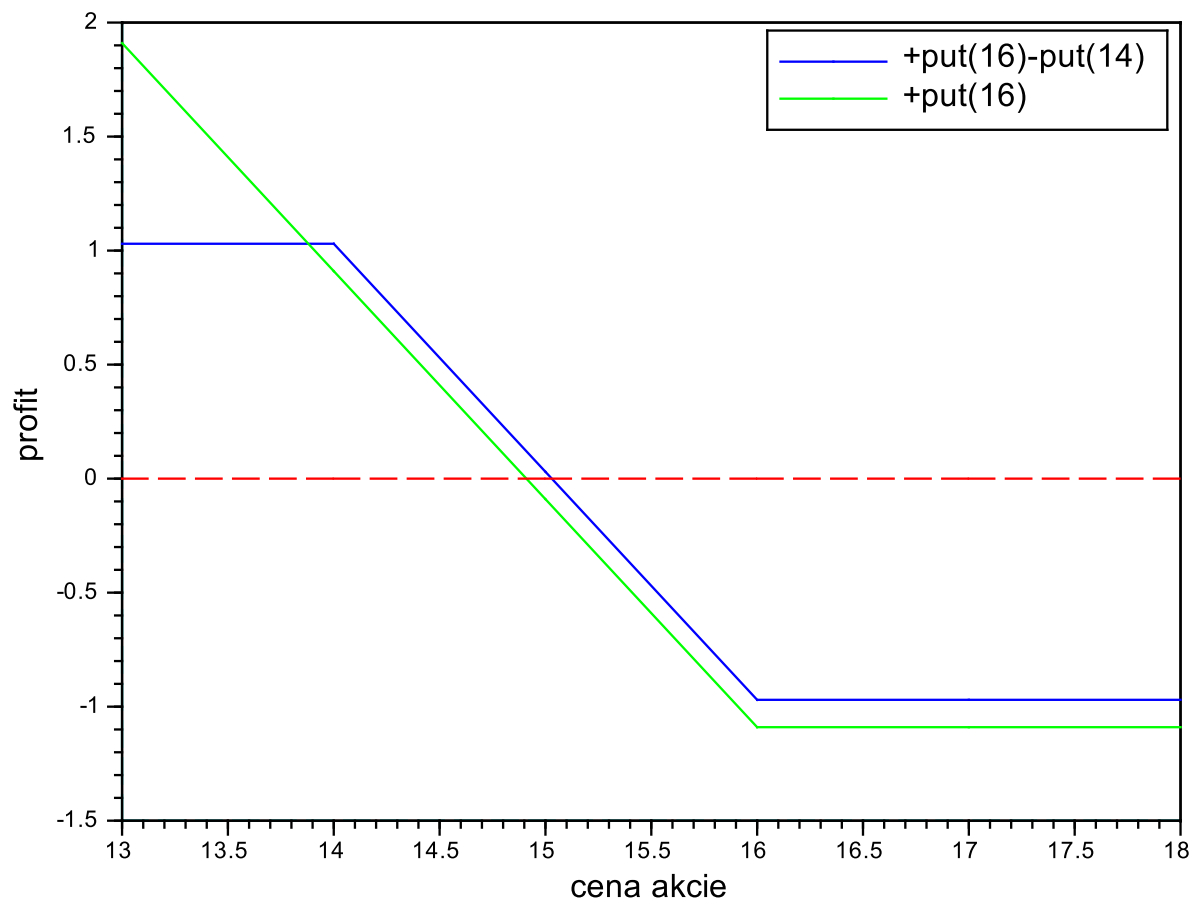
Kombinované stratégie

- Zisk, t. j. profit diagram:



Kombinované stratégie

- Porovnanie - ak by sme iba kúpili put s $E = 16$:



Kombinované stratégie

- NA CVIČENÍ:
Kombinované stratégie podľa očakávania o budúcom vývoji ceny akcie
- BONUSOVÁ DÚ:
Konštrukcia kombinovaných stratégií z reálnych dát s cieľom dosiahnuť čo najvyšší zisk
- Prehľad kombinovaných stratégií:
 - Ševčovič, Stehlíková, Mikula: **Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov**. STU 2009. - kapitola 2.3.3
 - <http://www.theoptionsguide.com/option-trading-strategies.aspx>