Náhodné procesy, modelovanie cien akcií

:: Stochastický vývoj finančných veličín ::

- Z priebehov cien akcií (ako aj iných finančných veličín - úrokových mier, výmenných kurzov, ...) vidíme, že ich priebeh sa nedá popísať deterministickou funkciou. Preto sa na ich modelovanie používajú náhodné procesy.

- Vľavo: trend (vývoj ceny akcie počas piatich rokov), vpravo: fluktuácie (vývoj ceny akcie počas niekoľkých hodín):

Zdroj: http://finance.google.com

:: Wienerov proces a Brownov pohyb ::

Stiahnite si [cv2procesy.sce] - súbor pre Scilab s doluuvedenými príkazmi, do ktorého budeme dopisovať ďalšie.

- Základným náhodným procesom, z ktorého sú ostatné odvodené, je **Wienerov proces**. Pripomeňme si jeho definíciu:
  *Náhodný proces $\{W(t), t \geq 0\}$ sa nazýva **Wienerov proces**, ak*
  - *prírastky $W(t+\Delta t)$ - $W(t)$ majú normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a s disperziou Δt,*
  - *pre každé delenie $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ sú prírastky $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa predchádzajúceho bodu,*
  - *$W(0)=0$,*
  - *trajektórie sú spojité.*

  Ďalej bude *w* všade označovať Wienerov proces.

- **Ako získame realizáciu Wienerovho procesu?**
  - Budeme generovať aproximáciu - hodnoty v diskrétnych bodoch typu (čas, hodnota), ktoré pospájame.
  - Hodnoty budú v bodoch $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$, kde Δt je dostatočne malý časový krok.
  - Hodnota v čase 0 je 0.
  - Prírastok na intervale $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ je náhodná premenná s nulovou strednou hodnotou a varianciou Δt.

  V Scilabe si najskôr definujeme pomocné funcie:

```
function [r]=randn()
    r=rand(1,"normal");
endfunction

function [w]=wiener(dt,n)
    w(1)=0;
    for i=1:n
        dw=sqrt(dt)*randn();
        w(i+1)=w(i)+dw;
    end;
    w=w';
endfunction
```

A teraz už môžeme nakresliť trajktóriu:

```
dt=0.001;
n=1000;
cas=(0:dt:n*dt);
plot(cas,wiener(dt,n));
```

Nakreslite do jedného obrázku niekoľko trajektórií Wienerovho procesu. Ukážka výstupu:

- Ak k násobku Wienerovho procesu pridáme lineárny trend:

$$x(t) = \mu t + \sigma w(t)$$

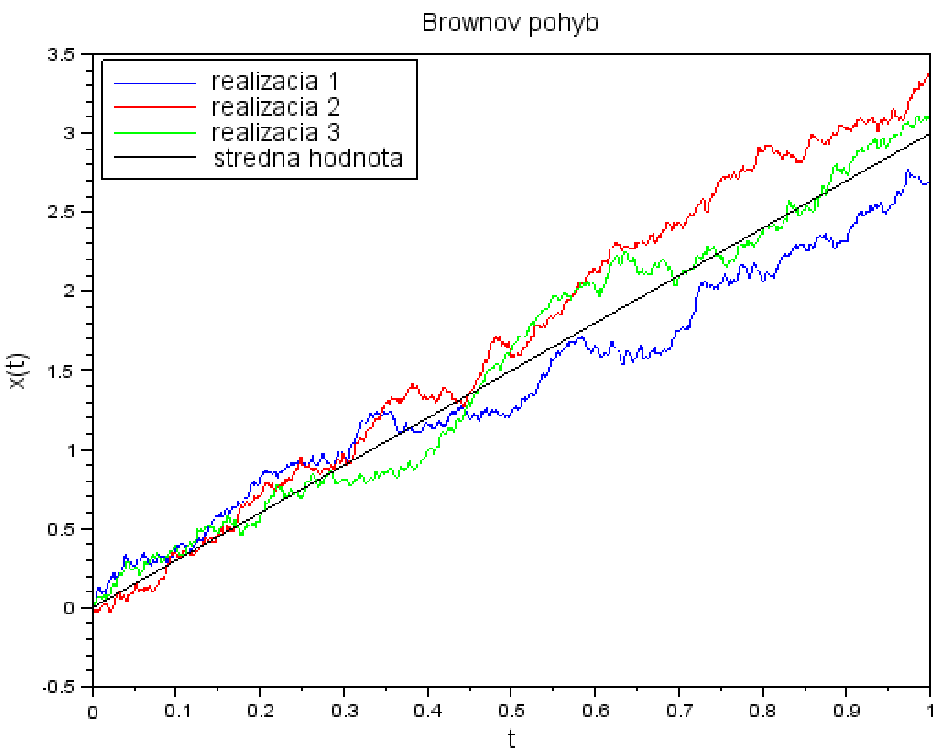
dostávame proces, ktorý sa nazýva **Brownov pohyb**.

