Numerické metódy: oceňovanie európskych opcií

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2013/2014

Transformácia na RVT

- Transformácia

$$V(S,t) = e^{-\alpha x - \beta\tau} u(x,\tau),$$

$$\alpha = \frac{r-q}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \beta = \frac{r+q}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{(r-q)^2}{2\sigma^2}, \tau = T - t, x = \ln(S/E),$$

vedie od Black-Scholesovej rovnice k rovnici vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

pre $x \in \mathbb{R}, \tau \in [0,T]$

- Začiatočná podmienka: $u(x,0) = g(x)$
    - pre call opciu: $g(x) = Ee^{\alpha x + \beta\tau}\max(e^x - 1, 0)$
    - pre put opciu: $g(x) = Ee^{\alpha x + \beta\tau}\max(1 - e^x, 0)$

Okrajové podmienky

- Pri numerickom riešení potrebujeme aj okrajové podmienky - na základe toho, akú hodnotu má call a put opcia pre veľmi malé a veľmi veľké ceny akcie
- Call opcia:
  - $V(0,t) = 0$
  - pre $S \to \infty$ platí: $V(S,t) \sim Se^{-q(T-t)}$, presnejšia podmienka: $V(S,t) \sim Se^{-q(T-t)} - Ee^{-r(T-t)}$
- Put opcia:
  - $V(0,t) = Ee^{-r(T-t)}$
  - $V(S,t) \to 0$ pre $S \to \infty$

Aproximácia riešenia

- Numerické riešenie na ohraničenom priestorovom intervale $x \in [-L, L]$
- Delenie v čase a priestore:

$$x_i = ih, \quad i = -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...n,$$

$$\tau_j = jk, \; j = 0, 1, ..., m.$$

pričom $h = L/n, k = T/m$

- Aproximáciu riešenia u v bode (x_i, τ_j) označíme

$$u_i^j \approx u(x_i, \tau_j), \qquad g_i^j \approx g(x_i, \tau_j)$$

Aproximácia riešenia

- Okrajové podmienky:
  - pre call opciu:

$$\begin{aligned} \phi^j &:= u^j_{-N} = 0 \\ \psi^j &:= u^j_N = Ee^{(\alpha+1)Nh+(\beta-q)jk} \end{aligned}$$

  - pre put opciu:

$$\begin{aligned} \phi^j &:= u^j_{-N} = Ee^{-\alpha Nh+(\beta-r)jk} \\ \psi^j &:= u^j_N = 0 \end{aligned}$$

Implicitná schéma

- Z numerických metód: explicitná a implicitná schéma pre RVT
- Implicitná schéma - dá sa zapísať v tvare: $-\gamma u_{i-1}^{j} + (1+2\gamma)u_i^j - \gamma u_{i+1}^j = u_i^{j-1}$, kde $\gamma = \frac{\sigma^2 k}{2h^2}$,
- Maticovo: $\mathbf{A}u^j = u^{j-1} + b^{j-1}$ pre $j = 1, 2, \ldots, m$ kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & -\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix},$$

$$b^j = (\gamma\phi^{j+1}, 0, \ldots, 0, \gamma\psi^{j+1})^T$$

Riešenie sústavy z implicitnej schémy

- Sústava tvaru $\mathbf{A}x = b$ s maticou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & -\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix}$$

- Najprv - vyriešime pomocou Gauss-Seidelovej metódy
- Ukážeme i je zovšeobecnenie - SOR metóda (jej modifikácia sa bude používať pri oceňovaní amerických opcií)