Ak je parameter σ nulový, grafom je priamka. Pre nenulovú hodnotu σ sa k tomuto lineárnemu trendu pridávajú náhodné fluktuácie.

V Scilabe napríklad:

```
cas=(0:dt:n*dt);
mi=3;sigma=0.5;
plot(cas,mi*cas+sigma*wiener(dt,n));
```

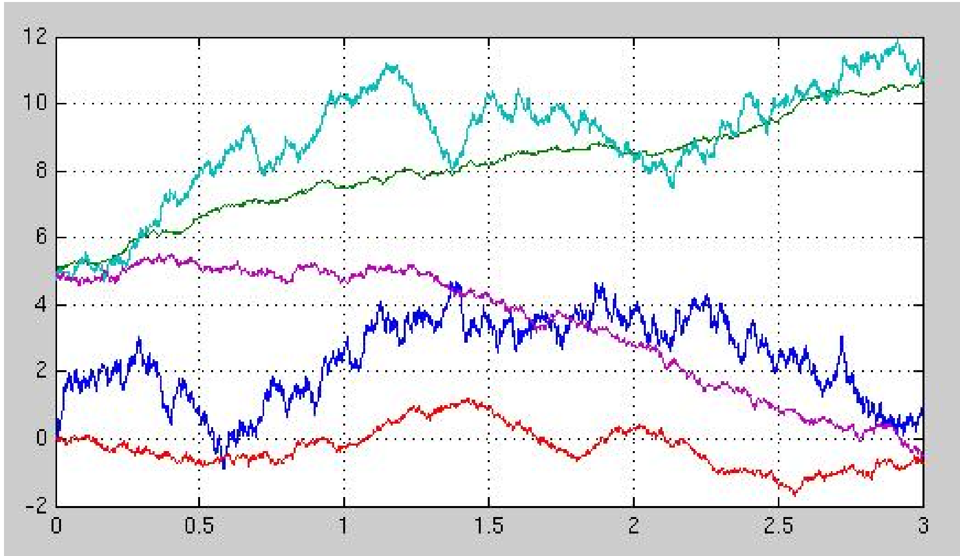
Nakreslite do jedného obrázku niekoľko trajektórií Brownovho pohybu, spolu s jeho strednou hodnotou. Ukážka výstupu:



:: Cvičenia (1) ::

1. Meňte parametre Brownovho pohynu a všímjte si, ako ovplyvňujú priebeh procesu. Potom priraďte procesy
   - $x_1(t)=w(t)$
   - $x_2(t)=3*w(t)$
   - $x_3(t)=5+2*t+w(t)$
   - $x_4(t)=5+2*t+0.5*w(t)$
   - $x_5(t)=5-3*t+w(t)$

   k ich realizáciám na grafe:



:: Geometrický Brownov pohyb ::

- **Geometrický Brownov pohyb** je proces definovaný vzťahom

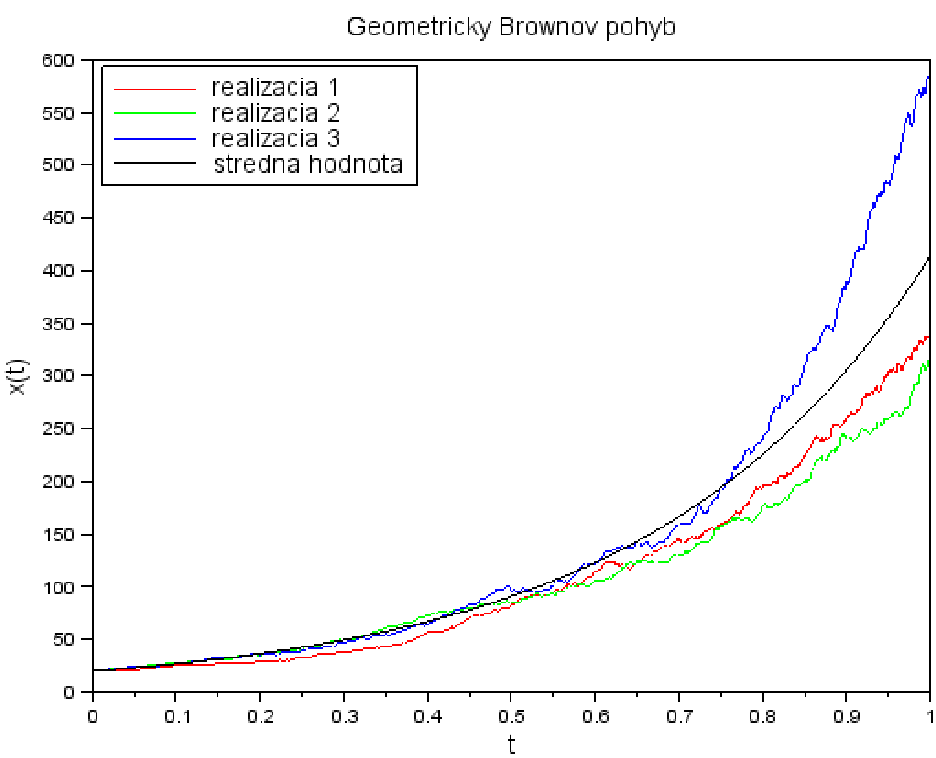
$$x(t) = x_0 \, e^{\mu t + \sigma w(t)}$$

pričom x_0 predstavuje hodnotu procesu v čase 0.

- Princíp generovania v Scilabe:

```
plot(cas,x0*exp(mi*cas+sigma*wiener(dt,n)),'r');
```

- Ukážka trajektórií geometrického Brownovho pohybu:



Vytvorte podobný graf - s priebehmi realizácií a strednou hodnotou procesu.

:: Modelovanie cien akcií pomocou geometrického Brownovho pohybu ::

- Cenu akcie S modelujeme geometrickým Brownovym pohybom:
$$S(t) = S_0\, e^{\mu t + \sigma w(t)}$$
- Na výpočet výnosov sa používa veličina
$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) = \ln\left(1 + \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}\right) \approx \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}},$$
pričom posledná aproximácia vyplýva z toho, že
$$\ln(1+x) \approx x \text{ pre } x \approx 0$$
- Ak sa cena akcie S riadi geometrickým Brownovym pohybom, tak pre výnosy dostávame
$$v_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) = \mu\Delta t + \sigma(w(t) - w(t-\Delta t)) \sim N\left(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t\right)$$
teda výnosy sú nezávislé náhodné premenné s normálnym rozdelením a uvedenými parametrami.

:: Cvičenia (2) ::

Pripomeňme si z prenášok z pravdepodobnosti definíciu a základné vlastnosti **lognormálneho rozdelenia**:

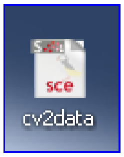
- *Náhodná premenná X má lognormálne rozdelenie, ak jej logaritmus ln(X) má normálne rozdelenie* $N(\mu, \sigma^2)$.
- *Hustota náhodnej premennej X s lognormálnym rozdelením je*
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{1}{x}e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pre } x > 0 \quad \text{(inak je nulová)}$$
- *Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej X s lognormálnym rozdelením je*
$$EX = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \; DX = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Stiahnite si [cv2akcie.sce] - súbor pre Scilab s postupom riešenia nasledujúcich úloh a niektorými užitočnými funkciami.

Predpokladajme, že cena akcie sa riadi geometrickým Brownovym pohybom s parametrami μ = 0.30, σ = 0.25 a že dnešná cena akcie je 150 USD.

1. Nakreslite hustotu rozdelenia ceny akcie o mesiac. Ako kontrolu porovnajte s histogramom vygenerovaných hodnôt ceny akcie v tomto čase.
2. Aká je pravdepodobnosť, že o mesiac bude cena akcie menšia ako 140 USD?
3. Aká je stredná hodnota štvrťročného výnosu? Aká je pravdepodobnosť, že bude záporný?

:: Odhadovanie parametrov GBP z cien akcií ::



Stiahnite si [cv2data.sce] - súbor pre Scilab s doluuvedenými príkazmi a postupom.

Ako získať parametre geometrického Brownovho pohybu z dát - odhadom parametrov normálneho rozdelenia z výnosov:

- Zo súboru goog.txt načítame dáta do Matlabu. Ide o denné dáta cien akcie firmy Google v rokoch 2009 a 2010, na začiatku súboru sú najstaršie dáta.

```
s=fscanfMat("goog.txt");
dt=1/252;
plot(s);
```

- Definujeme výnosy - vytvoríme vektor výnosov v podľa horeuvedeného vzťhu.
- Vieme, že tieto výnosy majú normálne rozdelenie. Ďalej vieme, že strednú hodnotu normálneho rozdelenia odhadujeme aritmetickým priemerom a disperziu výberovou disperziou. Vypočítame teda priemer a výberovú disperziu vektora v - budú to odhady veličín $\mu\Delta t$ a $\sigma^2\Delta t$

```
miDelta=mean(v);
sigma2Delta=variance(v); // v Matlabe: var(), v Scilabe: variance()
```

- Nakoniec vypočítame odhady samotných parametrov μ a σ^2:

```
mi=miDelta/dt
sigma=sqrt(sigma2Delta/dt)
```

:: Ďalšie príklady na precvičenie ::

1. Predpokladajme, že cena akcie General Motors sa riadi geometrickým Brownovym pohybom. Odhadnite jeho parametre z historických cien akcie do 20. februára 2014 (vrátane). Výsledok budeme potrebovať na nasledujúcom cvičení.

2. Príklady z pripravovaných skrípt: [cv2-priklady.pdf]

Cvičenia z finančných derivátov, 2014
Beáta Stehlíková, FMFI UK Bratislava

E-mail: stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk
Web: http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/